한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 45 - 60

수학 개념의 습득에 있어 기호의 발견법적 기능[1]

덕성여자대학교 불어불문학과 정계섭
kseopcheong@hanmail.net

수학적 사고는 외적 기호에 의해 기호화되고, 역으로 이 기호는 사고의 형태를 결정한다. 기호는 – 대수학에서의 기호, 해석학에서의 기호 그리고 삼단논법을 검증해 주는 다이어그램 – 수학연구에서 수행하는 사고 작용의 다양성을 반영하고 각각 발견법적 기능을 수행한다.

주제어 : 기호, 산수, 대수학, 미적분, 삼단논법, 벤다이어그램

Ⅰ. 들어가면서

인간은 온갖 종류의 기호(Sign)에 둘러싸여 살고 있다. 회화, 조각, 건축, 음악의 악보 등 기호 아닌 것이 없다. 우리는 일찍이 과학의 법칙이나 수학의 공식 등 '과학의 문법'에 대해 관심을 가져왔다. 연구의 결과 기호는 사고의 도구일 뿐 아니라 발견법적인 기능이 있다는 사실을 알게 되었다. 미국의 기호학자 모리스(Morris)는 우리의 이런 견해를 확인해 준다.

> "Science and signs are inseperately interconnected, since science both presents men with more reliable signs and embodies its results in systems of signs, Human civilization is dependent upon signs and systems of signs, and the human mind is inseparable from the functioning of signs."[2]
>
> (과학과 기호는 밀접하게 서로 연결되어 있다. 과학은 인간에게 의지가 되는 기호들을 제공하고, 그 결과를 기호체계 안에서 구체적으로 표현한다. 인류의 문명은 기호와 기호체계에 의존하며, 인간의 정신은 기호의 작동방식과 분리할 수 없다.)

---

1) 이 논문은 홍성사 · 홍영희 두 교수님의 정년퇴임을 기리기 위해 개최된 한국수학사학회 여름 학술 발표회(2009.6.29~7.1)에서 발표된 논문이다. 두 분 교수님의 건강과 행복을 삼가 기원한다. 아울러 이 연구는 2009년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행되었다. 유익하고 소중한 논평을 해주신 익명의 심사위원들에게 심심한 감사의 뜻을 전한다.

2) Charles Morris, Writings on the general theory of signs, Mouton, 1971, p17

수학적 대상은 감각기관에 의해 포착될 수 없으며 오직 기호에 의한 표상에 의해 접근될 수 있다. 그래서 수학 지식의 구축에 있어 기호의 역할을 분석하는 작업은 매우 중요하다.
이 글에서 우리는 대수학과 해석학에서 쓰이는 기호와 삼단논법을 효과적으로 테스트하는 다이어그램에 대해서 집중적인 조명을 함으로써 이런 결론을 뒷받침하고자 한다.

Ⅱ-1. 0(zero)의 발명과 산수

기호(numeral)로서의 '0'의 발명은 근대적 의미에서 산수(arithmetics)의 출현을 가능하게 했다. 모든 계산은 0이 없이는 불가능하기 때문이다. 진정한 계산은 0의 발명과 더불어 시작한 것이다. 왜냐하면 0의 도입은 산수학에서 알고리듬, 즉 형식적 규칙체계를 가능하게 해서 수에 관한 문제를 순전히 기계적으로 다룰 수 있게 해주기 때문이다.
집합론에서, 0은 공집합∅류(class)의 기수, 1은 {∅} 집합류의 기수이고, 2는 {∅ {∅} } 집합류의 기수이다. 이렇게 해서 자연수가 생성되므로 'Creatio ex nihilo'(무로부터의 창조)인 셈이다.
0은 결코 무(nothing)가 아니라, 숫자를 적는 목판에서 부재(absence)나 공백을 표시해 주어서 예컨대 32, 302, 320, 3002등을 분간할 수 있게 해주었다.
0은 무한(infinity)과도 밀접한 관계가 있다.

$$\frac{1}{0.1} = 10$$
$$\frac{1}{0.01} = 100$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

산수에서는 2+3이나 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$과 같은 표현에서 5와 $\frac{1}{2}$등 해가 주어진다. 이에 반해 대수학에서는 2+3x처럼 말하자면 잠재적 과정을 지시한다.[3]

3)우리는 이 'x'를 미지수라고 불렀는데, 홍성사 교수님께서 부정원(不定元)이라고 친절하게 교정해주었다.

Ⅱ-2. 기호와 대수학

문자(x, y, z, …)에 의한 표기는 대수학(Algebra)에의 길을 열었다. 프랑스 수학자 비에트(Viète, 1540-1603)에서 데카르트(Descartes, 1596-1650)에 이르면서, 미지수를 x, y, z, ... 로, 상수는 a, b, c, ...로 나타내는 표기법이 확립되었다. 문자에 의한 표기가 왜 중요한가?

첫째, 문자는 대수학을 자연언어의 질곡으로부터 해방시켰다. 인간의 언어는 모호함과 더불어 해석상의 오류를 피하기 어렵다. 나아가서 오랫동안의 관례가 옥죄어온 어휘에 얽힌 금지령이 해제되었다. 예컨대 디오판테스의 'arithmos'나 피보나치의 'res'는 모두 정수만을 의미한데 반해, 비에트의 'A'(오늘날의 x)는 어떤 수라도 나타낼 수 있다.

둘째, 문자는 어떤 표현을 그 표현과 동치가 되는 다른 표현으로 변형(transformation) 해주어서 연산에 적합하다. 이 변형 가능성이 문자가 단순한 속기술이 아니라는 사실을 말해준다. 다음 문제는 모국어와 수학 문제 해결 능력의 상관관계를 잘 보여준다.

문제) 왕이 세 딸에게 금화를 나누어 주었다. 첫째 딸에게는 갖고 있는 금화의 절반에다 금화 한 개를 더 보태주었다. 둘째 딸에게는 나머지 금화의 절반에다 금화 한 개를 보태주었다. 막내 딸에게는 나머지 금화의 절반과 금화 한 개를 주었다. 왕은 처음 몇 개의 금화를 가지고 있었을까?[4)]

학생들은 흔히 수학에서 응용문제가 어렵다고 말한다. 이는 자연언어를 수학의 언어로 번역하는 어려움에 다름 아니다.[5)] 수학문제를 기술하는 모든 문장은 불완전 하다. 문장의 언어적 구조는 부분적으로만 그 해석을 결정해 준다. 일반적으로 언어적 의미는 모호하거나 약식일 경우가 많으며, 지시적 표현의 경우 그 지시체가 모든 사람에게 명백한 것은 아니다. 위 문제에서 "막내 딸에게는 나머지 금화의 절반과 금화 한 개를 주고나자 금고가 텅 비었다"라는 말을 제대로 이해하지 못하면 이 문제를 풀 수 없다.

셋째, 문자에 의한 표기는 개별적인 것에서 모든 경우에 적용되는 일반성(generality)

---

4) 마가렛 C. 애드미스턴, 70일간의 논리여행, 새터, 1995(1991), p.16. (이 문제를 푸는 방법은 여러 가지가 있는데 우리가 접근한 방식은 책에 나와 있는 해결 방식과는 다르다는 점을 밝혀둔다.)

5) 영어권 학생의 경우 다음과 같은 오류가 자주 보인다는 보고가 있다.
There are six times as many cats as dogs.
6 x c = d
자연언어를 수학의 언어, 즉 방정식으로 번역하는 문제는 그 자체로 하나의 연구프로그램을 제공할 정도로 방대한 문제이다. 아래의 식을 자연언어로 표현할 때 생기는 어려움을 생각해보라.

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$$

을 확보해 준다. 아래 두 그룹의 문제들을 보자.

A) $x+y=7$	B) $x+7=4$
$2x=6$	$2x=5$
$x^2=9$	$x^2=7$

A, B 두 그룹의 문제 앞에서 중세의 수학자라면, A그룹의 문제는 해(solution)가 있지만 B그룹에는 없다고 할 것이다. 그러나 두 그룹의 문제들을 일반화하면,

$$x+a=b$$
$$cx=d$$
$$x^2=f$$

매개변수가 미정이므로 어찌됐던 해가 가능하다.

$$x=b-a$$
$$x=\frac{d}{c}$$
$$x=\sqrt{f}$$

일단 이런 해가 나오면, $b > a$ 라든지 $d = nc$ 그리고 $f = x^2$ 등의 제한은 더 이상 의미가 없다. 여기에 수 개념의 확장에 대한 '비밀'이 숨겨 있다고 볼 수 있지 않겠는가.

수의 역사에서 막내격인 $\sqrt{-1}$ 이 대표적인 경우이다. 제곱해서 음수가 되는 수는 없음에도 불구하고 $i^2=-1$이 되는 ($i=\sqrt{-1}$)를 인정하자는 것이다. 일단, 이 사실을 인정하면 어떤 2차방정식도 해를 구할 수 있게 된다.

라이프니츠조차도 "허수는 관념의 세계에서 잘못 태어난 것이고, 꼬리를 가지고 있는 실재와 비실재적 현실 사이를 우왕좌왕하는 것, 이 수의 성질은 기묘하지만 유용한 점에서는 무시할 수 없다." 이 수를 허수(虛數)라고 부르는 것은 부정적인 이미지를 갖게 한다. 오히려 상상의 수(imaginary number)라고 부르는 편이 수학적 사고의 핵심인 자유를 떠오르게 한다.[6]

6) i를 가시적으로 나타낸 사람은 가우스(1777~1855)였다.

나아가서 개별적인 모든 1차식은 $ax+b$로, 모든 포물선 ax^2+bx+c로 일반화 할 수 있으며 이렇게 전진하다 보면 정수에 대한 일반식을 수월하게 만들 수 있다.

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+px+q=0$$

이로부터 함수에 대한 통일적인 이론이 가능해진다. 예컨대 대수학의 기본정리 "n차 방정식은 n개의 근을 가진다."가 그것이다. 위 식의 n개의 근을 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 이라 하면 이식은 n차 다항식으로 인수분해 할 수 있다.

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=0$$

$n=2$인 경우 $ax^2+bx+c=0$의 근을 α, β라고 하면, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$n=3$인 경우, $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ 라고 하면,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

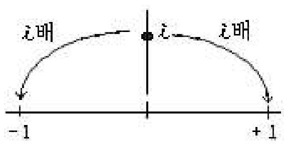
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이를 일반화해서

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{c}{a}$$



$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 + \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\ \alpha_{n-1}\ \alpha_n = -\frac{d}{a}$$

$$\vdots$$

$(-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$ = (α_1 , α_2 , ⋯, α_n에서 k개를 곱한 항 모두의 합)

$$(-1)^n\ \frac{q}{a} = \alpha_1\ \ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n$$

이렇게 하다 보면 모든 실수는 대수적 수(algebraic number)라는 사실도 알게 된다. $(\sqrt{2})^2+(-2)=0$에서 보는 것처럼 $\sqrt{2}$는 대수적 수이다. π나 e등 초월수(transcendental number)는 대수방정식의 근이 될 수 없다.

Ⅲ. 기호와 해석학

17C에 이르러 데카르트를 위시하여 많은 수학자들이 접선(tangent)의 문제와 구적법(quadrature)의 문제에 관심을 갖게 된다. 접선의 문제란 임의의 곡선에서 서로 다른 접선들을 찾는 문제이고, 구적법의 문제는 곡선에 의해 생긴 면적을 구하는 일이다. 이들 중에 Newton과 Leibniz가 오늘날 해석학의 기초가 되는 미분법을 발명하게 되는데, 양자의 차이는 기호 체계의 차이에 지나지 않아서 우리의 탐구에 호재가 된다.

Ⅲ-1. 물리학자로서 뉴턴은 수학적 양들을 운동 중인 물체의 무한소 변화 즉 연속적인 증가에 의해 생성된 것으로 보고, 이를 그 물체에 의해 형성된 공간(면적)과 비교된다. 「유율론」(Treatise of fluxion, 1736)에서 그는 유량(flux)의 개념을 도입하는데, 이는 아주 작은 시간 간격에서 유량이 증가하고 감소하는, 즉 변화하는 양을 나타낸다. 뉴턴에게 물리학의 유일한 독립변수는 시간(t)이다. 이 밖의 유량이나 변항 x,y,z는 모두 시간의 함수이다. 이들을 유량이라 부른 것은 그 값이 시간에 따라 변화하기 때문이다. 그는 무한하게 작은 시간 간격은 0라고 표기했는데, 이는 라이프니츠의 dt 에 해당한다. 유량(x, y, z, ⋯)은 무한정 증가되는 양을 의미하고, 유율($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$)은 유량이 증가하는 속도를 의미한다. 뉴턴의 문제는 유량들 사이의 관계가 주어졌을 때 유율들의 관계를 구하는 것이다.

예컨대 $y=x^n$ 에 대해 뉴턴이 주는 해법은,

o : 무한소 시간

$\dot{x}o$

$\dot{y}o$

$$\left.\begin{aligned} x &\rightarrow x+\dot{x}o \\ y &\rightarrow y+\dot{y}o \end{aligned}\right\rangle \text{ x와 y의 무한소 증가}$$

$$y+\dot{y}o=(x+\dot{x}o)^n$$

2항정리를 이용하면,

$$y+\dot{y}o=x^n \; +n\,o\,x^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{2}\,o^2\dot{x}^2x^{n-2}+\cdots$$

이 식에서 $y=x^n$ 을 빼고, o로 나누면,

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{2}\,o^2\dot{x}^2x^{n-2}+\cdots$$

o을 포함한 모든 항을 무시하면,

$$\dot{y}=x^{n-1}\dot{x} \quad \text{----------------------------} \quad ①$$

뉴턴의 기호체계는 유율을 나타내기 위해 점(dot)을 배치한다. 이런 표기법은 x나 y가 무엇에 대한 변화량인가를 보여주지 못하는 불편함이 있다. 그래서 시간에 대한 함수 f(t)인 경우에만 쓰이는 것이 보통이다.

위 식을 라이프니츠의 기호를 사용하면,

$\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1} \quad \text{----------------------------} \quad ②$$

①식과 ②식을 비교하면 라이프니츠 기호체계의 우월성이 명백히 드러난다. 들리는 말로는 영국에서 뉴턴 이후 미적분학의 발전이 대륙에 비해 한참 뒤졌다고 하는데, 이는 그의 기호법과 무관하지 않은 것이다.

Ⅲ-2. 라이프니츠는 이상적인 또는 가상의 '무한소'(infinitesimal)라는 존재를 설정한다. '0'(zero)는 아니지만 할당할 수 있는 어떤 양(quantity)보다 작은 양이다. 나중에

버클리(Berkely)로부터 "사라진 유령의 그림자"라고 비판을 받게 된다.

라이프니츠의 무한소 방법의 핵심은 독립변수와 함수의 무한하게 작은 증가를 정확하게 정의하는 데에 있다. y=f(x) 에서 독립변수 x에 대한 변화량 $\triangle y=f(x+h)-f(x)$가 되고 그 비율은,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이 비율은 기하학적으로는 y=f(x)의 두 점 P(x,f(x))와 P′((x+h), f(x+h))를 잇는 현으로 볼 수 있다. 그는 미분기호 d를 변수나 함수에 작용하는 연산자로 생각했다.

$$\mathrm{dx}=\lim_{\triangle x\to o}\triangle \mathrm{x}$$

$$\mathrm{dy}=\lim_{\triangle x\to o}\triangle \mathrm{y}$$

미분을 정초하는 원리는, 유한한 두 양의 비율 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$가 극한으로 갈 적에, 즉 유한에서 무한으로 갈 적에 보존된다는 사실이다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to o}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

무한소량의 이 비율은 유한한 비율, 즉 $\frac{\sin}{\cos}$에 다름 아니다. 라이프니츠의 체계에서 고차도함수의 경우 $\frac{d^{\mathrm{n}}y}{dx^{\mathrm{n}}}$, $\frac{d^n(f(x))}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$로 일반화 할 수 있는 편리함이 있다. 역사적으로 이는 예컨대 3차도함수가 다음과 같이 나타낼 수 있다는 사실에서 유래한다.

$$\frac{d\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}}{dx}=(\frac{d}{dx})^3(\mathrm{f(x)})$$

여기에서 괄호를 제거하면, $\frac{d^3}{(dx)^3}(\mathrm{f(x)})=\frac{d^3}{dx^3}(\mathrm{f(x)})$가 된다.

라이프니츠 기호체계에서 x=a에서 도함수의 값은 두 가지 방식으로 쓰여진다.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{dy}{dx}(a)$$

이처럼 라이프니츠 체계에서는 미분에 대한 변항을 분모에서 지정해주는 이점이 있으며, 이런 사실을 편미분에서 아주 도움이 된다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

뉴턴은 적분에 대한 기호를 제시하지 않았으나 라이프니츠는 적분기호 ∫도 만들었는데 ∫dy=y가 되어 편리하면서도 우아해서 오늘날에도 사용되는 기호가 되었다.
주지하는 바와 같이 적분의 정의는 다음과 같다.

$$\int f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i} f(x_i) \triangle x$$

Ⅲ-3. 다른 체계를 살펴보는 것도 참고가 될 것 같다. 라그랑주(Lagrange, 1736-1813)는 1차도함수를 f'로, 2차도함수를 f''로, 3차도함수를 f'''로 표기한다. 그리고 f의 n차 도함수는 $f^{(n)}$으로 표기한다.
오일러 (Euler, 1707~1783)는 D라고 하는 미분연산자를 써서, 1차도함수는 Df로, 2차 함수는 D^2f로, n차도함수는 D^n f로 나타낸다. y=f(x)의 도함수를 구하는 경우 독립변수 x를 D에 첨자한다. 그래서 D_xy,D_x^2y 그리고 n차도함수의 경우에는 D_x^ny 로 나타낸다. 이 체계는 선형미분방정식에서 주로 쓰인다.
함수f(x)에 대해, 독립 변항을 아래첨자로 사용하여 도함수를 나타낼 수도 있다.

$$f_x = \frac{dy}{dx}$$

$$f_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

이 표기법은 변항이 여러 개인 경우 편도함수를 취할 때 편리한데, 이때 미분연산자 d를 "∂"(round)로 바꿔준다. 예컨대 f(x,y,z)에서 x에 대한 편도함수를 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \partial_x f = \partial^x f$$

Ⅳ. 다이어그램과 삼단논법

이제까지 살펴본 기호들을 상징(symbol)이라고 한다면, 다이어그램은 도상(icon)이다. 다이어그램에 의한 추론은 대수학이나 해석학에서의 추론과는 그 성격이 다르다. 그것은 작곡처럼 말하자면 창조적 정신을 필요로 한다.

주지하는 바와 같이 삼단논법의 가능한 경우의 수는 256가지이고, 이 중에서 타당한 경우는 19가지이다. 각각의 경우에 문제는 삼단논법의 타당성 여부는 직관적으로 알 수 없다는 데에 있다. 타당한 논증에서는 전제들이 참이면서 결론이 거짓일 수 없다. 벤(Venn)다이어그램은 그 명제가 참이 되는 경우를 도식적으로 보여주고 있기 때문에, 두 전제들에 대한 다이어그램을 적절히 만들어주면, 결론의 진위를 조사할 수 있다. 전제가 결론을 함의할 때 오직 이때에만 삼단논법도 타당하다. 타당한 삼단논법에서 전제들을 다이어그램으로 처리하면, 결론의 논리적 지도가 나타난다.

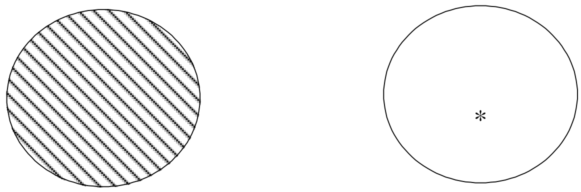
삼단논법의 구조는 대전제에서 M(매개념)이 선행하거나 P(술어)가 선행되거나 둘 중의 하나이고, 소전제에서는 S(주어)가 선행하거나 M(매개념)이 선행하거나 둘 중 한 가지이므로 다음과 같다.

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
대전제	M-P	P-M	M-P	P-M
소전제	S-M	S-M	M-S	M-S
결론	S-P	S-P	S-P	S-P

각각의 정언명제는 A(전칭긍정), E(전칭부정), I(특칭긍정), O(특칭부정) 중 하나이므로 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, 각각의 64경우가 있어서 모두 256가지가 되는 것이다.

위에서 언급한 바와 같이 삼단논법을 빠르게 테스트하는 하나의 방법은 Venn다이어그램이다. 주지하는 바와 같이 삼단논법은 3개념(대개념, 소개념, 매개념)을 가진 두개의 전제로부터 결론을 도출하는 논증이다. 각 개념은 하나의 집합을 만들고, 이는 원으로 나타낸다.

벤다이어그램의 장치는 두 가지이다. 공집합은 빗금을 치고 원소를 가지는 집합은 별표를 한다.



일각수　　　　　　　　개

별표나 빗금이 없는 부분은 원소를 가질 수도, 갖지 않을 수도 있다.[7]

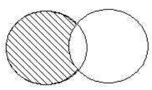
짐작하는 바처럼 AAA-1과 EAE-1은 가장 많이 쓰이는 타당한 삼단논법이다. 몇 가지 흥미로운 경우를 검토해 보기로 하자.

예제1)　OAO - 3

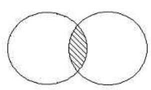
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Some M are not P}\\ \text{All M are S}\end{array}}{\text{Some S are not P}}$$

7) 이 기법을 사용해서 네 가지 정언 명제를 나타내면 아래와 같다.

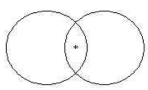
1. 모든 수학자들은 게으르다.(A)



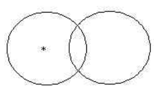
2. 어떤 수학자도 게으르지 않다.(E)



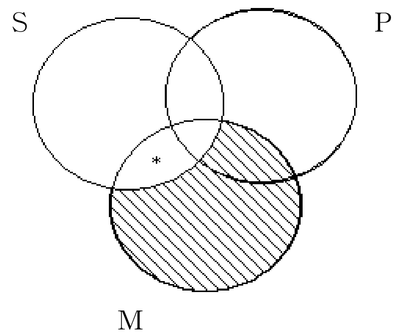
3. 어떤 수학자는 게으르다.(I)



4. 어떤 수학자는 게으르지 않다.(O)



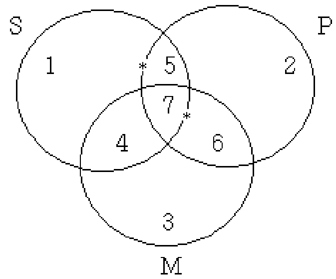
벤다이어그램을 적용하면,



이 논증이 타당함을 볼 수 있다. 그러나 전제가 나온 순서대로 할 경우, 이 문제는 풀리지 않는다. 그래서 이 예제는 전칭전제가 특칭전제보다 먼저 다이어그램화 되어야 한다는 사실을 보여주는 좋은 예이다. 다른 사례로는 AII-3가 있다.

예제2)　IOO - 1

Some M are P
Some S are not M
Smoe S are not P

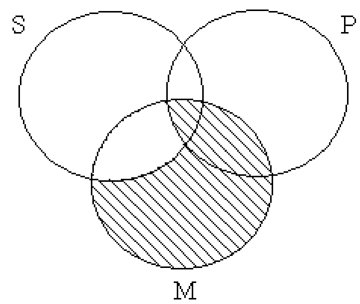


M이 P가 되는 지역은 6,7이므로 경계선상에 별표를 한다. S가 M이 아닌 지역은 1,5이므로 역시 경계선상에 별표를 한다. 즉, 이 원소가 1지역에 있는지 5지역에 있는지 알 수 없다.[8] 따라서 결론이 보증되지 않으므로 이 삼단논법은 부당하다.

8) 벤다이어그램 방법의 결정(decidable) 가능성 문제는 열린 문제로 남겨둔다.

예제3) EAO-4는 흥미로운 문제를 제기하는 형식이다.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{No } P \text{ is } M \\ \text{All } M \text{ is } S\end{array}}{\text{Some } S \text{ is not } P}$$



SM$\overline{P}$지역에 별표가 없으므로 이 삼단논법은 부당하다.

그러나 만일 "M이 존재한다."라는 추가 전제가 있다면? 그렇다면 이 형식은 타당하게 된다. 그런데 과학이나 수학에서 우리는 그 존재를 가정하지 않으면서도 이론적 실체(theoretical entities)에 대해서 말한다. 원, 점, 마찰없는 평면, 자유낙하물체 등이 그런 예이다. EAO-4는 현대과학철학의 토픽중 하나인 존재론적 도입의 문제를 보여주는 사례이다. 무엇이 존재한다는 것을 우리는 어떻게 합리적으로 알 수 있는가?

Ⅴ. 나오면서

대수학에서의 기호는 단순한 속기술이 아니라, 일반성(generality)을 확보하는 수단이며, 변형이 가능해서 문제의 해를 용이하게 구할 수 있는 발견법적인 기능을 지니고 있다.

이를테면 해석학에서 본 바와 같이, 두 지점 사이의 거리 차(ΔP)를 시간 차(Δt)로 나누면 평균속도$\frac{\Delta P}{\Delta t}$가 나오고, 이때 $\Delta t \rightarrow 0$ 으로 하면 순간속도 $\frac{dP}{dt}$가 되는데, 이렇게 되면 물리학의 문제를 형식화(formalization)하여 대수학의 문제로 환원하는 계기가 된다. 이것이 중요한 이유는 이때부터 연산이 가능해진다는 점이다. 여기에서 형식화란 기호의 조작에 다름 아니며, 이것이 우리가 기호의 '발견법적'기능이라고 부르는 것이다.

유추적(analogic)기호인 다이어그램은 표상하는 대상 (여기에서는 삼단논법)과 위상

학적 또는 구조적 연관성을 지니고 있다. 그래서 검증이 가능한 것이다.

이제까지 살펴본 대수학에서의 기호, 해석학에서의 기호 그리고 삼단논법의 타당성을 확인해주는 다이어그램은 수학의 연구에서 수행해야 하는 사고 작용의 다양성을 반영하며, 각각의 분야에서 발견법적 기능 즉, 사고를 인도해주는 길잡이 역할을 한다고 볼 수 있겠다.

결국 기호 매커니즘(semiosis)에 대한 이해는 인식작용(noesis)에 직접 그리고 필요불가결하게 동참한다는 결론에 자연스럽게 이르게 된다.

참 고 문 헌

1. Berkeley A., *The Analyst or a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, Dublin, London, 1734.
2. Cajori F., *A history of Mathematical Notations*, vol.2, Gabay, 1966(1928-29).
3. Carnot L. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Blanchard, 1970.
4. Condillac E.B., *de La langue des calculs, Presse Universitaire de Lille*, 1981(1798).
5. Duval, R., S*émiosis et pensée humaine*, Bern:Lang, 1995.
6. ________, *Quelle Sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?*, Relime, Numéro spécial, 2006, PP. 45-81.
7. Edwards A.W.F., *The story of Venn Diagrams*, Johns Hopkins University press, 2004.
8. IREM, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, 1989.
9. Morris Charles, *Writings on the general theory of signs, Mouton*, 1971.
10. Peraya, D., et Meunier, J.P., *Vers une Sémiotique cognitive*, Cognito, 14, 199, p.1-16.
11. Radford, L., *Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, Educational studies in Mathematics*, 42(3),pp.237-268, 2000.
12. Radford, L. & Puig L., *Syntex and meaning as sensuous, viguak, historical forms of algebraic thinking, Educational studies in mathematics 66*, 2007, p.145-164.

The heuristic function of mathematical signs in learning of mathematical concepts.

Department of french language and literature Duksung Women's University **Kye-Seop Cheong**

Mathematical thinking can be symbolized by the external signs, and these signs determine in reverse the form of mathematical thinking. Each symbol - a symbol in algebra, a symbol in analysis, and a diagram which verifies syllogism - reflects the diverse characteristic of cogitation in mathematics and perfirms a heuristic function.

Key words : sign(symbol), arithmetics, algebra, infinitesimal calculus, syllogism, Venn diagram

2000 Mathematical Subject Classification : 97C50, 97D50

접수일 : 2009년 7월 9일 수정일 : 2009년 8월 24일 게재확정일 : 2009년 8월 25일