한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 113 -130

폴라니의 인식론과 문제해결의 암묵적 차원

한국교육과정평가원 남진영
jynam@kice.re.kr

건국대학교 수학교육과 홍진곤
dion@konkuk.ac.kr

수학 문제해결 교육에 가장 많은 영향을 끼친 것은 폴리아(G. Polya)의 이론이다. 폴리아가 제시하는 발견술은 수학 문제해결 과정을 명시적으로 세분화여 드러내고 정리한 것이다. 이와는 달리, 수학 문제해결 과정의 암묵적 차원을 강조하고 있는 폴라니(M. Polanyi)의 이론은 폴리아의 이론과 상보적 관계에 있는 것으로 조명될 필요가 있다. 이 글에서는 폴라니의 인식론을 개관하고, 이를 바탕으로 하는 그의 문제해결 교육 이론을 고찰한다. 지식과 앎을 개인의 마음의 총체적 작용으로 보는 폴라니는 문제해결에 있어서 지적, 정서적 부분과 함께 헌신과 몰두를 강조한다. 또한 명시적 앎 이면에 있는 묵식에 있어서 교사의 역할을 중시한다. 이와 같은 폴라니의 관점은 현재 우리나라 학생들의 수학 문제 해결 양상을 이해하고 문제점을 파악하는 데에도 의미 있는 시사를 제공한다.

주제어: 폴라니, 수학 문제해결, 암묵적 지식

1. 서론

1983년 NCTM에서 발행한 연보 『The Agenda in Action[8]』에서는 미국 수학교육의 실제에서 문제해결 교육을 강조해야 함을 강하게 주장하였다. 그 이후 문제해결 교육은 전 세계의 수학교육에 관계하는 사람들에게 관심을 불러 일으켰으며, 많은 나라에서 이를 다각도로 연구하며 교육의 실제에 적용하고자 하였다([2], [5], [16]). 우리나라의 수학교육에서도 문제해결교육은 매우 강조되어왔고, 이는 제7차 교육과정 문서에 명시화 되어 있다([2]). 2007년 고시된 개정 수학교육과정에서는 수학 교과의 성격 자체를 수학적 방법을 사용하여 문제를 합리적으로 해결하는 교과로 규정하고 있으며, 문제해결 교육의 중요성을 다음과 같이 말하고 있다.

수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현

상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결 능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사 결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다. (교육인적자원부 고시 제 2007-79호 별책8, p.1)

문제해결 교육의 중요성은 1980년대 이전에도 듀이를 비롯한 여러 학자들에 의하여 주장되어왔다. 그러나 수학교육, 특히 초・중등을 망라하는 전반적인 수학교육에서 문제해결에 대한 본격적인 논의는 폴리아(G. Polya)가 문제해결 교육에 관심을 두고 집중하여 연구하고, 이를 학교수학에 적용하려 하면서 시작되었다고 할 수 있다. 폴리아는 이를 위하여 먼저 수학적 사고의 본질을 분석하였다. 그리고 그것을 토대로 어떻게 하면 학생들의 사고를 자극하고 이를 통하여 수학 문제의 해를 발견하도록 도와줄 것인가에 대하여 연구하였다([14]). 이러한 폴리아의 노력은 『어떻게 문제를 풀 것인가(How to Solve it)』에 자세히 나타나 있다. 이 책에서 폴리아는 문제해결의 4단계 및 각 단계에서 유용하게 사용될 수 있는 발견술을 제시하고 있다. 이 발견술은 학생들의 수학 문제 해결을 안내, 지도하기 위한 발문과 권고들로 이루어져 있다. 폴리아의 문제해결의 4단계와 발견술에서는 수학 문제해결 과정에 필요한 사고 및 전략들을 가능한 한 명시적으로 분명하게 드러내려 하고 있다. 이러한 폴리아의 문제해결교육 연구는 많은 나라의 수학교육의 이론과 실제에서 널리 논의되고 적용되었다.

그러나 다른 한 편으로 폴리아의 문제해결 교육 이론에 대한 비판도 제기되었다. 숀펠트(Schoenfeld, [16])는 과연 발견술을 가르칠 수 있는가에 대하여 심각한 의문을 제기하고 있다. 그가 제시하는 비판의 내용은 다음과 같다. 대부분의 수학자들과 수학교육자들은 문제해결 과정에 대한 폴리아의 서술 내용에 깊이 공감하고 있고, 발견술에 대하여 높이 평가하지만, 이것은 실제 문제해결 경험이 있는 사람들이 자신의 사고 과정을 되돌아보았을 때 그런 것이다. 실지로 이 사고 과정에 익숙하지 않은 사람들, 이것을 익히고 있지 않은 사람들이 폴리아가 제시하는 발견술 교육을 통하여 이 능력을 갖출 수 있는가에 대해서는 의문이 제기된다. 또, 발견술이 유사 문제 해결 및 단기간의 문제 해결 능력을 향상시키는 것 같기는 하지만, 장기적으로 문제해결 능력이 실제로 향상되는가에 대하여서도 의문스러우며, 수많은 발견술을 익힌다 하여도 그것을 실제 문제 상황에서 적절하게 취사선택하여 사용하는 것은 또 다른 문제임을 지적하고 있다.

폴리아의 발견술은 수학 문제해결 과정에서 유용한 전략과 질문들을 최대한 명시화하여 목록으로 나열한 것이다. 만약 이것의 학습이 문제해결 능력의 향상을 보증하지 못한다면 수학 문제해결 능력은 무엇을 통해 향상시킬 수 있는가(또는 향상되는가)? 문제해결 능력의 신장에 있어서 발견술의 학습이 이룰 수 없는 부분은 무엇인가?

수학 문제해결 단계를 명시적으로 드러내어 정리하고, 각 단계에서 사고를 자극하고 문제해결 과정을 안내하는 데에 유용하게 사용될 수 있는 발견술의 학습이 수학 문제해결 능력의 향상과 직결되지 않는다면, 그것은 전략과 질문들이 포괄하지 못하는, 문제해결의 이면에 명시적으로 드러내기는 어렵지만 문제해결에 있어서 핵심적인 중요한 부분이 있다고 보아야 한다. 그것이 과연 무엇일까? 이 글에서는 바로 이 부분, 문제의 해를 발견하도록 하는 데 있어서 발견술의 숙달만으로는 이루어지지 않는 그러한 부분에 대하여 논하려 한다. 이 논의는 폴라니(M. Polanyi)의 인식론을 바탕으로 한다.

폴라니의 인식론에서 문제해결은 매우 중요한 부분을 차지한다. 과학자이자 철학자였던 그는 수학자는 아니었지만, 문제해결 이론의 전개에서 특히 수학 문제해결을 중심에 두었다([9]). 여기서 주목할 만한 것은 폴라니의 문제해결에 대한 생각이 폴리아의 이론과 무관하지 않다는 점이다([6], [13]). 부다페스트 대학 학부 때부터 교류하며 생각을 서로 나눈 폴라니와 폴리아는 모두 문제해결에 있어서 추측과 예감을 중시하고, 문제해결을 기술(skill)이 아닌 예술(art)로 보는 등 상당한 부분에서 유사한 견해를 보이고 있다([9], [15]).

그러나 폴라니와 폴리아의 수학 문제해결에 관한 논의는 중요한 영역에서 초점을 달리한다. 폴리아는 수학 문제 해결에서 진행되는 사고의 과정을 가능한 한 명시적으로 세분화하여 드러내려 한 반면, 폴라니는 명시적으로 드러나지 않는, 암묵적 차원을 강조한다. 빙산으로 비유하자면 폴리아는 바닷물 위에 드러나 있는 부분에, 폴라니는 그 아래 감추어진 부분에 초점을 맞춘다고 할 수 있다. 이 차이는 어떻게 보면 정반대라고도 할 수 있는 차이이다.

그러나 빙산이 바닷물에 떠 있는 부분과 아래 부분이 합쳐져 이루어지듯이 이 두 차원은 대립된다기보다는 문제해결에서 둘 다 신중하게 고려하여야 하는 차원이다. 이러한 점에서 폴리아의 관점과 폴라니의 관점은 서로 상보적이라고 할 수 있다. 폴리아의 발견술에서 상대적으로 소홀히 되기 쉬운 부분은 폴라니의 인식론에서 보강하고 있으며, 폴라니의 인식론에서 덜 주목받는 문제해결 과정의 명시적 부분은 폴라니의 문제해결 이론에서 중점적으로 다루어진다.

두 이론의 이러한 상보적 관계에도 불구하고, 수학교육에서 폴리아의 이론은 전 세계적으로 널리 잘 알려진 반면 폴라니의 인식론은 많이 알려져 있지 않다. 이 글에서는 폴라니의 관점에 초점을 맞춘다. 그리고 이 관점이 수학 문제해결 교육에 주는 시사점을 이끌어내려 한다. 이를 위해 먼저 폴라니의 인식론을 간단하게 개관하고, 이를 바탕으로 하는 폴라니의 문제해결 교육론에 대하여 살펴보겠다.

2. 폴라니의 인식론 개관

폴라니는 지식이 인간과 분리될 수 없는 것으로 보았다. 기본적으로 지식은 소유자가 있어야 한다. 앎이라는 것, 이해라는 것은 기본적으로 인식자 개인이 참여함으로 얻어지는 것이다([10], vii). 따라서 인식자가 없으면 앎도, 이해도 없다. 그렇기 때문에 지식은 개인적인 것이다. 그는 이것을 '개인적 지식(personal knowledge)'이라는 용어를 통하여 표현한다([10], viii). 이 때, '개인적'이라는 것은 '주관적'이라는 것과는 다르다. 개인은 자신의 지식에 대해 다른 사람에게 보편타당성을 주장할 수 있어야 한다. 그렇기 때문에 개인적인 것이 곧 주관적인 것이라고 할 수는 없다.

아무리 보편타당성을 주장할 수 있어야 한다고 하여도, 그 보편타당성은 주장 대상 집단에 따라 달라질 수 있고, 역사적 맥락, 사회적 맥락마다 받아들이는 보편타당성이 다르다고 주장할 수 있다. 이런 면에서 폴라니의 철학은 상대주의적 양상을 띠는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 폴라니는 실재를 가정한다. 그에 의하면, 지식은 실재를 추구하는 것이고, 앎은 숨겨진 실재와의 접촉이다. 이것은 상대주의 쪽으로 치우칠 수 있는 폴라니의 철학에 객관성과 절대성을 보강하는 역할을 한다. 이와 같이 폴라니의 인식론은 개인적인 것과 객관적인 것을 통합하는 관점을 가진다.

지식이 개인적이라는 것은 다시 말하여 인간적인 요소를 제거한 순수 객관적 지식이 존재하지 않는다는 뜻이다. 이것은 곧 지식 자체에 의미와 가치를 두기 보다는 그 지식을 아는 개인에게 더 초점을 둔 관점이다. 개인이 지식을 통하여 절대적 실재를 추구하는 것, 진리를 탐구하는 것은 자신에게 어떤 의미를 줄 수 있는가? 폴라니는 지식을 배움으로, 또는 발견함으로 개인은 세계를 보는 관점과 사고가 달라지고, 해석하고 의미를 부여하는 틀이 변화되며, 이것은 곧 존재 양식의 변화라고 하였다.1)

폴라니의 인식론에서 지식을 추구하는 일, 즉 앎의 행위는 단순한 지성의 작용이 아니라 개인의 마음이 총체적으로 작용하는 일이다. 폴라니는 앎을 지성과 함께 개인의 의지와 정서가 함께 어우러지는 활동으로 보았다. 그가 볼 때, '모든 이해의 행위는 인식자의 개인적 참여([10], vii)'이며, '지적 헌신([10], viii)'이다. 인식 주체는 지식의 탐구에 열정적으로 참여하고 헌신하며, 자신의 지적 행위에 책임을 져야 한다. 이것들은 앎의 행위에 있어서 있으면 더 좋은 그러한 요소가 아니라 앎에 꼭 필요한 결정적인 요소이다([10], viii). 개인적 지식은 곧 소유한 사람의 서명이 있는 문서와도 같기 때문이다([4], 42).

또한 폴라니는 지식을 탐구하는 데에 열정과 기쁨이 따름을 강조하였다. 그의 관점에 따르면 실재에는 수준이 있으며, 각 수준 사이에는 논리적 간극이 있다. 그리고 인간에게는 이 논리적 간극을 뛰어 넘으려는 지적 열정이 있다. 이것이 '발견의 열정([11], 142-145)'이다. 이 발견적 열정은 우리로 하여금 실재를 추구하게 하고 논리적

1) "발견을 하면서 나는 전과 같이 세계를 볼 수 없다. 내 시각은 달라졌다. 나는 다르게 보고 생각하는 사람으로 나 자신을 바꾼 것이다. ... 주된 발견은 나의 해석적 틀을 변화시킨다([10], 143)." "앎의 행위가 (해석적) 틀의 선택에 영향을 미친다면, 또는 우리가 가지고 있는 틀을 수정한다면, 그것은 우리의 존재 양식의 변화를 포함한다([12], 134)."

간극을 뛰어 넘음으로 우리의 존재 양식이 변화되도록 한다. 발견의 열정은 실재가 가지는 아름다움에 대한 추구와 이에 대한 감지로부터 비롯되며, 실재가 주는 '예감(anticipation)' 또는 '예지(foreknowledge)'에 의해 더욱 커진다([11], 22-24). 이 예감으로 인하여 우리는 신념을 가지고 헌신하여 실재를 추구한다. 그렇게 하다가 어느 순간 발견이 이루어지고 이 순간 우리는 실재가 주는 말할 수 없는 기쁨과 만족을 느끼게 된다. 이것은 아르키메데스가 목욕탕에서 '유레카!'라고 외치며 뛰어나올 수 있는 그런 기쁨과 만족이다. 따라서 실재와 가까워질수록 이 열정도 커진다. 한편 발견의 열정을 추진력으로 하여 논리적 간극을 뛰어넘고 나면 자신이 발견한 것을 아직 모르고 있는 사람, 즉 아직 그 논리적 간극을 뛰어 넘지 못한 사람을 설득하여 자신이 알고 있는 것을 알도록 하고픈 열정을 가지게 된다. 이것은 '설득의 열정([11], 150-160)'이다. 설득의 열정은 개인적 지식을 검증하는 차원과 이를 다른 사람에게 전수하는 두 가지 차원을 가진다. 앎의 행위에는 이와 같이 예감, 기쁨, 만족, 신념, 열정 등의 정서적 요소가 따른다. 이상과 같이 폴라니의 인식론에서 앎은 지성과 의지, 정서가 함께 작용하는 마음의 총체적 작용이다.

'개인적 지식'과 함께 폴라니의 인식론을 특징짓는 용어에는 '암묵적 지식(tacit knowledge)'이 있다. 폴라니는 빙산의 드러난 부분과 같이 우리에게 드러나 있는, 언어로 표현할 수 있는 지식은 '명시적 지식'으로 이것은 지식의 일부에 불과하다고 하였다. 명시적 지식의 이면에는 암묵적 지식이 있다([12], 195). 우리가 지식을 배울 때에는 말과 글, 또는 기호로 표현된 명시적 지식의 이면에 있는 암묵적 지식을 배워야 한다. 폴라니는 암묵적 지식을 배우는 '묵식(tacit knowing)'을 초점식과 보조식의 작용으로 설명한다.

인식의 순간 우리가 초점을 두는 것은 초점식 뿐이지만 초점적으로 인식하는 것은 일부분일 뿐, 그 이면에는 분명하게 또는 의식적으로 인식하지는 못하지만 그 인식이 이루어지기 위해 보조적으로 작용하는 보조식이 있다. 폴라니는 인식에서 초점식과 보조식의 역할 및 관계를 동굴의 탐침, 장님의 지팡이, 망치로 못 박기, 피아니스트의 연주 등의 예로 설명한다. 예컨대 피아니스트가 어떤 곡을 연주할 때, 그가 초점을 두고 있는 것은 연주하는 곡이다. 피아니스트는 손가락을 움직이면서 이 곡을 연주하지만, 손가락의 움직임에 주의를 기울이지 않는다. 여기에서 연주곡은 초점식에, 손가락의 움직임은 보조식에 해당된다. 피아니스트가 연주곡이 아닌 손가락의 움직임에 주의를 기울이게 되면 그 연주는 앞의 연주와 같다고 볼 수 없다. 이 때에는 곡 자체가 아닌 손가락의 움직임이 초점식이 되면서 곡의 전체적인 흐름이라든가 느낌 등 원래의 초점식은 흩어져버리고 더 이상 의미 없게 된다.

초점식은 보조식의 특수한 세부항목들이 통합되어 의미화된 것이다. 서로 연결되지 않은 보조식의 특수한 것들이 명시적으로 기술할 수 없는 긴 통로를 거쳐 통합되어 초점식에 이른다(보조식→초점식). 이렇게 도달한 초점식은 지금까지 파악되지 않던 어떤 협동적인 의미를 갖게 된다. 또한 초점식으로 인식하고 통합적으로 이해된 것은

다시 다른 것의 보조식으로 작용하게 된다(초점식→보조식). 이 보조식은 신체의 일부인 것처럼 기능할 수 있도록 동화된다.

3. 폴라니의 문제해결론[2)]

앎의 행위는 마음의 총체적 작용이라고 보면서 묵식을 강조하는 폴라니는 문제해결을 마음의 총체적 작용을 통한 실재와의 접촉이라고 하였다. 수학 문제해결의 과정은 명시적 차원을 강조하였던 폴리아와는 다른 4단계로 설명한다.

(1) 마음의 총체적 작용으로서의 문제해결

폴라니에 의하면 문제해결은 모든 동물에게 공통되는, 거의 본능과도 같은 것이다. 동물은 자신의 상황을 실제적으로 지각하고, 지적으로 파악하고, 행동하고, 의미를 부여하며 주위 환경을 계속적으로 통제하려고 한다. 이를 위하여 동물들은 목적 지향적 행동을 한다. 문제해결 역시 목적 지향적 행동이다. 문제해결은 보통 두 단계로 나타난다. 혼란이 오는 단계와 이 혼란을 없애려는 단계이다. 동물들은 혼란을 없애기 위하여 상황의 감추어진 측면을 찾고, 추측하며, 필요한 단서 또는 도구를 이용하여 원하는 결과를 얻는다. 이것은 모든 동물에게 공통되는 것이다.

생존 및 삶과 관련된 문제를 느끼고 해결한다는 점에서 인간과 동물은 유사한 점이 있다. 그러나 동물과는 달리 인간은 문제를 해결하면서 실재의 각 수준 사이의 논리적 간극을 뛰어 넘는다([10], 123). 논리적 간극을 뛰어넘는다는 것은 곧 발견의 행위이며 더 높은 수준의 실재를 인지하는 것, 접촉하는 것이므로, 문제 해결이란 곧 발견이며 지식의 발전이다.

폴라니는 발견이 가능하고, 따라서 발견의 과정을 말할 수 있는 세 지식 분야가 있다고 하였다. 그것은 자연과학, 공학, 그리고 수학이다([10], 124). 이 중 자연과학과 공학은 실험과 관찰이 주를 이루지만, 수학은 이해가 주가 되는 학문이다([10], 71-77; 184-193)[3)]. 수학의 최초 개념이나 조작들은 경험에 의존하지만 나아가서는 경험을 초월하여 인간의 두뇌에서 전개되는 자유로운 창조물이다([10], 184-186). 폴라니는 문제

2) 문제해결에 관심이 많았던 폴라니는 1957년 영국 과학철학 저널(The British Journal for the Philosophy of Science)에 이 주제를 다룬 논문을 발표하였다('Problem Solving'). 그러나 이 논문은 그가 나중에 출판한 책 『개인적 지식(Personal Knowledge: towards a post-critical philosophy, pp.120-131)』에 원문 거의 그대로 실려 있다. 이하에서는 독자의 입수 가능성을 고려하여 학술저널에 실린 논문 대신 『개인적 지식』에 실린 부분을 인용하겠다.

3) "자연과학은 관찰을 발전시킨 것이고, 공학은 설계를 발전시킨 것이며, 수학은 이해를 발전시킨 것이다([10], 184)."

해결을 논할 때 수학에 주로 초점을 맞춘다. 그의 논의에서 문제는 주로 학생들에게 수학을 가르치는 상황에서 다루는 문제를 의미한다. 이 문제는 수학 전체를 보았을 때에는 이미 해가 알려진, 발견이 이루어진 문제이지만 학생 개인의 입장에서는 알려져 있지 않은, 발견해야 하는 것이다.

문제해결 과정에 있어서 폴라니는 문제의 선정부터 중요하게 보았다. 그가 볼 때 문제를 인식하는 것에서부터 지식이 더하여진다([10], 120). 문제를 선택할 때에는 감추어져 있지만 도달 불가능해보이지 않는 어떤 것에 대한 예견이 따른다. 이와 함께 문제해결에 드는 어려움도 예견하고, 이를 해결해야 하는 탐구자 자신의 능력을 평가하여야 한다. 종합적인 평가를 통하여 그 문제에 능력과 노력을 기울일 가치가 있는지에 대하여 합리적으로 추측하고, 문제해결에 착수한다. 과학자와 공학자들은 늘 이러한 추측들을 하고 있으며, 이것은 경험이 쌓임에 따라 더 능숙하게 된다([10], 124). 다시 말하여, 문제 인식은 존재하리라 가정하는 것의 실제 존재 여부의 감추어진 가능성에 의존하는 것이며 참 거짓에 대한 일종의 추측이다. 그렇기 때문에 해결할 수 있는 문제, 해결할 가치가 있는 문제를 인식하는 것 그 자체가 하나의 발견이다.

문제 선정에 있어서 폴라니는 긴장과 괴로움이 없는 문제는 문제 해결자에게 아무 의미도 없는 문제라고 보았다([10], 122). 우리는 너무 어렵거나 쉬운 문제에는 감정적으로 몰두하지 못하는 경향이 있다. 문제에 몰두하기 위해서는 도전감이 어느 정도 있어야 한다. 도전감이 있다는 것은 자기 능력으로 풀 수 있되, 어느 정도의 노력 또는 최선을 다해야 풀 수 있다는 의미이다. 예를 들어 체스 문제는 침팬지나 정신박약아에게는 아무런 의미 없는 문제이다. 체스의 실력자 역시 웬만한 체스 문제에서는 혼란이나 긴장감을 얻지 않는다. 체스 문제는 체스를 둘 수 있되, 그의 능력이 문제와 거의 같은 수준이라서 긴장이 곁들이는 집중, 몰두를 할 수 있는 자들에게만 의미 있는 문제이다.

일단 문제를 해결하고 나면 비슷한 유형의 문제는 더 이상 혼란을 주지 않고, 따라서 지적 도전감을 제공하지 않는다. 이것은 그 전의 시행착오를 겪지 않고도 이미 경험한 방식으로 풀 수 있다. 그렇기 때문에 문제해결은 비가역적이다. 정해진 규칙이나 엄밀하게 형식화된 절차가 있어서 이를 따라가기만 하면 결과가 보장되는 문제들은 폴라니의 관점에서 의미 있는 문제가 아니다. 이것은 발견이라고 볼 수 없기 때문이다. 가능한 모든 조합을 기계적으로 시도해보고 문제를 해결할 수 있는 것도 발견이 따르는 것이 아니므로 역시 의미 있는 문제가 아니다.

폴라니는 문제의 유형을 세 가지로 나누어, '잃어버린 만년필을 찾는 문제', '알고 있지만 순간적으로 기억해내지 못하는 이름을 기억하는 문제', 그리고 '크로스워드 퍼즐 문제'로 분류한다. 수학 문제는 이들 중 크로스워드와 같은 류에 속한다([10], 125-126). 만년필을 찾는 것은 목표가 무엇인지 명확하게 알고 있는 것이고, 이름 역시 그것에 대하여 알고 있는 것이다. 그러나 크로스워드 퍼즐이나 수학 문제는 그 해가 무엇인지에 대해 지금으로서는 전혀 알 수 없다. 이 알지 못하는 것을 주어진 단

서를 가지고 찾아야하는 것이다.

마음의 총체적 작용을 강조하는 폴라니에게 수학 문제해결에서는 지적 활동 뿐 아니라 정서와 헌신이 함께 수반된다. 폴라니는 수학 문제를 풀 때 비록 우리가 지금은 알지 못하지만 발견할 수 있는 숨겨진 해가 있다는 신념이 중요하다고 하였다([10], 126-127). 그리고 감추어진 잠재된 것에 대한 예견은 문제해결의 매 단계에서 강력한 추진력이 된다. 이것은 해에 가까워질수록 커지게 된다. 예견과 함께 문제해결에는 지적 열망이 필요하다([10], 127). 이것은 문제해결의 전반적인 과정 전체에서 필요한 것으로 이 열망에 의하여 우리는 해를 열정적으로 찾는다. 폴라니는 이 열정과 해가 존재한다는 확신이 우리 자신으로부터 발견술 단계를 불러낼 수 있으며, 실재를 향하고 실재에 가까이 가도록 안내하며, 진리에 대한 확신이[4] 들게 한다고 하였다([10], ; 142-145).[5] 이 열정은 단순한 심리적 부산물이 아니라 발견에 필수적인 요소를 구성하는 논리적 기능을 한다([10], 134). 지적 열망은 문제 해결자의 상상을 자극하면서 이를 만족시킬 수 있는 방법을 찾도록 한다. 이것은 문제에의 몰두를 낳는다. 이와 같은 몰두, 문제에 사로잡히는 것, 바꾸어 말하여 문제에 헌신하는 것은 모든 발명적 힘의 주된 원천이다.

이처럼 폴라니가 문제해결에 있어서 지성 못지않게 예견과 신념, 지적 열망과 같은 정서적 측면과 헌신을 강조하는 것은 마음의 총체적 활동과 변화를 지식의 획득으로 보는 그의 인식론에 근거한 주장이다. 지적인 측면, 정서적 측면과 함께 문제해결에 참여하고 헌신하는 의지가 수학 문제해결에는 수반되어야 하는 것이다. 지・정・의 어느 하나라도 빠지게 되면 우리는 제대로 문제해결을 하고 있다고 볼 수 없다.

⑵ 문제해결(발견)의 단계

폴라니는 수학에서의 발견에 관한 자신의 생각은 푸앵카레(H. Poincaré), 아다마르(J. Hadamard), 그리고 폴리아의 영향을 주로 받았다고 하였다([13], 56). 그러나 문제해결의 단계와 관련하여 폴라니는 폴리아의 '문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성' 단계를 따르지 않고, 아다마르가 정립한 '준비, 부화, 계시, 입증([7])'을 단계를 따른다. 아다마르의 이 단계는 문제해결을 무의식과 의식의 작용으로 보는 푸앵카레의 생각에 기초한다.

폴리아의 단계는 문제 푸는 과정을 최대한 명시화 한 것이다. 이를 폴라니의 용어

4) "발견과 확인의 전 과정은 궁극적으로 실재를 향한 우리 자신의 비전에 대한 신뢰에 의존한다([10], 130)."

5) "지적 열정은 미래의 불확정적인 발견에 대한 전조를 제공하는 조화로움의 존재를 단지 확언하는 것만이 아니라, 특정한 발견에 대한 암시를 불러일으킬 수도 있고 수년 동안 노력하며 그것들을 계속해서 추구하도록 하기도 한다([10], 143)." "수학이 수학자들을 사로잡고 그들로 하여금 수학을 사고 속에서 추구하도록 강권하며 또 이를 인정하도록 하는 것은 그들의 지적 열정을 만족시키려는 것에 의해서이다([10], 188)."

로 설명하면, 폴리아의 수학 문제해결의 4단계는 명시적 지식, 또는 명시적 추론과정을 드러내어 정리한 것이다. 폴라니는 앎을 기술이 요구되는 활동([10], vii)이라고 하면서 지식의 명시적 측면, 명시적 추론과정을 인정하지만, 그보다는 명시적 추론의 이면에 있는 암묵적 추론과 묵식을 강조한다. 따라서 수학 문제해결의 명시적 차원을 정리한 폴리아의 문제해결의 4단계를 폴라니는 따를 수 없었을 것이다. 폴라니에게 문제해결은 곧 발견인데, 발견의 과정이 언제나 객관적이고 명시적인 일련의 절차를 따라서 일어나는 것은 아니기 때문이다.6)

발견의 네 단계 중 준비 단계와 입증 단계는 명시화할 수 있는 단계이다. 이것을 푸앵카레는 의식적인 단계라고 하였다([10]). 그러나 부화 단계는 감추어진 의식 속에서 의식하지 못하는 가운데 일어나는 과정이고, 계시기는 언제 일어날지 예고 없이 섬광처럼 일어나는 단계이다. 문제해결 과정을 최대한 명시화함으로 문제 해결자들에게 도움을 주고자 하였던 폴리아의 발문과 권고는 위 단계 중 준비기와 입증기에 집중되어 있다([5]). 그러나 묵식을 강조하는 폴라니는 준비기와 입증기 보다는 암묵적 앎이 작동하는 단계인 부화기와 계시기에 더 관심을 기울이고 있다. 그리고 준비기와 입증기에 대한 설명 및 권고도 폴리아의 관점과 다른 관점에서 이루어지고 있다. 각 단계에 대한 폴라니의 견해를 좀 더 자세히 보자.

① 준비기

준비기에는 의식적인 발견술 행위가 수행된다. 폴라니는 이 단계를 말하면서 폴리아의 권고인 "도착점을 보아라. 당신의 목표를 기억하라. 필요한 것을 보는 시각을 늦추지 말라. 당신이 무엇을 하고자 하는지 계속 마음에 두어라. 알려지지 않은 것을 보아라. 결론을 보아라."를 인용한다. 이 때 폴라니에게 알려지지 않은 것을 보라는 권고는 폴리아와는 성격이 조금 다르다. 알려진 데이터를 보되, 그것 자체가 아니라 알려지지 않은 것에 대한 단서로, 그 알려져야 하는 것을 가리키는 것으로, 그것의 일부분으로 데이터들을 보아야 한다는 것을 의미한다. 우리가 볼 수 있는 것은 데이터들, 알려진 것들뿐이다. 이것을 보긴 보되 알려지지 않은 것, 즉 목표와 문제에서 주어진 것들의 관계에 초점을 두고 보라는 의미이다. 알려지지 않은 것은 결국 알려진 것들, 그리고 문제에 제시된 요구에 의해 결정되기 때문이다. 이것을 초점식과 보조식으로 설명한다면, 우리가 문제를 풀 때, 문제의 해와 관련되는 데이터들은 보조적으로 인식하면서, 이 상세한 것들이 알려지지 않은 해와 함께 연결될 수 있는 방안에 대하여 초점을 기울이라는 것이다. 이렇게 하면서 우리는 알려지지 않은 것의 존재를 느끼고, 확신하게 된다([10], 127-128).

폴라니는 준비기에는 두 가지 조작이 필요하다고 하였다. 하나는 문제를 적절한 기호로 나타내고 이것의 표현을 재조직하는 것이다. 폴라니는 수학 문제를 푸는 기술에

6) "나는 여기서 발견술 모델을 생각하지 않고 ... 지적 노력에 의해 결과를 얻는 발견의 과정을 탐색할 것이다([10], 121)."

는 언어를 변환시키는 것이 있다고 하였다. 수학적 발견은 개념적 재조직만으로도 일어나기 때문이다. 말하자면 이전에 친숙하게 사용하였던 수학적 언어를 새로운 문제를 해결하기 위한 효율적 도구가 되도록 다른 수학적 언어로 바꾸는 작업이다([10], 125). 예를 들어 기하 도형을 대수적 식으로 나타낸 데카르트의 업적이 그런 것이다. 수학적 아이디어의 표현을 재조직함으로 새롭게 얻어진 것은 무엇인가 새로운 것을 제안하는 측면이 있게 된다. 예를 들어 수학 문제를 풀 때 우리는 종이에 연필로 무엇인가 끄적거리며, 또는 어떤 기호적 조작을 하며 아이디어를 짜낸다. 때로는 이 끄적거리는 기호적 조작이 성공으로 바로 이끌기도 한다.

다른 하나는 풀이를 알고 있는 비슷한 문제에 대한 기억을 생각해내려고 애쓰는 것이다. 이 일은 주어진 데이터를 다른 방식으로 변형하는 기술적 재능과 관련된다. 이러한 기억이 많으면 많을수록, 문제와 관련된 개념, 정리들, 법칙들, 규칙들을 많이 알고 있으면 있을수록 문제해결에 도달할 가능성이 높아진다. 그러나 이것은 정보에 해당할 뿐, 문제해결의 성공은 문제의 조건들과 해결자가 알고 있는 정리들, 그리고 그 문제의 해 사이에 있는 (아직은 드러나지 않은) 논리적 관련의 존재를 감지하는 능력에 의존한다.

이러한 두 조작과 함께 준비 단계에서 문제해결을 위하여 해결자가 해야 하는 일에는 추측이 있다. 이 추측은 폴리아도 매우 강조하였다([15]). 폴라니의 인식론에서 추측은 예감(또는 예지)과 관련된다. 폴라니는 이 예감(또는 예지)은 문제를 해결하도록 하는 추진력으로서 전제를 변형하고 추론하여 해에 이르는 것 못지않게 중요하다고 보았다. "이리저리 궁리하는 것이 해에 점점 접근하고 있다는 믿을만한 감각에 의해 안내되지 않는다면, 그(해결자)는 그것을 향한 어떤 발전도 이루지 못한다. 무작위로 세우는 가설들은, 발견술의 가장 좋은 규칙들을 따른다 하여도, 희망 없는 바보 같은 짓이며, 완전히 소용없는 짓이다.([10], 128)" 따라서 학생들은 문제를 본 다음에 감추어진 잠재성을 예견하며 추측하여야 한다. 그러면서 해결에 이르는 과정에 들어서게 되고, 이 예감(또는 예지)은 문제의 해에 접근하면서 점점 더 커지게 된다.

② 부화기

부화기는 비록 의식적인 수준에서는 어떤 노력도 기울이지 않지만 무의식 속에서 문제의 해에 이르는 진전을 이루는 것이다. 폴리아의 4단계에서는 이 부화기를 따로 구분하지 않는다. 부화기의 존재를 폴라니는 푸앵카레의 고백[7]과, 쾰러(Köhler)의 실험에서 침팬지가 보여줬던 것으로 예시한다([10], 121-122).[8] 주어진 과제를 끝마치지

7) 푸앵카레는 세타푹스 급수와 관련된 자신의 발견이, 무의식의 오랜 작업에 이은 갑작스러운 영감에 의해 이루어졌음을 파리 심리학회의 강연에서 언급하였으며, 이 강연은 그의 저서 『과학과 방법(Science et Méthode)』 제 3장 '수학을 통한 발견'에 수록되어 있다.

8) 쾰러의 실험에서 원숭이는 한동안 바나나 다발을 가질 수 있는 도구를 찾았다. 그리고 다양한 그러나 소득 없는 시도들을 하였다 - 예를 들어 나무 우리에서부터 판자를 뜯어내거나

않으면 그 과제를 해야 한다는 긴장이 계속되고, 이 긴장으로 인해 휴식기에도 완수를 향하는 진전이 이루어진다. 예를 들어 생각나지 않던 어떤 이름이 쉬고 있는 동안에 또는 다른 일을 하는 동안에 갑자기 떠오르는 것이 그런 것이다. 이 쉬고 있는 동안이 부화기이다.

폴라니의 인식론에서 보았을 때 부화기는 암묵적 추론이 일어나는 시기, 보조식이 성숙하여 초점식으로 나아가고 통합되는 시기이다. 부화기에서는 보조식이 일련의 명확하게 의식하거나 상세하게 설명할 수 없는 과정을 거쳐 초점식에 이르고, 이 초점식이 보조적인 것들과 통합되는, 묵식, 또는 암묵적 추론이 일어난다. 부화기에서 일어나는 일은 암묵적 추론이므로 이 과정을 상세화되는 것은 원천적으로 불가능하다. 그렇다면 어떻게 부화기의 진행을 촉진할 수 있는가?

의식 수준에서 드러나는 것이 없기 때문에 부화기를 위한 적절한 발문과 권고는 거의 불가능하다. 폴라니는 부화기 때 무의식 속에서 해에 이르는 진전이 일어나게 하기 위해서는 문제에 대한 몰두가 필요하다고 하였다. 이 단계를 명시적으로 제시하지 않았지만, 폴리아도 다음 인용문에서 볼 수 있듯이 부화기나, 이 부화기에 필요한 몰두를 중시하였다. “우리가 열정적으로 해를 얻기를 바라는, 그리고 큰 긴장 속에서 씨름하여 온 그러한 문제는 휴식 후 개선되어 우리에게 다가온다([14], 172).”

그러나 몰두하라는 것이 책상에 앉아 문제를 붙들고 한 시간이든 두 시간이든 해결될 때까지 씨름하라는 것은 아니다. 문제에 몰두하는 것에 대하여 폴라니는 베이커(Baker)의 말을 이용하여 다음과 같이 말하고 있다. “아침에 네 앞에 놓인 문제와 함께 일어나라. 그것과 함께 아침 식사를 하여라. 실험실에 그것과 함께 가라. 그것과 함께 점심 식사를 해라. 저녁 먹은 후에도 그것이 네 앞에 있도록 하여라. 그것을 마음에 품은 채 침대에 들어가라. 그것에 대해 꿈꾸어라.” 이것은 계속해서 그 문제에 대하여, 즉 주어진 것들과 구해야 하는 것들을, 또 그들 사이의 관계에 대하여 생각을 하라는 의미이다. 이렇게 몰두하게 되면, 몰두하는 중간에 해에 대한 실마리가 나타날 수 있다.

인간의 한계 상 의식 수준에서 계속 긴장상태를 유지할 수는 없다. 잠시라도 긴장을 풀 수밖에 없다. 그러나 마음은 긴장을 푸는 그 순강에도 계속적으로 작용한다는 것이다. 그리고 의식하지 못하는 가운데 문제를 향한 진전을 이루게 된다. 그렇기 때문에, 수학 문제해결 과정에 있어서 잘 풀리지 않는 문제에 대해 자신의 내부에서 부

바나나 방향으로 빨대를 던지는 것 등. 그는 먹이에 주의를 두지 않고 한 10분 정도 동료들 중 하나와 놀이를 하였다. 그러다가 갑자기 그의 주의가 게임으로부터 벗어나 짧은 소리를 지르더니 눈을 우리의 지붕에 붙어 있는 나무로 옮겨졌다. 그리고 일단 그것이 나무에게로 가서 몇 번의 시도 끝에 그것을 얻은 후 그것의 도움을 받아 바나나를 세게 움직였다. 우리는 이것이 다른 것에 종사하고 있는 그 동안에도 문제가 ‘그것의 마음의 뒤편에 있어서’ 그들의 눈이 우연히 막대기를 향했을 때에도 해의 도구를 얻으려는 노력을 계속하고 있었다고 말할 수 있다.

화가 일어나도록 기회와 시간을 줄 필요가 있다.

③ 계시기

이 시기는 발견의 순간, 즉 폴라니의 용어로 실재의 수준 사이에 존재하는 논리적 간극을 뛰어넘는 도약의 순간이다([10], 123). 이로 인해 우리는 한 단계 위의 수준으로 나아갈 수 있다. 이 순간은 갑자기, 섬광처럼 일어난다. 때로는 해가 바로 보일 수도 있고, 때로는 해에 이르는 어떤 길이 보이며, 이 길에 대한 강한 예감과 확신을 갖게 된다. 이를 폴라니는 '해에 대한 비전([10], 131)'이라고 표현하였다. 그러나 이것은 비전일 뿐이다. 폴라니는 발견으로 인하여 새로운 지식이 드러나기는 하지만, 비전 자체는 지식에 미치지 못하는 추측, 또는 예지라고 하였다([10], 135). 이 비전을 통하여 가야할 길에 대한 안내를 받을 수는 있지만, 이것은 결국 비전일 뿐 문제해결이 완성되려면 이를 구체화하고, 객관적이고 관습화된, 형식화된 절차에 따라 정리하고, 이것을 가지고 타인들을 설득하는 그러한 일련의 과정들이 필요하다. 이것은 다음 단계인 입증기에서 일어나는 일들이다.

계시기의 가장 큰 특징은 기쁨과 흥분, 만족과 같은 정서적 감정이다. 우리가 문제를 해결하게 되면, 그 전에 문제에 대해 몰두하는 동안 가진 감정적 긴장에서 해방되게 되고, 그와 같은 해방에는 큰 기쁨이 수반된다. 계시가 온다는 것은 논리적 간극을 뛰어넘는 것이기 때문에 이 기쁨과 흥분, 만족은 실재를 접촉함으로 자연스럽게 얻게 되는 것, 실재가 주는 기쁨, 흥분, 만족이다. 이 기쁨과 만족의 강도는 그 전에 문제에 몰두하며 겪은 혼란과 긴장, 괴로움, 노력의 강도에 따라 다르다. 문제에 몰두하지 않았으면, 문제로 인한 혼란과 긴장, 괴로움이 적었으면 그만큼 기쁨과 흥분, 만족도 적게 된다. 이와 같이 문제를 해결함으로 얻는 기쁨, 곧 발견의 기쁨은 폴리아도 강조한다. 폴리아는 이러한 기쁨이 수학 문제를 푸는 최선의 동기이자 보상이라고 하였으며, 스스로 이러한 경험이 없는 교사, 또는 자신이 가르치는 학생들에게서 이러한 경험을 관찰할 수 없었던 교사는 가르치는 일을 그만두어야 한다고까지 하였다([15]).

④ 입증기

계시의 순간은 섬광같이 해결책이 떠오르는 순간이다. 이 순간 문제 해결자는 해 또는 해에 이르는 길을 직면할 뿐, 문제의 해를 구체적으로 유도해내거나, 증명하는 과정은 별도로 필요하다. 또 풀어낸 해는 검증을 받아야 한다. 이 단계는 준비 단계와 마찬가지로 기호 조작에 의존한다([10], 130). 즉, 수학에서의 문제해결은 처음 단계와 마지막 단계에서 계산과 기호 조작이라는 형식적 조작 과정을 필요로 한다. 이 두 단계 사이에 있는 부화기와 계시기는 이 두 형식적 과정 사이에 존재하는 비형식적 과정이다. 첫째 단계의 형식적 과정에서는 문제에서 주어진 조건들을 기호화, 형식화하며 재조직하고, 그렇게 하면서 문제 풀이에 대한 단서를 얻으려는 데 반해 마지막 단계의 형식적 과정은 그 전 단계에서 비형식적으로 드러난 것을 구체화하는 것, 전통

적인 관습에 따라 기록하는 것이다. 이 일은 전통과 관습을 따라야 하는 일이므로 의식적 작용이고, 또 교육이 필요한 일이다.[9]

이상에서 보았듯이, 준비 단계와 입증 단계에서는 명시적 차원의 추론이, 부화 단계와 계시 단계에서는 암묵적 차원의 추론이 주로 이루어진다. 폴라니는 문제해결의 전 단계에서 탐구자의 직관이 지배적이고 결정적이라고 하였다([10], 130). 준비 단계의 예감과 예지도 직관이라고 할 수 있으며, 부화기에 일어나는 무의식의 작용도 직관의 작용이라고 할 수 있다. 폴라니가 보는 직관에 대해서는 보다 자세한 연구가 필요하겠지만, 문제해결의 전 단계에서 해결자의 직관이 중요하게 작용하고 있음을 강조한 것은 곧 명시적 앎(지식)과 암묵적 앎(지식)은 분리할 수 없음을, 암묵적 앎(지식)은 명시적 앎(지식)을 통하여 얻어지고, 명시적 앎(지식)의 이면에는 암묵적 앎(지식)이 있음을 의미하는 것이다.

4. 수학교육에의 시사점

폴라니는 수학 문제를 풀지 않고는 수학이라는 교과를 마스터할 수 없다고 하였다([10], 125). 수학에서 문제를 푼다는 것은 지금까지 알고 있는 것들을 사용하여 논리적 간극을 뛰어 넘는 발견술 행동이다. 그렇기 때문에 발견이 일어날 때 일어나는 것들을 모두 명시적인 언어로 표현하는 것은 불가능하다. 폴라니는 다음 인용문에서와 같이 이 발견은 기술(技術)을 넘어서는 일종의 예술이라고 하였다.[10]

수학 문제를 해결한다는 것은 논리적 간극을 뛰어넘는 발견술 행동이기 때문에 그

9) 아다마르는 영감에 의한 확신은 이성에 의해 확인되어야 한다는 점에서 입증기의 필요성을 설명하고 있으며, 그 사례로 잠이 덜 깬 상태에서 떠오른 착상이 옳지 않은 경우가 많다는 푸앵카레의 언급, 그리고 케플러의 운동 법칙이 전반적이고 종합적인 견해에서가 아니라 구체적이고 주의 깊은 계산으로부터 나왔다는 사실 등을 들고 있다([7]).

10) 폴라니는 수학의 문제해결 뿐 아니라 앎 자체가 기술을 넘어서는 예술(art)이라고 보았다([10], 71). 수학적 지식 자체는 미를 추구하는 것이며, 따라서 수학적 활동을 아름다움을 추구하고, 아름다움에 대한 관심을 불러일으키는 일종의 예술적 행위로 본다([10], 125). 탐구하고 싶은 문제를 선택하고 그 결과를 받아들이는 데 있어서도 아름다움은 준거가 된다. (이것은 수학적 지식뿐 아니라 실은 모든 지식이 미를 추구하며, 미는 어떤 이론이 참임을 믿는 데 매우 중요한 준거이다([10], 133).) 왜냐하면 지적 아름다움은 숨겨진 실재에 대한 징표이기 때문이다([10], 189). 이와 같은 폴라니의 수학관에 대해서는 보다 깊은 연구와 논의가 필요하다. 그러나 그것은 이 글에서 다룰 수 있는 범위를 벗어남으로 후속연구로 돌리고 이 글은 문제해결(발견)의 단계에 초점을 두기로 한다.

것을 안내한다는 어떤 규칙들도 막연한 권고[11]에 불과할 수 있다. 그것의 해석은 그것들이 적용되는 바로 그 예술에 의존하여야 한다([10], 125).

폴라니의 관점에서 발견술은 발명가들 또는 발견가들의 행위로, 이것들을 상세화함으로 학생들의 사고를 작용하며 문제해결을 안내할 수는 있겠지만, 이를 문제에 맞게 해석하고 적용하는 것은 명시적 규칙으로는 설명되지 않는 일종의 예술이다. 문제는 이것을 어떻게 가르치고 배울 것인가이다.

폴라니는 수학 문제해결에 있어서 지적인 바탕, 정서적 기쁨, 만족과 함께 헌신과 몰두, 열정을 중시하였다. 또, 보조식이 초점식과 통합되기 위한 충분한 시간이 필요함을 시사한다. 우리 학생들은 수학 문제해결에 있어서 얼마의 시간을 들일까? 본 연구에서는 서울시내 3개 인문계 고등학교(영등포구 2개교, 관악구 1개교) 자연계 2학년 학생들 110명과 과학 고등학교 1학년 학생 32명을 대상으로, 학생들이 수학 문제가 잘 풀리지 않을 때, 문제 풀이를 위하여 고민하는 시간과, 노력을 기울였음에도 불구하고 풀리지 않을 때 누구에게 도움을 청하는지에 대하여 조사하였다. 그 결과, 142명의 학생 중 10분 이하로 고민한다는 학생이 전체의 57%였고, 그 중 5분 이하로 고민한다는 학생도 전체의 24%나 되었다. 이에 비해 30분 이상 고민한다는 학생은 전체의 18%에 불과하였다. 이것은 곧 학생들이 수학 문제를 충분한 시간을 두고 고민하며 스스로 해결하려는 노력이 부족함을 의미한다. 또, 잘 풀리지 않는 수학 문제에 대하여 누구에게 도움을 요청하는가를 묻는 질문에 대해서는 대부분의 경우 해답과 풀이를 참고하거나 친구에게 묻는다고 답하였다. 학교 선생님에게 묻는 학생들은 절반이 되지 않았다. 특히 여기서 주목할 만한 것은 모르는 문제를 학교 선생님에게 먼저 물어본다는 학생은 한 명도 없었으며, 선생님에게 도움을 요청한다고 답한 68명의 학생들 중 풀이와 해답을 참고하거나 친구에게 물어본 후, 그래도 해결이 안 될 때 학교 선생님에게 간다는 학생은 29명뿐이었고 다른 38명의 학생들은 학원이나 과외 선생님, 또는 가족 등 기타 방법으로 노력한 후 거의 마지막에 학교 선생님에게 묻고 있었다. 반면에 학교 선생님에게는 전혀 묻지 않는다는 학생은 74명으로 전체의 절반을 넘었다.

지식의 암묵적 차원과 묵식을 강조하는 폴라니는 교사의 역할을 중시한다. 언어로 나타낼 수 있는 지식들, 예컨대 교과서와 참고서, 여러 형태의 언어로 표현되는 지식들은 명시적 차원의 지식과 명시적 앎에 해당된다. 그러나 그것의 이면에 붙박혀 있는 암묵적 차원의 지식은 언어만으로는 전달되지 않는다. 폴라니는 체스를 배우기 위해서는 체스 스승의 경기 내용 그대로 밟아갈 것을 제안한다([11], 73). 이것은 곧 암묵적 지식을 이미 소유하고 있는 선진의 본과 이를 따르는 것이 필요함을 의미한다.

11) 폴라니는 이 권고에서 구체적으로 폴리아의 연구를 언급한다. 이에 미루어볼 때, 폴라니는 폴리아의 발견술 만으로는 부족하다는 것을 이 글을 통하여 지적하고 있고, 자신의 이론으로 이 부족함을 채우려 하였다고 할 수 있다.

어떤 예술을 배우기 위해서 그것을 몸에 익히고 있는 사람을 스승으로 모시고, 그의 본을 따라하며 기술을 배우는 것이 널리 알려진 학습 방법이다. 마찬가지로, 수학 문제해결을 예술로 보는 폴라니의 관점에서 수학 문제해결은 이에 필요한 명시적 지식과 암묵적 지식을 모두 몸에 익히고 있는 교사가 실제 수학 문제를 해결하는 과정을 보면서, 그리고 따라하면서 배울 수 있다.[12)]

수학 문제해결에 있어서 교사의 역할에는 또 다른 것이 있다. 그것은 전통의 전수이다. 문제해결을 가르치고 배우는 일에서 전통을 소홀히 해서는 안 된다. 폴라니의 인식론에서 교육을 받는다는 것은 곧 전통으로 내려오는 진리판정의 기준을 자신의 기준으로 받아들이는 것이다. 개인은 지식을 발전시키며 전통에서 한 걸음 더 나아가야 하기는 하지만, 출발은 전통이다. 문제해결에서 전통을 배운다는 것은 발견의 순간 진리를 판단해야 하는 일차적 책임자로서 진리판정의 기준을 습득하는 것이라는 의미도 있지만, 또 다른 편으로는 자신이 발견한 해를 입증하는 것, 정당화하는 것과 관련된다. 발견이 이루어지면 이 발견을 다른 사람에게 설득하는 과정, 다시 말하면 자신의 발견을 입증해야 하는 과정이 필요하다. 이것은 전통을 따라서 이루어져야 한다. 이러한 전통을 전수하는 것 역시 교사가 해야 하는 역할이다. 따라서 수학 문제해결에 있어서 충분한 시간을 들여 고민하지 않을 뿐 아니라, 수학 교사의 도움을 별로 받으려 하지 않는 우리 학생들의 상황은 폴라니의 관점에서 볼 때 결정적인 문제점으로 지적될 수 있는 것이다.

5. 맺음말

이상에서 본고는 폴라니의 인식론을 간단히 소개하고, 이 인식론에서 보는 수학 문제해결에 대하여 논하였다. 지식을 추구한다는 것은 곧 실재를 추구하는 것이라고 보는 폴라니의 인식론에서 문제해결은 실재의 수준 사이에 존재하는 논리적 간극을 뛰어넘는 수준 상승이며 실재에 접촉하는 것이다. 그러나 또한 지식의 본질은 개인적이므로 이러한 수준의 상승은 개인에게 의미를 주어야 한다. 이것은 다음 인용문에서 알 수 있듯이 개인의 지적인 인격의 변화이다. “우리는 문제와 그것의 해 사이에 있는 논리적 간격을 우리의 발견적 열정이라는 상세화할 수 없는 충동에 의존하면서 뛰어넘어야 하고, 그렇게 함으로 우리의 지적인 인격의 변화를 일으켜야 한다([10], 143).” 지적인 인격이 변한다는 것은 곧 세상을 보는 관점과 시야가 달라지는 것이고, 해석적 틀이 변화되는 것이다.

폴라니는 이와 같은 문제해결을 위해서는 마음이 총체적으로 작용하여야 한다고 하였다. 마음이 총체적으로 작용한다는 것은 문제해결에는 인간이 가진 지적 능력뿐 아

12) 남진영([1], 147-152) 참고.

니라 정서적 요소, 의지적 요소가 모두 함께 들어있어야 한다는 것이다. 이와 같은 폴라니의 관점은 현재 우리나라에서 이루어지고 있는 문제해결 교육에 대하여 반성의 여지를 제공한다. 잘 알려진 바와 같이 우리나라 학생들은 국제 수학 성취도 비교조사에서 매번 훌륭한 성적을 거두면서도 수학에 대한 흥미와 자신감은 세계 최저 수준을 면하지 못하고 있다. 이러한 현실은 폴라니의 인식론 관점에서 볼 때, 수학교육 현실에 심각한 문제가 있음을 함의한다. 우리나라 문제해결 교육에 대한 실태 조사와 원인 분석 및 대책 마련이 절실하게 요구된다.

지식을 배운다는 것을 명시적 차원의 앎 뿐 아니라 암묵적 차원의 앎이 있다. 비록 상세하게 명시화될 수는 없지만, 이러한 암묵적 차원의 앎을 고려하지 않으면 지식의 획득이 제대로 이루어질 수 없다. 다시 말하여 초점식에 필요한 보조식의 확충과 성숙이 필요하다. 보조식이 확충되고 성숙되기 위해서는 보조식으로 인식되는 개념, 원리, 법칙 등을 학습하는 등 갖추어야 할 것이 여러 가지가 있겠지만, 그에 못지않게 문제에의 몰두가 필요하다. 문제에 충분히 몰두하며 우리의 의식과 무의식이 모두 작용할 시간이 필요하다는 것이다. 현재 우리나라 학생들은 친구들과 학교 선생님은 물론이고 온라인, 오프라인을 막론하고 무수한 학원과 과외선생님들에 노출되어 있다. 이러한 환경은 아이들이 충분히 고민하고, 좀 더 노력을 기울이면 스스로 해결할 수 있는 문제들을 그 고민과 노력 전에 옆에 있는 사람들에게 물어보고, 이들의 도움을 받아 너무 쉽고 빠르게 해결하는 데 익숙해지게 하고, 이것은 폴라니의 관점에서 볼 때 결코 바람직하지 않다. 또한, 수학 교사의 암묵적 지식을 보다 적극적으로 전수하는 자세도 필요하다.

폴라니는 지적 열정을 부양시키고 이를 만족하게 하는 그러한 문화에서 길러진 사람들은 자신들의 마음을 이러한 일에 쏟아 붇고 이러한 감정과 함께 살 뿐 아니라, 이러한 감정들을 다시 후손들에게 전달하고, 이런 식으로 열정으로 구성된 것들이 인류 역사를 통하여 계속적으로 존재하고 계승되어 간다고 하였다([10], 173-174). 이것은 인간만이 누릴 수 있는 고귀한 문화를 즐기는 삶이다. 우리 아이들도 수학 문제를 해결하며 지적 아름다움을 느끼고 즐기며 인간으로서 마땅히 누려야 하는 가장 고차원적인 삶을 누리며 살아가도록 수학교육 관계자들이 다각도로 노력해야할 것이다.

참 고 문 헌

1. 남진영, 수학적 지식의 구성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문, 2007.
2. 박교식, 제7차 초등학교 수학과 교육과정에서의 문제해결 관련 내용의 분석, 대한수학교육학회지 학교수학 3(1), 1-23, 2001.
3. 엄태동, 교육적 인식론 연구: 키에르케고르와 폴라니의 교화적 방법에 대한 교육학적 고찰. 서울대학교대학원 박사학위논문, 1998.

4. 장상호,. Polanyi, 인격적 지식의 확장. 교육과학사, 1994.
5. 정은실, Polya의 數學的 發見術 硏究. 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1995.
6. Gelwick, R., Notes toward understanding the Hungarian roots of Polanyi's Heuristic philosophy of religion, Tradition & Discovery, 32(3), 24-34, 2005.
7. Hadamard, J., The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton, Princeton University Press, 1945.
8. NCTM, The Agenda in Action, Yearbook (Schufelt G. (Ed.)), The National Council of Teachers of Mathematics, 1983.
9. Polanyi, M., Problem Solving. The British Journal for the Philosophy of Science, 8(30), 89-103, 1957.
10. Polanyi, M.,. *Personal Knowledge: towards a post-critical philosophy.* Chicago, The University of Chicago Press, 1962.
11. Polanyi, M., *The Tacit Dimension*. New York: Anchor Books, 1966.
12. Polanyi, M., *Knowing and Being: essays by Michael Polanyi*. London: Routledge & Kegan Paul, 1969.
13. Polanyi M. and Prosch H., *Meaning*. Chicago: The University of Chicago Press, 1975.
14. Polya, G., How to Solve it: a New Aspect of Mathematical Method. Princeton, Princeton University Press, 1945.
15. Polya, G., On Learning, Teaching, and Learning Teaching. The American Mathematical Monthly, 70(6) 605-619, 1963.
16. Schoenfeld, A. H., Pólya, Problem Solving, and Education, Mathematics Magazine, 60(5), 283-291, 1987.

Polanyi's Epistemology and the Tacit Dimension in Problem Solving

Korea Institute for Curriculum and Evaluation **Jin Young Nam**
Konkuk University **Jin Kon Hong**

It can be said that the teaching and learning of mathematical problem solving has been greatly influenced by G. Polya. His heuristics shows down the explicit process of mathematical problem solving in detail. In contrast, Polanyi highlights the implicit dimension of the process. Polanyi's theory can play complementary role with Polya's theory. This study outlined the epistemology of Polanyi and his theory of problem solving. Regarding the knowledge and knowing as a work of the whole mind, Polanyi emphasizes devotion and absorption to the problem at work together with the intelligence and feeling. And the role of teachers are essential in a sense that students can learn implicit knowledge from them. However, our high school students do not seem to take enough time and effort to the problem solving. Nor do they request school teachers' help. According to Polanyi, this attitude can cause a serious problem in teaching and learning of mathematical problem solving.

Key Words : Polanyi, mathematical problem solving, tacit knowledge

2000 Mathematics Subject Classification: 97C50, 97D50

ZDM Subject Classification: C30, D50

접수일 : 2009년 4월 17일 수정일 : 2009년 7월 25일 게재확정일 : 2009년 7월 30일