韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2009. 11. 제 12권, 제 2호, 117-132

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2009, Vol. 12, No. 2, 117-132

초등학교 6학년의 교과서 비례 문제 해결에 관한 연구

권 미 숙 (희성초등학교)
김 남 균 (청주교육대학교)

2007년도 개정교육과정에서 비례 개념은 이전 교육과정보다 하향조정되어 5학년에 도입된다. 비례 개념이 더 빠른 학년에 도입된다면 학생들이 비례문제를 해결하는 방법은 더 다양하고 비형식적인 전략이 사용될 가능성이 높다. 또한, 학생들이 비례문제에서 보이는 오류의 유형도 다양할 것이다. 따라서, 비례 개념을 더 이른 나이부터 강화하여 지도할 때 학생들의 비형식적 지식과 형식적 접근 사이의 간극을 없애려면 학생들이 비례 문제를 해결할 때 보이는 전략과 오류에 대한 연구가 필요하다. 본 연구에서는 비례 추론에 대한 선행연구들을 검토하여 비례 문제 해결의 전략과 오류를 정리하였다.

I. 서 론

비례와 관련된 개념은 아주 어릴 때에부터 일상생활에서 경험하는 수학적 개념이다. 그러나 실제로 학교에서 지도되는 비례와 관련된 내용은 학생들 뿐 아니라 교사들에게도 어려운 대상이 되고 있다(홍수영, 2006). 비례추론의 발달시기가 구체적 조작기의 말기나 형식적 조작기의 초반이 된다는 피아제 연구를 기반을 하여 비례 개념은 전통적으로 6학년에 도입되어 왔다. 하지만, 2007년 개정된 수학교육과정에서는 비와 비율을 5학년으로 하향 조정하여 비례 개념의 지도시기를 앞당겼다. 또한, 중학교 1학년에서 지도되던 정비례와 반비례가 6학년으로 하향 조정되었다. 2007년도 개정교육과정에서 비례 개념은 강화되었다고 판단할 수 있다.

비례 개념이 더 빠른 학년에 도입된다면 학생들이 비례문제를 해결하는 방법은 더 다양하고 비형식적인 전략이 사용될 가능성이 높다. 또한, 학생들이 비례문제에서 보이는 오류의 유형도 다양할 것이다. 따라서, 비례 개념을 더 이른 나이부터 강화하여 지도할 때 학생들의 비형식적 지식과 형식적 접근 사이의 간극을 없애려면 학생들이 비례 문제를 해결할 때 보이는 전략과 오류에 대한 연구가 필요하다. 본 연구에서는 비례 추론에 대한 선행연구들을 검토하여 비례 문제 해결의 전략과 오류를 정리하였다. 그리고, 제7차 교육과정에 따른 교과서의 비례 문제를 학생들이 어떻게 해결하는지 각 문제 유형에 따른 해결률, 해결 전략, 오류 유형을 분석하여 현장에서 비례문제를 지도할 때 필요한 정보를 제공하고자 한다.

II. 비례 문제 해결에 관한 연구

1. 비례 추론 발달에 관한 연구

학자들의 비례 추론이 발달되는 과정에 대한 연구들을 표로 정리하면 다음과 같다.

* 접수일(2009년 10월 15일), 게재확정일(2009년 10월 29일)
* ZDM분류 : F83
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 비례문제, 비례, 전략, 오류

<표 1> 비례 추론 발달 단계

Quinteo	1단계	비례에서 두 변수를 인식하는 단계	
	2단계	곱셈 관계로 비를 이해하는 단계	
	3단계	정수비 단계	
	4단계	정수비가 아닌 단계	
Case (1998)	0수준	덧셈적인 방법	빵 1개 값은 200원이다. 5개 값은 얼마인가?
	1수준	빵 1개 값×갯수	빵 1개 값은 200원이다. 5개 값은 얼마인가?
	2수준 (a)	빵 1개 값이 정수임 빵 1개 값×갯수	빵 3개 값은 600원이다. 5개 값은 얼마인가?
	2수준 (b)	빵 1개 값이 정수가 아님 빵 1개 값×갯수	빵 1개 값은 200원이다. 5개 값은 얼마인가?
	3수준	비례식으로 해결	빵 3개 값은 200원이다. 5개 값은 얼마인가?
Bexter & Junker (2001)	1단계	질적 추론 단계	
	2단계	양의 초기 시도 단계	
	3단계	곱셈적 관계를 인식하는 단계	
	4단계	공변과 불변의 조화 단계	
	5단계	함수와 스칼라의 관계를 이해하는 단계	
Olof (2003)	1단계	제한된 비의 지식을 나타내며, 비 사이의 덧셈적 차이를 강조하여 해결하는 수준	
	2단계	주어진 비를 더하거나 곱하여 문제를 해결하는 수준/ 정수비가 아닐 경우 해결하지 못함	
	3단계	단위 비율로 나타내거나, 곱셈 전략을 사용하여 해결하고, 비정수비인 곱셈 관계의 문제로 해결하는 수준	
	4단계	곱셈 관계로 비례를 인식하는 수준으로 내비교 관계와 간비교 관계를 이해하고 효과적인 전략이나 접근법을 결정하기 위하여 제시된 문맥상의 구조보다는 문제에 제시된 수적 관계에 더 초점을 두는 수준	
Karen & Lesh (2003)	1단계	문제를 이해하는 단계	
	2단계	문제 상황으로부터 단지 질적 관계를 파악하는 단계 수를 사용하지 않음	
	3단계	덧셈 관계를 추론하는 단계	
	4단계	패턴을 인식하고 반복을 통해 추론하는 단계	
	5단계	둘 이상의 양 사이 관계를 인식하는 단계	

위 <표 1>[1]를 통해 학자들마다 조금씩 다르게 제시한 비례 추론 발달 단계를 종합해 볼 수 있다. 학생들은 초기에 두 양 사이의 관계를 인식하지 못하면서 질적으로 추론하는 단계에 머무르다가 두 양 사이의 관계를 덧셈으로 인식하여 추론하며, 마지막으로 두 양 사이에 존재하는 관계를 곱셈으로 인식하여 추론한다고 할 수 있다. 즉, 비례 추론은 질적 추론에서 덧셈 추론으로, 결국 곱셈 추론으로 발달함을 알 수 있다.

2. 비례 추론 전략에 관한 연구

학생들은 질적 추론부터 덧셈 추론을 거쳐 곱셈 추론 단계로 발달한다. 각각의 추론에 대하여 문제를 해결하는 전략은 아래 표와 같다.

질적 추론 전략은 수적인 양을 사용하지 않고 두 개 이상의 양 사이의 관계에 대해 직관적이고 비형식적인 지식에 기초하여 추론하는 전략이다(Kieren, 1993). 예를 들면 질적 추론 전략을 사용하는 사람들은 어른의 식사량과 아동의 식사량을 비교할 때 식사하는 양을 측정하지 않고 사람의 덩치와 나이를 고려하여 "어른의 식사량이 아동의 식사량보다 많다." 라고 결정한다. 이런 질적 추론은 대체로 어린 학생들에게 나타나는 특징이지만 상위 추론 전략을 사용할 때에 전혀 사용하지 않는 것은 아니다. 질적 추론은 상위 추론 전략을 사용하여 해결 할 수 있는 능력이 있는 사람이라고 해도 문제를 직관적으로 이해하고 해결할 때 꾸준히 사용되는 전략이다.

<표 2> 비례 추론 전략

비례 추론 전략	내용
질적 추론 전략	수적인 양을 사용하지 않고 두 개 이상의 양 사이의 관계에 대해 직관적이고 비형식적인 지식에 기초하여 추론하는 전략
덧셈 추론 전략	두 개 이상의 양 사이의 관계에 대해 수적인 양을 사용하여 추론하는 전략
곱셈 추론 전략	두 개의 비 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 추론하는 전략

덧셈 추론 전략은 질적 추론 전략과는 달리 비례관계에서 수적인 양을 사용한다. 여러 학자들이 덧셈 추론 전략을 building-up 전략으로 표현하고 있다(Behr et al., 1992: Karplus et al., 1983: Resnick & Singer, 1993).

Resnick & Singer(1993)에 따르면 building-up 전략이 비례 문제를 해결할 때 두 비 사이의 곱셈적 관계를 알지 못해도 비례 추론 문제를 성공적으로 해결할 수 있게 하는 방법이기 때문에 전비례적(pre-proportional)이라고 설명한다. 또 학자에 따라서는 building-up 전략을 비례 추론 문제에서 사용하는 의 전략으로 소개하기도 한다(Kaput & West, 1994: 이영숙, 1998에서 재인용).

Kaput & West(이영숙, 1998에서 재인용)의 의 전략은 세 가지 범주로 구분되어 있으며 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

1) 이영숙, 홍수영 연구에서 비례추론 발달에 관한 내용을 재인용하여 표로 요약한 것임

<표 3> Kaput & West의 전략

문제	조지아, 타마라, 프랜이 하이킹을 계획하고 있다. 그들은 3시간에 9km 정도 갈 것이라고 예상하고 있다. 같은 속력으로 간다면 33km는 얼마나 걸리겠는가?							
수준	내용	문제 해결 방법						
1단계	통합된 building-up 전략 주어진 문제가 해결될 때까지 계속해서 더해가는 방법	시간	3	6	9	2	(9+2=11)	11
		거리	9	18	27	6	(27+6=33)	33
2단계	곱셈과 나눗셈을 결합한 간결한 building-up 전략	시간	3	9	1	2	(9+2=11)	11
		거리	9	27	3	6	(27+6=33)	33
3단계	한단위 전략(Single unit)	한시간 기준	한 시간에 가는 거리:1×3=3km 11시간에 가는 거리:11×3=33km					
		1km 기준	1km 가는데 걸리는 시간: $3 \div 9 = \frac{1}{3}$ 33km를 가는데 걸리는 시간: $33 \times \frac{1}{3}$ =11시간					

곱셈 추론 전략은 두 개의 비 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 추론하는 것이다. 이는 곧 비례 추론이라고 할 수 있다. 사실 대부분의 비례 추론 문제는 덧셈 추론의 building-up 전략을 사용하면 성공적으로 해결된다. 그러나 더 복잡한 문제를 해결하기 위해서는 두 비의 곱셈적 관계를 이해하는 것이 필수적이다.

곱셈적 관계를 추론하는 영역은 내비교 전략과 간비교 전략이다(Karplus et al., 1983; Heinz, 2000; Olof, 2003). 내비교 전략은 한 집합 안에 있는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 다른 집합에 적용하는 것이고 간비교 전략은 두 집합의 동일한 부분 요소 중 하나의 부분 요소에 존재하는 곱셈적 관계를 다른 부분 요소에 적용하려는 것을 말한다(Heinz, 2000).

위의 선행연구에서의 비례 추론을 할 때 사용하는 전략을 정리하면 다음과 같다.

<표 4> 비례 추론 전략 유형

비례 추론 전략	내용
질적 추론 전략	질적 추론 전략
덧셈 추론 전략	통합된 building-up 전략 곱셈과 나눗셈을 결합한 간결한 building-up 전략 한단위 전략(Single unit)
곱셈 추론 전략	내비교 전략 간비교 전략

다. 비례 추론에 영향을 주는 요인

비례 추론에 영향을 주는 요인을 선행연구에서 찾아보면 다음과 같다. 먼저 학생들의 비례 추론에 영향을 준다고 꾸준히 확인되어 오고 있는 요소는 제시된 문제의 문맥 구조이다.

여기에서의 문맥 구조는 문장제 문제에서 기술된 상황을 의미한다. Kaput & West(1994)의 연구에서는 학생의 비례 추론에 영향을 주는 문맥 구조로 혼합문제, '모두' 또는 '각각은' 이라는 말을 사용한 문제, 비와의 친밀감으로 제시하고 있다. 또 Tourniaire & Pulos(1985)의 연구에서도 혼합문제가 비례 추론에 영향을 준다고 하였으며, Graeber(1993), Saunders & Jesunathadas(1988)의 연구에서도 문맥이 친숙한 상황일 경우 더욱 높은 성취감을 보이는 것을 확인하였다.

학생들의 비례 추론에 영향을 미치는 두 번째 요소는 수적 구조이다.

Abramowitz는 학생들의 비례 추론에 영향을 주는 수의 구조를 세 가지로 규정하여 설명하고 있다. 첫째, 수의 차가 같은지, 다른지에 따라 비례 추론에 영향을 받는다. 예를 들어, $\frac{2}{4}=\frac{4}{x}$ 라는 비례식에서 수의 차가 같다는 말은 내비교의 두 수 2와 4의 차가 2라는 것과 간비교의 두 수 2와 4의 차가 2라는 것이 같다는 것이다. 또한 $\frac{2}{4}=\frac{5}{x}$라는 비례식에서 수의 차가 다르다는 말은 비교의 두 수 2와 4의 차가 2라는 것과 간비교의 두 수 4와 5의 차가 1라는 것이 서로 다르다는 것이다. 학생들은 수의 차가 다를 때보다 수의 차가 같을 때에 곱셈적 추론을 하기 보다는 덧셈적 추론에 익숙한 경향이 있다. 둘째, 미지수의 크기에 따라 비례 추론을 할 때 영향을 받는다. 미지수가 조건으로 주어진 수보다 작을 때 어려워하는 경향이 있다. 셋째, 정수비의 존재 여부에 따라 비례 추론을 할 때 영향을 받는다. 학생들은 내비교와 간비교 사이의 관계가 정수비인 경우는 60%의 문제해결을 보인 반면 내비교와 간비교 사이의 관계가 정수비가 아닌 경우 20%의 문제 해결을 보였다. 즉, 학생들은 내비교와 간비교 사이의 관계가 비정수비인 경우 어려워하는 경향이 있음을 알 수 있다.

학생들이 비례 추론 문제를 해결할 때 영향을 받는

마지막 요소는 양이다. 양에는 이산량과 연속량이 있는데 이산량은 측정할 때 자연수와 대응되는 양을 말하는 것이고, 연속량은 측정할 때 실수와 대응되는 양을 말한다. Tourniaire & Pulos(1985)의 연구에서 살펴보면 학생들은 연속량을 더 어려워하는 경향이 있는데 이는 이산량이 쉽게 시각화할 수 있는 반면 연속량은 더 복잡하고 어렵기 때문이다.

즉, 학생들은 혼합문제, 친숙하지 않는 문제, 내비교와 간비교의 수의 차가 같은 문제, 미지수가 조건으로 주어진 수보다 작은 문제, 내비교와 간비교 사이의 관계가 비정수비인 문제, 연속량으로 구성된 문제 등에서 비례 추론을 할 때 어려움을 많이 겪는 것으로 나타난다.

그러나 이런 요소들이 학생들의 비례 추론에 영향을 주는 것으로 연구되었지만 모든 학생들에게 일반적인 것은 아니며 이런 요소들이 모든 학생들에게 동일하게 영향을 주는 것도 아니다(Tourniaire & Pulos, 1985). 따라서 이런 비례 추론에 영향을 주는 요인들은 비례 추론을 발달시켜 주는데 유용하게 사용되는 하나의 준거로서 적용되어야 할 것이다.

라. 비례 추론 문제에 대한 오류

비례 추론 관련 문제에서 나타나는 오류 유형들은 다음과 같다.

<표 6> 비례 추론 영역에서 나타나는 오류 유형

연구자	오류분류	오류유형	
Tourniaire & Pulos (1985)	비례 추론 문제에서 나타나는 오류 패턴	중요한 자료 무시	
		불변하는 차이 이용	
		덧셈 전략	
		곱셈 비교	
이영숙 (1998)	미지값 영역의 문제를 다양한 상황으로 제시하였을 때 나타나는 오류	자료의 양 차이에 대한 잘못된 계산 오류	주어진 문제에서 대응되는 변수의 양 차이를 가지고 계산하여 발생하는 오류
		기술적 오류	문제를 해결하는 과정에서 계산을 잘못하여 발생하는 오류
		문제 파악이 부족하여 발생하는 오류	주어진 문제에서 요구하는 것이 무엇인지 확인하지 않아 발생하는 경우와 주어진 문제를 잘못 읽거나 추측하는 경우에 발생하는 오류
		잘못 사용된 원리나 법칙	주어진 문제에 다른 원리나 법칙을 적용하거나 잘못 알고 있는 경우에 발생하는 오류
		애매한 오류	학생들에 의해 수행된 과정은 옳지만 문제에 대한 해가 아닐 경우와 해석 불가능한 해를 포함하는 오류

앞의 연구에서 Tourniaire & Pulos(1985)의 '중요한 자료를 무시하는 오류'와 '불변하는 차이를 이용하는 오류'는 이영숙(1998)의 연구에서 '문제 파악이 부족하여 발생하는 오류'와 유사하며, '덧셈 전략'을 사용하는 오류는 '자료의 양 차이에 대한 잘못된 계산 오류'와 비슷하며 이를 종합하면 '잘못된 덧셈 추론 오류'라고 할 수 있다. 또한, Tourniaire & Pulos의 '곱셈 비교' 오류는 '잘못된 곱셈 추론 오류'라고 정리된다. 이들 연구의 오류를 정돈하면, 잘못된 덧셈 추론 오류, 잘못된 곱셈 추론 오류, 기술적 오류, 문제에 대한 이해 부족으로 인한 오류, 애매한 오류로 나누어진다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 두 지역에 있는 초등학교 6학년 227명이다. 두 곳의 6학년 학생 모두 비와 비율 및 비례식 단원을 학습하였다. 두 학교 모두 시지역의 아파트 단지에 위치하고 있다. 조사 대상이 200명을 넘어 일반화가 가능하지만, 일반화할 수 있는 모집단의 범위는 본 연구에서와 같이 시지역의 아파트 단지 또는 중수준의 사회경제적 환경에 있는 학생들이 적절할 것이다.

<표 7> 연구 대상

학교	반	인원수
경기도 안양 소재 H 초등학교	A반	34명
	B반	33명
	C반	31명
충북 청주 소재 G 초등학교	D반	34명
	E반	30명
	F반	33명
	G반	32명
계	7반	227명

2. 교과서의 비례 문제 검사지 반응 분석

교과서의 비례 문제 검사지 각각의 문제별로 반응수(정답, 오답, 무반응)를 조사하였고, 문제를 해결하기 위해 사용한 전략 유형과 오류 유형을 분석하였다.

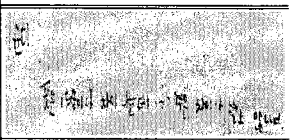
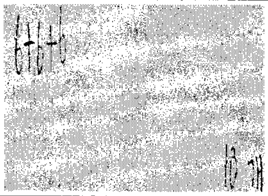
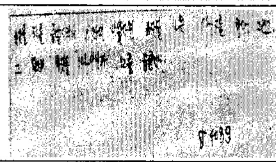
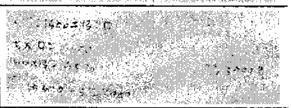
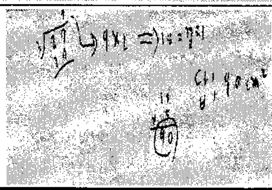
6학년 학생들이 교과서의 비례 문제 검사지를 해결하기 위해 사용하는 전략 유형과 오류 유형을 선행연

구를 참고하여 다음과 같이 분류하였다.

가. 전략 유형 분석 방법

전략 유형은 학생들이 교과서의 비례 문제를 어떻게 해결하는지를 분류하고, 사고과정을 확인하기 위한 것으로 이러한 전략 유형을 통하여 비례 추론 발달 수준을 확인할 수 있다.

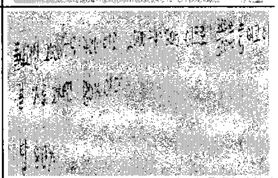
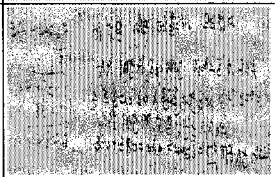
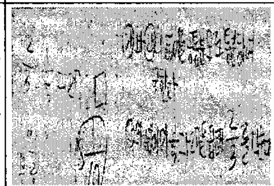
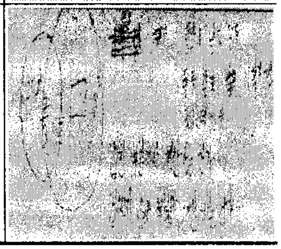
<표 8> 전략 분석 유형

전략 유형	설 명	반응예
질적 추론 전략	수적인 양을 사용하지 않고 두 개 이상의 양 사이의 관계에 대해 직관적이고 비형식적인 지식에 기초하여 추론하는 전략	
덧셈 추론 전략	두 개 이상의 양 사이의 관계에 대해 수적인 양을 사용하여 추론하는 전략으로 덧셈을 사용하거나 문제의 답이 나올 때까지 주어진 수를 규칙적으로 반복하여 해결(building-up)하는 경우	
한 단위 전략	덧셈 추론 전략 중 두 개의 양 사이의 관계에 대해 구하고자 하는 것의 1개 값을 찾고 이를 이용하여 곱셈으로 구하는 경우	
비례식 전략	두 개의 양 사이의 관계에 대해 비례식을 세우고 간비교 또는 내비교를 이용하여 문제를 해결하는 경우	
곱셈 추론 전략	두 개의 비 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 추론하는 전략으로 형식적인 비례식을 세우지 않고도 두 개의 비 사이에 존재하는 관계를 곱셈으로 추론하는 경우	

나. 오류 유형 분석 방법

오류 유형은 학생들이 교과서의 비례 문제 검사지를 해결할 때 범하는 오류를 분류한 것으로 이러한 오류 유형을 통하여 비례 추론 영역의 문제에서 발생하는 오류의 원인을 파악할 수 있다.

<표 9> 비례 문제의 오류 유형

오류 유형	설 명	반응예
잘못된 덧셈 추론	문제에서 주어진 두 개의 양 사이에 존재하는 관계를 인식하지 못하고, 대응되는 변수의 양을 더하거나 빼서 발생하는 오류	
잘못된 곱셈 추론	문제에서 주어진 두 개의 양 사이에 존재하는 관계를 인식하지 못하고, 묻는 것을 구하기 위해 문제에 제시된 수를 단순히 곱셈으로 계산하여 발생하는 오류	
기술적 오류	문제 해결과정에서 범하는 계산 오류와 계산 과정이 복잡해 중도에 포기하여 발생하는 오류	
문제에 대한 이해 부족으로 인한 오류	주어진 문제에서 묻는 것을 정확하게 확인하지 못하고 주어진 자료를 잘못 파악하여 발생하는 오류	
애매한 오류	해석 불가능한 해를 포함하는 경우로 문제 풀이 과정이 분명하지 않아 식별하기 어려운 경우, 또는 풀이 과정에서 학생들의 정확한 사고과정을 파악하기 어려운 경우에 발생하는 오류	

위의 전략 유형과 오류 유형을 통하여 교과서의 비례 문제의 해결 실태를 분석하였다.

IV. 교과서의 비례 문제 해결 실태 분석

6학년 학생들의 교과서의 비례 문제 해결 실태를 알아보기 위해 투입한 검사지의 결과는 다음과 같다.

<표 10> 교과서의 비례 문제 반응수

문제	문제 유형	정답 (%)	오답 (%)	무반응 (%)	계
1	비쓰기	162 (71.4)	57 (25.1)	8 (3.5)	227
2	비례식 문장제	203 (89.4)	22 (9.7)	2 (0.9)	227
3	비례식 문장제	166 (73.1)	56 (24.7)	5 (2.2)	227
4	비례식 동치	175 (77.1)	48 (21.2)	4 (1.8)	227
5	비례식자연수비전환	156 (68.7)	42 (18.5)	29 (12.8)	227
6	비례식 동치	94 (41.4)	117 (51.5)	16 (7.0)	227
7	단가비교후 %문장제	57 (25.1)	162 (71.4)	8 (3.5)	227
8	비례식 문장제	188 (82.8)	26 (11.5)	13 (5.7)	227
9	비례식 문장제	175 (76.3)	28 (12.2)	24 (11.5)	227
10	%구하기	103 (45.4)	114 (50.2)	10 (4.4)	227
11	대응표보고 관계설명	193 (85.0)	22 (9.7)	12 (5.3)	227
12	두개의단가 비교	122 (53.7)	85 (37.5)	20 (8.8)	227
13	단위L당 소금양	152 (67.0)	64 (28.2)	11 (4.8)	227
14	시간단거리 비교	163 (71.8)	45 (19.8)	19 (8.4)	227
15	물건의할인율 이용	115 (50.7)	96 (42.3)	16 (7.0)	227
16	원의넓이 비교	78 (34.4)	136 (59.9)	13 (5.7)	227
17	물건생산비 이용	73 (32.2)	147 (64.8)	7 (3.1)	227

※ 문제 1, 5, 6번은 소문제 4개 중 3문제 이상 맞추었을 때 정답으로 인정했다.

교과서의 비례 추론 검사지의 반응수를 살펴보면, 정답률이 높은 문제(정답률 80% 이상)는 2, 8, 11번이고, 정답률이 낮은 문제(정답률 50% 이하)는 6, 7, 10, 16, 17번이었다. 정답률이 높은 문제들은 대체로 비례식을 손쉽게 세울 수 있으며, 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단한 문제였다. 또한, 문제 11번과 같이 두 수의 간단한 관계를 파악하는 문제도 정답률이 높았다. 반면 정답률이 낮은 문제들은 문제 7, 10번과 같이 백분율을 이용한 문제이거나, 문제 16번, 17번과 같이 문제에서 비 관계가 명확하게 나타나지 않고, 이해하기에 복잡한 문제였다. 즉, 학생들은 문제가 비례식으로 풀 수 있도록 진술되어 있고, 두 비가 간단한 정수비 관계일 때 정답률이 높았으며, 문제에서 비례식이 명확하게 드러나지 않고, 두 비가 정수비 관계가 아닐 때 정답률이 낮은 것을 알 수 있다.

가. 교과서의 비례 문제 해결의 전략과 오류 유형 분석

교과서의 비례 문제를 해결하는 전략과 오류 유형은 본 연구의 검사지 문항 17개 중 학생들의 비례식을 세워 해결해야하는 서술형 문항인 <문제 2>, <문제 3>, <문제 8>, <문제 9>, <문제 11>, <문제 13>, <문제 14>, <문제 15>, <문제 16>, <문제 17> 의 10 문제를 분석하여 살펴보았다.

1) 전형적인 비례식 문장제의 전략과 오류

가) $a:b=c:x$에서 a와 c가 배수인 경우

<문제 2>는 미지값의 위치가 $a:b=c:x$인 전형적인 비례식 문장제로 비가 3, 6, 9의 배수로 쉽게 계산되는 문제이다. <문제 2>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 203명의 문제풀이 과정을 통해 이루어졌다. 비례식을 세우고 이를 이용하여 문제를 해결한 경우 비례식 전략으로, 비례식이 세워지지 않고 머릿속으로 관계를 추론하여 문제를 해결한 경우 곱셈 추론 전략으로 구분하였다.

<표 11> 비례 문제 2의 전략 유형

문제	비례식 전략 (%)	곱셈 추론 전략 (%)	한단위 전략 (%)	덧셈 추론 전략 (%)	계
2	104 (51.3)	67 (33.0)	28 (13.8)	4 (1.9)	203

이 문제에 대하여 절반이상의 학생이 비례식 전략을 사용하였다. $3:6=9:\square$의 비례식을 세우고 $3\times3=9$, $6\times3=\square$로 문제를 해결하는 간비교의 방법을 활용하는 경우가 많았다. 내비교의 방법 $6\times9\div3=\square$로 문제를 해결하는 학생도 몇몇 있었다.

두 번째로 많이 사용한 전략인 곱셈 추론 전략은 위의 간비교의 방법을 비례식 없이 지필 또는 암산으로 계산하여 문제를 해결하였다.

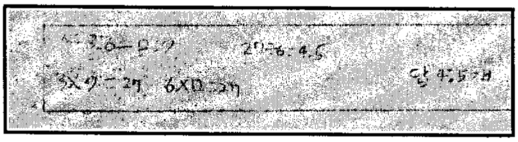
세 번째로 많이 사용한 전략인 한 단위 전략은 13.8%로 빵 1개를 만드는데 필요한 달걀의 개수 2개를 찾고, 빵 9개를 만드는데 필요한 달걀의 수 $2\times9=18$를 구하였다. 넷째, 덧셈 추론 전략은 빵 3개를 만드는데 필요한 달걀이 6개이므로, 빵 6개를 만드는데 달걀 12개, 빵 9개를 만드는데 달걀 18개, 즉 $6+6+6=18$의 방법으로 해결한 경우이며, 소수의 학생들이 이 방법으로 문제를 해결하였다.

<문제 2>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 22명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 2>에서 학생들이 범한 오류는 잘못된 곱셈 오류 54.6%와 애매한 오류 40.9%로 나타났다.

<표 12> 비례 문제 2의 오류 유형

문 제	기술적 오류 (%)	잘못된 곱셈추론 (%)	애매한 오류 (%)	계
문제 2	12 (54.6)	9 (40.9)	1 (4.5)	22

<문제 2>에서 오류를 보이는 학생은 많지 않았다. 내비교의 방법을 계산하면서 생긴 기술적 오류가 많았고, 아래의 <그림 1>처럼 잘못된 비례식으로 인한 오류, 문제지를 작성하지 않았거나 단순히 오답만 기록한 애매한 오류가 있었다.



<그림 1> 비례 문제 2의 잘못된 곱셈추론

나) $a:b=c:x$에서 a와 c가 배수가 아닌 경우

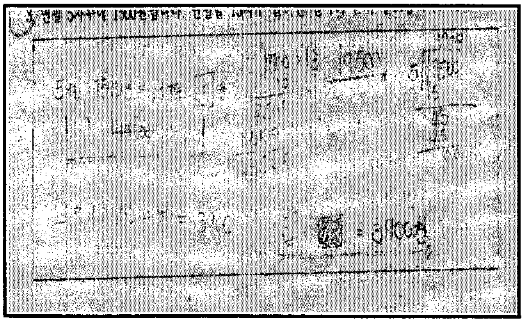
<문제 3>은 미지값의 위치가 $a:b=c:x$인 문제로 내비교와 간비교 모두 정수비 관계가 아니다. <문제 3>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 166명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 13> 비례 문제 3의 전략 유형

문 제	한단위 전략 (%)	비례식 전략 (%)	곱셈추론전략 (%)	계
3	138 (83.1)	24 (14.5)	4 (2.4)	166

<문제 3>에서 가장 많이 사용한 전략은 83.1%로 한 단위 전략이다. <문제 3>은 내비교와 간비교 모두 정수비 관계가 아니므로 대부분의 학생들은 연필 5자루에 1500원이므로 연필 1자루에 300원, $300\times13=3900$ 원으로 문제를 해결하는 한 단위 전략을 사용하였다.

두 번째로 많이 사용한 전략인 비례식 전략은 <그림 2>와 같이 $5:1500=13:\square$의 비례식을 이용하여 $1500\times13\div5=\square$을 계산하여 문제를 해결하였다.



<그림 2> 비례 문제 3의 비례식 전략

마지막으로 곱셈 추론 전략은 연필 5자루의 2배인 10자루의 값을 구하고, 3자루의 값을 추가로 더하는 등의 문제를 재구성하여 해결하는 방법이다.

<문제 3>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 56명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 14> 비례 문제 3의 오류 유형

문 제	기술적 오류 (%)	잘못된 곱셈 추론 (%)	애매한 오류 (%)	계
3	37 (66.0)	11 (19.2)	8 (14.3)	56

<문제 3>에서 학생들이 범한 오류는 기술적 오류 66%, 잘못된 곱셈 추론 19.2%, 애매한 오류 14.3%로 나타났다. 비례식을 이용하여 문제를 해결할 때 생기

는 기술적 오류가 가장 빈도가 높았고, 비례식을 잘못 세웠거나 문제를 해결하지 않는 등의 오류도 24명이나 되었다.

2) 문제에서 비를 제시하고 주어진 비를 이용하여 해결하는 문제의 전략과 오류

가) 비에 1이 포함된 경우

<문제 8>은 주어진 비가 5:1로 1이라는 단위 비율이 있는 반면, <문제 9>는 주어진 비가 3:2이므로 한 단위 전략을 사용하기 위해서는 조금 더 생각해야 하는 차이점이 있다. 때문에 <문제 8>의 정답률이 <문제 9>에 비해 조금 더 높았다. 또한, 무반응의 학생들 중 문제를 이해하지 못하고 해결하지 못한 경우도 있었지만, 문제를 풀기가 귀찮아서 해결하지 않은 학생도 있었다.

<문제 8>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 188명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 8>에서 가장 많이 사용한 전략은 67.0%로 비례식 전략이고, 다음으로 많이 사용한 전략은 33.0%로 곱셈추론 전략이었다.

<표 15> 비례 문제 8의 전략 유형

문 제	비례식 전략 (%)	곱셈추론전략 (%)	계
8	126 (67.0)	62 (33.0)	188

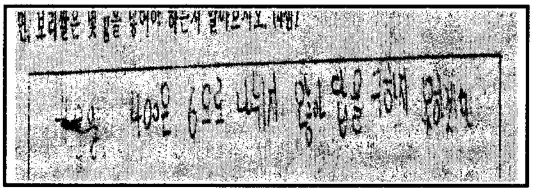
<문제 8>에서 비례식 전략이 가장 높았는데 그 이유 중 하나는 비가 5:1로 주어져 있고, 문제의 빈칸에 계산 과정을 적어야 하는 의무감에 비례식을 세운 학생들이 있기 때문이다. 또한 5:1이라는 단위 비율 1이 제시 되어 있고, 비가 간비교와 내비교 모두 정수비 관계이기 때문에 쉽게 암산으로도 계산할 수 있는 문제였다.

<문제 8>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 26명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 16> 비례 문제 8의 오류 유형

문 제	잘못된 곱셈추론 (%)	기술적 오류 (%)	애매한 오류 (%)	계
8	12 (46.2)	2 (7.7)	12 (46.1)	26

<문제 8>에서 학생들이 범한 오류는 잘못된 곱셈추론 46.2%, 기술적 오류 7.7%, 애매한 오류 46.1%로 나타났다. 비례식을 세울 때 기준량과 비교량을 잘못 두어 오류가 생긴 경우가 제일 많았고, 기술적 오류는 쉬운 계산으로 많지 않았다.



<그림 3> 비례 문제 8의 잘못된 곱셈 추론

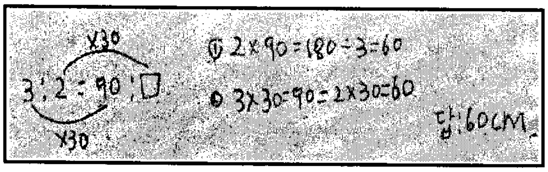
나) 비에 1이 포함되지 않은 경우

<문제 9>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지 중에서 정답인 175명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 9>에서 가장 많이 사용한 전략은 67.0%로 비례식 전략이고, 다음으로 많이 사용한 전략은 33.0%로 곱셈추론 전략이었다.

<표 17> 비례 문제 9의 전략 유형

문 제	비례식 전략 (%)	곱셈추론전략 (%)	계
9	143 (81.7)	32 (18.3)	175

<문제 9>에서 주어진 비는 3:2로 위의 <문제 8>처럼 단위 비율이 나와 있지 않다. 때문에 비례식 전략으로 사용한 학생이 <문제 8>에 비해 다소 높은 것을 알 수 있었다.



<그림 4> 교과서의 비례 문제 9의 비례식 전략

또, 3:2=90:□으로 내비교와 간비교 모두 정수비이므로 계산은 어렵지 않게 할 수 있고, 비례식 없이 암산으로 문제를 해결한 경우도 18.3%나 되었다.

<문제 9>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 52명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 18> 비례 문제 9의 오류 유형

문 제	잘못된 곱셈추론 (%)	기술적 오류 (%)	애매한 오류 (%)	계
9	23 (82.1)	3 (10.7)	2 (7.2)	28

<문제 8>에서 학생들이 범한 오류는 잘못된 곱셈 추론 82.1로 가장 많았다. <문제 8>과 마찬가지로 비례식을 세울 때 기준량과 비교량을 잘못 두어 오류가 생긴 경우가 제일 많았고, 기술적 오류는 쉬운 계산이므로 많지 않았다.

3) 두 비 중에서 비의 값을 비교하는 문제의 전략과 오류

<문제 12>은 A와 B의 비의 값을 비교하는 문제로 6000:35, 7000:50중 더 낮은 비의 값을 찾아내야 한다. 가격의 차이에 비해 장미꽃 송이의 차이를 더 크게 둠으로서 비의 값을 구하지 않아도 직관적으로 문제를 해결할 수 있도록 문제를 구성하였다.

<문제 12>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 122명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 19> 비례 문제 11의 전략 유형

문 제	한단위 전략 (%)	질적 추론 (%)	비례식 추론 (%)	계
12	65 (53.3)	38 (31.1)	19 (15.6)	122

<문제 12>는 비의 값을 이용하여 문제를 해결하는 문제로 학생들은 장미 1송이 또는 장미 5송이의 가격을 구하여 가격이 더 저렴한 가게를 구하는 한 단위 전략을 가장 많이 사용하였다.

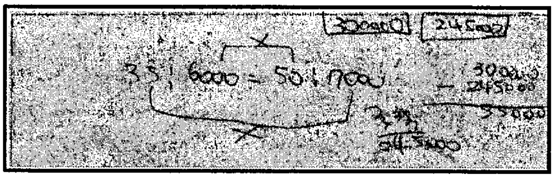
두 번째로 많이 사용한 전략은 질적 추론 전략으로 비의 값을 구하지 않고도 장미꽃의 양과 가격을 서로 비교하여 장미꽃이 15송이 차이 날 때, 1000원의 가격차를 생각하여 직관적으로 B꽃집이 더 저렴함을 찾아낼 수 있다. 그러나 사고 과정을 통해 문제를 해결했다면 곱셈 추론으로 생각하는 것이 맞을 것이나 사고 과정을 파악하기 어려운 경우 단순히 A꽃집, 또는 B꽃집 등으로 답을 표시한 경우도 있기 때문에 질적 추론으로 분류하였다.

마지막으로 비례식 추론 전략은 문제에 제시된 수를 비례식 35:6000=50:7000으로 표현하여 문제를 해결한 방법으로 옳은 비례식은 아니지만 문제를 해결하기 위한 도구로 이용하였다.

<표 20> 비례 문제 12의 오류 유형

문 제	이해 부족 (%)	기술적 오류 (%)	잘못된 곱셈추론 (%)	애매한 오류 (%)	계
12	56 (65.9)	22 (25.9)	2 (2.4)	5 (5.8)	85

<문제 12>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 85명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 12>에서 학생들이 범한 오류는 이해부족으로 인한 오류 65.9%, 기술적 오류 25.9%, 잘못된 곱셈 추론 2.4%, 애매한 오류 5.8%로 나타났다. 문제를 이해하지 못하고 비례식으로 접근하려다 내비교, 간비교 모두 옳지 않기 때문에 어려움을 겪은 흔적이 엿보이고, 주어진 값을 빼거나 곱하는 등의 불필요한 계산으로 문제를 해결하지 못한 학생들이 매우 많았다.



<그림 5> 비례 문제 12의 이해 부족 오류

또, 문제는 정확히 이해했으나 한 단위 전략을 사용하기 위한 계산에 오류가 생긴 학생들도 있었고, 곱셈 추론으로 접근하기 위해 장미꽃 송이 수와 꽃의 가격을 비교하려고 시도하였으나 추론과정에 오류가 생긴 학생도 찾을 수 있었다.

4) 농도와 속도 문제의 전략과 오류

일반적으로 농도와 속도의 상황은 비례문제에서 많이 활용되며, 학생들이 어려워하는 것으로 알려져 있다. 이 두 문제에 대하여 학생들은 어떤 전략을 사용하며 어떤 오류를 보일까?

가) 농도 문제(정수비가 아닌 경우)

<문제 13>은 $a:b=c:x$의 비례식 문제로 쉽게 비례식을 세울 수 있도록 문제가 제시되어 있으며, 내비교, 간비교 모두 정수비가 아니므로 암산으로 할 수 있는 계산은 아니다.

<문제 13>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 152명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 21> 비례 문제 13의 전략 유형

문제	한단위 전략 (%)	비례식 전략 (%)	곱셈추론 (%)	계
13	90 (59.2)	54 (35.5)	8 (5.3)	152

<문제 13>에서 가장 많이 사용한 전략은 59.2%로 한 단위 전략이었다. <문제 13>은 내비교와 간비교 모두 정수비 관계가 아니므로, 비례식을 세워 문제를 해결하기 위해서는 계산이 다소 복잡하고 귀찮다. 따라서 '바닷물 5L를 증발시켜 170g의 소금을 얻는다'에서 바닷물 1L를 증발시켜 얻을 수 있는 소금의 양을 구하여 문제를 해결하는 한단위 전략을 사용하는 전략이 더 많았다.

두 번째로 많이 사용한 전략은 35.5%로 비례식 전략이었으며, 곱셈 추론 전략은 5.3%로 나타났다.

<문제 13>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지 중에서 오답인 64명의 문제풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 13>에서 학생들이 범한 오류는 기술적 오류가 65.%로 가장 높았으며, 이해부족으로 인한 오류 12.4%, 잘못된 곱셈 추론 11%, 애매한 오류 11%로 나타났다.

<표 22> 비례 문제 13의 오류 유형

문제	기술적 오류 (%)	이해 부족 (%)	잘못된 곱셈추론 (%)	애매한 오류 (%)	계
13	42 (65.6)	8 (12.4)	7 (11.0)	7 (11.0)	64

<문제 13>을 비례식 전략으로 해결하기 위해서는 170×12를 계산 한 후 이를 다시 ÷5로 계산하여야 한다. 이 때, 곱셈과 나눗셈에서 기술적 오류를 보인 학생들이 많았다.

나) 속도문제(정수비인 경우)

<문제 14> 역시 $a:b=c:x$의 비례식 문제로, 내비교, 간비교 모두 정수비 관계로 13번보다 계산이 다소 간단했다. <문제 14>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 163명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 23> 비례 문제 14의 전략 유형

문제	비례식 전략 (%)	한단위 전략 (%)	곱셈추론 (%)	계
14	84 (51.5)	56 (34.4)	23 (14.1)	163

<문제 14>는 <문제 13>과 달리 비례식 전략이 가장 높게 나왔다. 그 이유는 <문제 14>는 내비교, 간비교 모두 정수비로 계산이 간단하기 때문에 비례식 전략을 사용해도 계산상의 오류가 없기 때문이다. 또, <문제 13>보다 곱셈 추론 전략의 비율을 더 많이 사용하여 문제를 해결하였다.

<문제 14>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지 중에서 오답인 45명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 14>에서 학생들이 범한 오류는 애매한 오류가 31.1%로 가장 높았으며, 기술적 오류 28.9%, 이해부족으로 인한 오류 28.9%, 잘못된 곱셈 추론 11.1%로 비슷비슷하게 나타났다.

<표 24> 비례 문제 14의 오류 유형

문 제	애매한 오류 (%)	기술적 오류 (%)	이해 부족 (%)	잘못된 곱셈추론 (%)	계
14	14 (31.1)	13 (28.9)	13 (28.9)	5 (11.1)	45

<문제 13>과 <문제 14>를 살펴보면 문제에서 비례식을 세워서 풀 수 있도록 힌트가 주어져 있을 때 손쉽고 정확하게 비례식을 세워 문제를 해결할 수 있으나 내비교, 간비교 관계가 정수비인지 아닌지에 따라 정답률의 차이가 있음을 알 수 있었다.

5) 백분율 문제의 전략과 오류

<문제 15>는 시장과 백화점에서 주어진 가격과 할인율을 이용하여 물건을 더 싸게 살 수 있는 곳을 찾아내야 하는 문제로, 백분율을 구하는 식을 이용하여 해결하거나(곱셈추론) 비례식을 이용하여 해결할 수 있다.

<문제 15>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 115명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 25> 비례 문제 15의 전략 유형

문 제	곱셈추론 (%)	계
12	115 (100)	115

<문제 15>에서 가장 많이 사용한 전략은 모두 곱셈추론으로 파악되었다. <문제 15>는 '시장(정가: 25000원, 할인율 10%)과 백화점(정가: 35000, 할인율 30%) 중 어느 곳이 더 저렴한가'를 묻는 문제로 학생들 모두 시장에서 할인한 금액과 백화점에서 할인한 금액을 구하여 서로의 가격을 비교하는 방법으로 문제를 해결하였다. 물론, 이 과정에서 할인율이 제시된 물건의 가격을 구하는 방법을 기억하여 시장: $25000-(25000\times\frac{1}{10})$, 백화점 : $35000-(35000\times\frac{3}{10})$등으로 해결한 학생도 있었으나 식으로 정리를 하기 위한 방법으로 기록한 학생도 있을 것이므로 모두 곱셈 추론으로 간주하였다.

<문제 15>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 96명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 26> 비례 문제 15의 오류 유형

문 제	애매한오류 (%)	기술적오류 (%)	이해부족 (%)	계
15	38 (39.6)	36 (37.5)	22 (22.9)	96

<문제 15>에서 학생들이 범한 오류는 애매한 오류 39.6%, 기술적 오류 37.5%, 이해부족으로 인한 오류 22.9%로 나타났다.

할인율을 이용하여 각각의 할인된 가격을 구하고자 하였으나 방법을 모르고, 할인율의 뜻을 이해하지 못하여 문제를 해결하지 못하는 등의 오류가 나타났다.

6) 비관계가 명확하지 않은 문제의 전략과 오류

가) 다른 영역과 결합된 문제의 경우

<문제 16>은 겹쳐진 원의 넓이를 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{5}$로 제시하여 원의 넓이를 비례적 관계를 이용하여 구하도록 하는 문제이다. 다소 문제가 복잡하므로 문제를 이해하는데 고민이 필요하다.

<문제 16>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 78명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 16>에서 가장 많이 사용한 전략은 79.5%로 곱셈 추론 전략이고, 두 번째로 많이 사용한 전략은 비례식 전략으로 20.5%이다.

<표 27> 비례 문제 16의 전략 유형

문 제	곱셈추론전략 (%)	비례식 전략 (%)	계
16	62 (79.5)	16 (20.5)	78

<문제 16>은 원 ㉮의 넓이와 원 ㉯의 넓이를 겹쳐진 부분의 관계를 이용하여 문제를 해결해야 한다. 겹쳐진 부분이 원 ㉮의 $\frac{2}{3}$, 원 ㉯의 $\frac{1}{5}$이고, 원 ㉮의 넓이가 27cm²이므로 겹쳐진 부분은 $27\times\frac{2}{3}=18\text{cm}^2$이고, 이를 이용하여 원 ㉯의 넓이 $18\times5=90\text{cm}^2$를 찾아낸 학생들이 제일 많았다. 또, 비례식 전략을 이용하여 $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}=27:\square$로 식을 세우고, 문제를 해결한 학생도 20.5%가 있었다.

<문제 16>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 136명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 28> 비례 문제 16의 오류 유형

문 제	이해 부족 (%)	애매한오류 (%)	기술적오류 (%)	계
16	98 (72.1)	26 (19.1)	12 (8.8)	136

<문제 16>에서 학생들이 범한 오류는 이해부족으로 인한 오류 72.1%, 애매한 오류 19.1%, 기술적 오류 8.8%로 나타났다. 문제를 이해하지 못하고, 푸는 방법을 알았는데 잊었다는 등의 계산 방법에 의존하는 모습을 보이는 학생들이 많았다. 또한, 문제를 풀기 위해 비례식도 세워보고, 원 ㉮의 넓이와 원 ㉯의 넓이를 구하려고 노력하였으나 실패한 학생들도 있었다.

나) 복잡한 문제의 경우

<문제 17>은 제시된 문제 중 가장 복잡해 보이나 조금만 깊이 생각해보면 간단히 비례식 등으로 문제를 해결할 수 있다.

<문제 17>에서 학생들이 사용한 전략에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 정답인 73명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다. <문제 17>에서 가장 많이 사용한 전략은 곱셈추론 전략으로 63.0%이며, 덧셈추론 전략 20.5%, 비례식 전략 16.4% 순으로 나타났다.

<표 29> 비례 문제 17의 전략 유형

문 제	곱셈추론전략 (%)	덧셈추론전략 (%)	비례식 전략 (%)	계
17	46 (63.0)	15 (20.5)	12 (16.4)	73

<문제 17>는 ㉮:㉯$=6:5$일 때 ㉮ 기계가 1시간에 360개의 장난감을 만들어낸다면, 동시에 4950개의 장난감을 만드는 데 걸리는 시간을 묻는 문제이다. 비가 주어져서 비례식 전략을 사용하기 쉬우나 문제가 단순하지 않기 때문에 고민하여 문제를 해결한 흔적을 많이 볼 수 있었다. 곱셈 추론 전략을 사용한 학생들은 $6:5=360:\square$로 비례식을 세워 1시간에 ㉮ 기계와 ㉯ 기계가 만들어내는 장난감 수가 660개임을 구하여, $4950\div660=7.5$임을 찾아내었다. 덧셈 추론 전략을 비례식 전략을 사용한 학생은 1시간에 360개, 300개를 만드는 것을 표로 만들어 2시간에 720개, 600개, 3시간, 4시간.. 등 계속 더하여 4950개를 만드는데 걸리는 시간을 찾아내었다.

<문제 17>에서 학생들이 사용한 오류에 관한 분석은 227명이 답한 검사지에서 오답인 147명의 문제 풀이 과정을 통해 이루어졌다.

<표 30> 비례 문제 17의 오류 유형

문 제	이해 부족 (%)	애매한오류 (%)	기술적오류 (%)	계
17	78 (53.1)	52 (35.4)	17 (11.6)	147

<문제 17>에서 학생들이 범한 오류는 이해부족으로 인한 오류 53.1%, 애매한 오류 35.4%, 기술적 오류 11.6%로 나타났다. <문제 17>은 문제 서술 방식이 복잡하고 어려워 보이며, 단순히 비례식을 세워서는 문제를 해결하기 어렵기 때문에 정답률이 낮았다. 또한 제시된 수를 이용하여 이런 저런 방법을 찾는 과정에서 풀이 과정을 알아볼 수 없게 된 경우도 많았으며, 비례식과 나눗셈을 계산하는 중에 기술적 오류도 눈에 띄었다. 특히, 7.5라는 결과물이 나왔을 때, 이를 7시간 30분으로 해석하지 못하고 7시간 50분이라거나, 7시간 5분 등으로 해석한 경우도 있었다.

V. 결 론

본 연구에서는 6-가, 6-나 단계의 교육과정에 제시된 문제를 중심으로 교과서의 비례 문제를 개발하여 6학년 학생들의 교과서의 비례 개념 이해 정도와 문제 해결 전략 및 오류를 파악하였다. 교과서의 비례 문제 해결 정도는 평균 68.7점으로 1학기 기말고사 수학 과

목의 7개 반 평균이 82.3점임을 고려하면 낮은 편이라고 할 수 있다.

교과서에 제시된 문제 중에서 정답률이 높은 것은 전형적인 비례문제로 비례식을 세우기 쉽게 문장이 진술된 문제였다. 그리고, 비례식을 세우기 쉬운 경우와 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단할 때에 비례문제를 쉽게 해결하는 경향을 보였다. 또 문제에 주어진 비가 5:1과 같이 한 단위 전략을 쉽게 사용할 수 있는 형태였으며, 비례식을 세웠을 때 A:B=A′:B′의 관계가 순차적으로 서술되어 있었다.

같은 전형적인 비례식 문장제 문제라도 $a:b=c:x$에서 a와 c가 서로소가 아닌 경우의 해결율이 가장 높았으며, a와 c가 서로소인 경우에는 해결율이 많이 낮아졌다. 학생들은 a와 c가 서로소인 문제를 주어진 비를 이용하여 해결하는 문제에서 비에 1인 포함된 문제보다 더 어려워하였다.

또한, 대응표를 보고, 두 수의 관계를 파악하는 문제 역시 정답률이 높았는데 대응표를 이용하여 두 수의 관계를 묻는 질문은 <4-나> '8. 문제를 푸는 방법 찾기' 단원에서부터 많이 접하였기 때문이라고 판단된다.

비의 값을 비교하는 전형적인 문제이지만 직관적으로 차이를 알 수 있는 문제의 경우(문제 11)도 해결율이 상당히 높았다. 문제 11은 A와 B의 비의 값을 비교하는 문제로 6000:35, 7000:50중 더 낮은 비의 값을 찾아내는 문제이다. 이때, 가격의 차이에 비해 장미꽃 송이의 차이를 더 크게 둠으로서 비의 값을 구하지 않아도 직관적으로 문제를 해결할 수 있었기 때문이라 생각된다.

정답률이 낮은 문제들은 문제 7, 10번과 같이 백분율이 포함된 문제이거나 문제 16번, 17번과 같이 다른 수학영역과 결합된 문제 상황으로 비 관계가 명확하게 나타나지 않고 문제 서술이 복잡하여 문제에서 구하고자 하는 내용을 이해하기에 어려운 문제였다. 정답률이 낮은 문제의 또 다른 유형은 문제에서 비례식을 이용해서 문제를 해결할 수 있다는 암시가 없는 것이다. 문제가 다소 복잡해 보이고, A:B=A′:□의 관계로 쉽게 비례식을 세울 수 없을 때 학생들은 당황하고 문제를 어려워한다. 그리고 비례식을 이용해서 풀었더라도 거기에서 끝이 아니라 비례식을 이용하여 해결한 것을 다시 문제가 요구하는 조건으로 변환시켜야 하는 문제에서도 정답률이 낮았다. 농도문제와 속도 문제는 약 70% 정도의 학생들이 해결하여 예상보다 쉽게 해결하였다. 이 때에도 간비교, 내비교의 비의 값이 정수일 때의 문제에 대한 해결율이 높았다.

다음으로는 교과서 비례문제를 해결하는 전략의 경향을 논의하고 그에 따른 비례내용 지도에 관하여 알아보겠다. 교과서 비례문제 해결 전략 중 비례식 전략을 세워 해결하는 문제의 특징은 $a:b=c:x$에서 a와 c가 배수인 경우 즉, 간비교/내비교의 비의 값이 정수라는 점이다. 전형적인 비례식 문제, 비를 제공하고 비교하는 문제, 농도 또는 속도의 문제 모두의 경우에 공통적이었다. 반면에 $a:b=c:x$에서 a와 c가 서로소인 경우 즉, 간비교/내비교의 비의 값이 정수가 아닌 경우에는 비례식 전략보다 한단위 전략을 지배적으로 많이 사용하였다. 비를 제시하고 주어진 비를 이용하여 문제를 해결할 경우 비례식 전략이 많이 사용되지만 그 다음으로 많이 사용되는 전략은 한단위 전략이 아니라 곱셈추론 전략이다. 이 때 비에 1이 포함된 경우 곱셈추론 전략을 많이 사용하였다. 비례식을 세우기에 자명해 보이는 경우는 곱셈추론을 사용하는 경우가 많아진다고 해석된다.

곱셈추론 전략은 비에 1이 포함된 경우처럼 간단한 경우보다 백분율이 포함되거나 복잡한 비례문제의 해결에 더 많이 사용된다. 특히 비례문제에 정답을 제시한 학생 모두가 곱셈추론 전략을 활용한 점은 눈에 띈다. 백분율은 <6-가>단계에서 처음 도입되며, 비와 비율에 대한 개념을 익힌 후 기준량이 100일 때의 비율을 백분율이라고 정의한다. 교과서에서는 비율을 백분율로 나타내는 방법으로 '**백분율(%)=비율×100**'을 공식으로 제시하고 있다. 백분율 문제를 해결 하지 못한 학생들 중 공식이 기억나지 않는다는 학생들이 많았던 것으로 보아 백분율을 기준량이 100인 비율의 의미와 비에 100이 포함된 비례식으로 연결지어 이해할 수 있도록 돕는 것이 필요하다고 생각된다.

비례문제를 비례식을 세우는 한 가지 방법이 아닌 다양한 전략으로 해결하게 하기 위해서는 전형적인 비례문제 뿐 아니라 다양한 장면의 비례문제를 접하게 해야 한다. 1이 포함된 비를 제시한 문제와 직관적으로 그 차이를 알 수 있는 비를 비교하는 문제에서 한단위 전략을 사용한 학생들이 많아진 것으로 보아, 한단위 전략을 처음 도입할 때는 이 두 가지 경우가 적절하다고 보인다. 곱셈추론 전략은 백분율 문제와 비

전형적인 비례식 문제를 해결하는데 많이 사용되어, 학생들이 비례식의 개념을 충분히 이해하지 못하고 있다고 판단된다. 하지만, 비례식의 개념을 충분히 이해하지 못하였을 때 곱셈 추론 전략이 여전히 강력한 문제해결의 도구이며 곱셈 추론의 기반 위에서 비례식을 지도하는 것이 효과적이라고 할 수 있다. 전형적인 비례식 문제가 제시되었을 때, 하나의 문제를 해결하기 위해 학생들은 비례식 전략, 곱셈 추론 전략, 한 단위 전략 등을 다양하게 사용하는 경향을 나타내었다. 전형적인 비례문제는 비례식 전략을 지도하기에도 적합하지만 다양한 전략을 지도하는데도 여전히 효과적이라고 볼 수 있다. 또, $a:b=c:x$에서 a와 c가 서로소인 문제와 서로소가 아닌 문제를 섞어서 지도하면 다양한 전략으로 문제를 해결하고 이를 기반으로 비례식에 대한 형식적 이해를 시킬 수 있는 좋은 문제 유형이다.

비례문제에 대한 오류의 경향은 전반적으로 전형적인 비례 문제 즉, 쉬운 문제의 경우 잘못된 곱셈 추론, 기술적 오류, 애매한 오류가 많이 나타났다. 복잡하고 다른 영역의 내용과 결합된 경우는 이해부족, 애매한 오류, 기술적 오류 등이 나타났다. 여기서 주목할 점은 전형적인 문제에 대해서는 문제를 성공하지는 못하였더라도 곱셈 추론을 시도하였다는 것이다. 복잡하고 어려운 비례식 문제를 해결하면서 비례식이 적용되는 구조를 파악하기 어려운 경우 곱셈추론 전략을 이용하여 해결하였던 학생들이 많은 것으로 보아, 곱셈추론 전략은 비례식의 이해에 반드시 필요한 내용이라고 할 수 있다. 곱셈 추론 전략을 잘 이해하고 적용할 수 있는 학생들은 전형적인 비례식 문제를 다양한 방법으로 해결하는데 뿐 아니라, 좀 더 복잡하고 어려운 비례문제를 해결하는데 어려움을 적게 느낀다. 따라서, 비와 비율 단원에서 학습한 내용과 비례식 단원에서 연결짓지 못하고, 비례식 문제는 비례식을 세워서 해결하도록 하는 것은 효과적이지 않다. 비례식을 해결할 때 외항과 내항의 곱이 같다는 성질과 곱셈 추론 전략을 사용하는 방법을 연결지어주어야 할 것이다.

본 연구에서는 교과서에 제시된 비례문제들에 대한 해결율, 전략, 오류를 분석하여 비례 개념 지도에 대한 시사점을 제시하려고 시도하였다. 연구를 수행하면서 학생들이 비례문제에 대한 오류들을 구조적으로 분석해내기는 성공적인 전략의 분석에 비하여 상당히 어려웠다. 비례 개념과 관련된 수학적 개념이 많기 때문에 복잡하겠지만, 비례 문제 해결의 오류 유형이 매우 애매하고 비구조적이었던 이유에도 기인한다고 보인다. 비례 문제 해결에 대한 오류의 유형과 그 원인에 대한 체계적인 연구가 추가적으로 이루어지기를 바란다.

참 고 문 헌

이영숙 (1998). 비례 문제 해결 전략과 오류에 대한 분석 -초등학교 5,6 학년을 대상으로-. 한국교원대학교 석사학위논문.

홍수영(2006). 초등학교 5학년 학생의 비례 추론 이해. 한국교원대학교 석사학위논문.

Behr, M.; Harl, G.; Post, T. & Lesh(1992). Rational number, Ration, and proportion. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.296-333. NY: Macmillan.

Heinz, K. R.(2000). *Conceptions of ratio in a class of preservice and practicing teachers*. Unpublished Doctorial Dissertation, The Pennsylvania State University.

Karlpus, R.; Pulos, S. & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* pp.45-90. FL: Academic Press, INC.

Karplus, R.; Pulos, S. & Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on rate problems. *Educational Studies in Mathematics,* **14(3)**, pp.219 - 234.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* pp.49 - 84. NJ: Erlbaum.

Olof, B. S. (2003). *Making meaning of proportion: A study of girls in two icelandic classrooms.* Unpublished Doctorial Dissertation, The University of Wisconsin, Madison.

Resnick, L. & Singer, J. A.(1993). Protoquantative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational numbers: An integration of research* pp.107-130. NJ: Erlbaum.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics,* **16**, pp.181-204.

A study on the Sixth Graders' Solving Proportional problems in the 7th curriculum Mathematics Textbooks

Kwon, Mi Suk
Heeseong Elementary School, Dalan-dong, Dongan-gu, Anyang-city, 431-718, Korea
E-mail : lean99@hanmail.net

Kim, Nam Gyun
Department of Mathematics Education, Cheongju National University of Education, Chungbuk, 361-712, Korea,
E-mail : ngkim@cje.ac.kr

The purpose of this study was analysis on types of strategies and errors when the sixth grade students were solving proportion problems of mathematics textbooks.

For this study, proportion problems in mathematics textbooks were investigated and 17 representative problems were chosen. The 277 students of two elementary schools solved the problems. The types of strategies and errors in solving proportion problems were analyzed. The result of this study were as follows; The percentage of correct answers is high if the problems could be solved by proportional expression and the expression is in constant rate. But the percentage of correct answers is low, if the problems were expressed with non-constant rate.

* ZDM Classification : F83
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : proportional problem, proportion, strategy, error

<부록1> 교과서 비례문제 검사지

1. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

① 6 대 15 → □ : □
② 5와 8의 비 → □ : □
③ 9의 17에 대한 비 → □ : □
④ 7에 대한 4의 비 → □ : □

2. 빵 3개를 만드는데 달걀이 6개 필요합니다. 빵 9개를 만들기 위해서는 달걀이 몇 개 필요할까요?

3. 연필 5자루에 1500원입니다. 연필을 13자루 살려면 얼마의 돈이 필요합니까?

4. 다음 비례식에서 □안에 알맞은 수를 넣으세요.
① 8 : 5 = 20 : □
② 5 : □ = 25 : 30
③ 42 : 36 = □ : $\frac{1}{7}$
④ □ : 3 = 1 : 0.75

5. 다음 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오.
① 8 : 12 = ② 0. 3 : 0. 7 =
③ 36 : 132 = ④ $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{8}$ =

6. 다음 중 비례식이 옳은 것을 모두 찾아 쓰시오.

① 2 : 4 = 4 : 8 ② 5 : 7 = 10 : 13
③ 3 : 2 = 15 : 10 ④ 4 : 5 = 5 : 6
⑤ 10 : 8 = 4 : 5

7. 작년에는 공책 5권에 2000원이었는데, 올해에는 4권에 2000원입니다. 공책값은 작년에 비해 몇 % 올랐습니까?

8. 병주네 집에서는 쌀과 보리쌀을 5 : 1의 비로 섞어서 밥을 짓는다고 합니다. 쌀을 400g 넣으면, 보리쌀은 몇 g을 넣어야 하는지 알아보시오.

9. 태극기의 가로와 세로의 비는 3:2입니다. 오른쪽과 같은 태극기를 만들려면, 세로는 몇 cm로 해야 합니까?

10. 마라톤 대회에 참가한 선수는 200명입니다. 그 중에서 124명이 결승점까지 달렸습니다. 결승점까지 달린 선수는 참가한 선수의 몇 %입니까?

11. 대응표를 보고, □와 △의 관계를 말하여 보시오.

□	1	2	3	4	5
△	2	4	6	8	10

12. 영희와 순미는 같은 반 친구입니다. 오늘은 영희 부모님의 결혼기념일이자 순미 어머님의 생신이십니다. 두 친구는 축하 선물로 무엇이 좋을까 고민하다가 부모님이 좋아하시는 꽃을 사기로 결정했습니다. 영희는 A꽃집에서 엄마가 제일 좋아하시는 장미꽃 35송이를 6,000에 샀습니다. 순미는 B꽃집에서 장미꽃 50송이를 7,000원에 샀습니다. 누가 더 장미꽃을 싸게 샀을까요?

13. 바닷물 5L를 증발시켜 170g의 소금을 얻었습니다. 바닷물 12L를 증발시키면, 몇 g의 소금을 얻을 수 있습니까?

14. 5분 동안에 6km를 달리는 자동차가 있습니다. 같은 빠르기로 달릴 때, 150km를 가려면 몇 시간 몇 분 걸리겠습니까?

15. 지영이는 운동화를 한 켤레 사려고 하는데, 마음에 드는 똑같은 운동화가 시장과 백화점에 모두 있고, 각각의 정가와 할인율은 다음 표와 같습니다. 지영이는 어디에서 운동화를 더 싸게 살 수 있는지 알아보시오.

	정가	할인율(%)
시장	25000원	10%
백화점	35000원	30%

16. 원 ㉮와 원 ㉯가 그림과 같이 겹쳐 있습니다. 겹쳐진 부분의 넓이는 ㉮의 넓이의 $\frac{2}{3}$이고, ㉯의 넓이의 $\frac{1}{5}$입니다. 원 ㉮의 넓이가 27cm^{2}이라면, 원 ㉯의 넓이는 cm^{2}입니까?

17. 공장에 ㉮와 ㉯, 두 기계가 있습니다. 두 기계가 같은 시간에 만들어내는 장난감 수의 비는 6 : 5입니다. ㉮ 기계가 1시간에 장난감 360개를 만든다면, ㉮와 ㉯ 두 기계로 4950개의 장난감을 만드는데 걸리는 시간은 몇 시간 몇 분일까요?