한국수학사학회지 제22권 제2호(2009년 5월), 13 – 26

엘리 카르탕과 20세기 리만기하학

고려대학교 수학과 김영욱
ywkim@korea.ac.kr
吉林化工學院 및 고려대학교 수학과 Yuzi Jin
jinyuzi2005@korea.ac.kr

엘리 카르탕은 20세기 기하학과 대수학의 한 획을 그은 업적을 낸 수학자이다. 이 논문에서 우리는 소수의 전문가에게는 친숙하지만 일반적으로는 생소한 그의 업적을 조명해 보고 그 영향을 알아본다.

주제어: 카르탕, 리 군, 외미분방정식, 리만기하학

1. 들어가는 글

올해는 엘리 카르탕(Élie Cartan; 1869 – 1951)의 탄생 140주년이 되는 해이다. 2005년에 창간된 온라인 논문집 SIGMA는 R. Bryant 등을 편집인으로 하여 카르탕을 기념하는 특집호 "카르탕과 미분기하학(Élie Cartan and Differential Geometry)"을 기획하는 등 여러 곳에서 카르탕을 기념한 활동이 이루어지고 있다. 카르탕의 수학은 한 세기가 지난 지금에 와서야 더욱 제대로 평가받고 그 중요성을 인정받고 있다.

그는 20 세기 수학이 발전하는데 중심적인 역할을 했고 그의 수학은 여러 분야에서 기본을 이루고 있음에도 그의 이론은 단지 전공분야의 연구에서만 다루어지고 있을 뿐 일반적인 대학 및 대학원 교육에서 별로 많이 활용되지 못하고 있다. 예를 들면 학부 미적분학에서 교육하는 선적분과 면적분의 이론은 미분형식의 이론에 바탕을 두고 있지만 학부 해석학 강의에 올라와서도 제대로 미분형식의 이론을 가르치지 못하고 있으며, 위상기하학의 호몰로지와 코호몰로지 이론에서도 가장 쉽게 접근할 수 있는 미분형식의 사용은 제한적이라고 할 수 있다. 외국에서는 이러한 연구가 활발히 이루어지고 있으며 학부 수준의 대표적인 연구 논문으로는 [10]을 들 수 있다.

현대 수학의 발전에 기여한 위대한 수학자는 많다. 그러나 수학사학회지에 실린 수학자의 업적 소개 논문은 비교적 드물어서 코다이라, 호프 및 에르디쉬에 대한 것뿐이다 [12, 13, 14]. 본 논문은 이러한 기회를 빌어서 카르탕의 수학적 업적을 알아보고 이들이 20세기 수학에 미친 영향을 짚어본다. 카르탕의 수학적 업적에 대한 자세한

사항은 [7]을 참조하면 좋다. 또 카르탕의 자세한 전기와 수학적 업적을 설명한 책으로 미국수학회에서 번역되어 나온 [1]이 있다.

2. 카르탕

(1) 생애

엘리 카르탕은 1869년 4월 9일에 프랑스 남부 알프스의 이제르(Isère) 지방 돌로미유(Dolomieu) 마을에서 태어났고, 1951년 5월 6일 프랑스 파리(Paris)에서 임종하였다. 그는 대장간을 하는 아버지 죠세프 카르탕(Joseph Cartan)과 어머니 안느 코타즈(Anne Cottaz) 사이에서 태어났다.

그의 집은 매우 가난하였으며 자식을 교육시킬 여력이 없었다. 그러나 초등학교에서 두각을 나타낸 카르탕은 그 당시 돌로미유의 초등학교 감독관으로 와서 근무하던 젊은 뒤보(Antonin Dubost)의 눈에 띄어 그의 도움으로 정부 장학금을 받게 되었다. 이 장학금으로 그는 그레노블(Grenoble) 의 Lycée Jeanson-de-Sailly에서 고등학교 교육을 받았다. 여기서 우등으로 졸업하게 되자 정부장학금은 고등사범학교(École Normale Supérieure)에서 계속해서 공부할 수 있도록 연장되었다.

카르탕은 1888년에 고등사범학교에 입학하였으며 1891년에 졸업과 동시에 교사자격시험(agrégé)에 합격하여 곧 바로 연구생활에 들어갔다. 1894년 25세의 나이로 학위논문 “유한차원 연속변환군의 구조에 대하여(Sur la structure des groupes de transformations finis et continus)”로 박사학위를 받았다. 그는 박사학위를 받은 후 몽펠리에 대학에서 강의를 맡다가(1894 - 1896), 리용 대학에 전임강사로 임용되었다(1896 - 1903). 그 후 낭시 대학 교수직을 거쳐(1903 - 1909) 파리 소르본느 대학 전임강사가 되었다(1909). 그는 3년 후에 파리대학의 미적분학의 석좌교수가 되었으며, 1920년에는 수리역학 교수를 거쳐, 1924년에는 고등기하학 교수가 되어 1940년에 퇴임할 때 까지 역임하였다.

한편 카르탕은 1903년에 비앙코니(Marie-Louise Bianconi)와 결혼하여 세 명의 아들 앙리(Henri), 쟝(Jean), 루이(Louis)와 딸 엘렌느(Hélène)등 네 명의 자녀를 두었다. 그러나 재능있는 음악가였던 쟝은 25세에 결핵으로 사망하였으며, 또 물리학자 루이는 제2차 세계대전 중에 레지스탕스로 활동하다 1943년에 독일군에 잡혀 처형당하였다. 맏아들 앙리는 모두가 아는 유명한 수학자가 되었으며 20세기 수학에 중요한 업적을 남겼다.

(2) 수학자로서 카르탕

카르탕은 수학의 많은 분야에 걸친 연구를 하였으며 그의 연구 대상은 여러 가지 분야에서 나온 아이디어와 관련된 내용이다. 그는 강의를 매우 잘 했다고 알려져 있다. 그의 강의를 들으면 잘 알아들을 수 있어서, 학생들이 공부한 내용을 모두 잘 이해했다고 오해하는 경우가 많았다고 한다. 그럼에도 불구하고 Mathematics Genealogy Project에 따르면 그에게서 박사학위를 받은 학생은 Charles Ehresmann과 Mohsen Hashtroodi 뿐이다.

카르탕이 당대에 이미 유명한 수학자의 위치를 굳혔고 그의 수학은 전 세계에 알려졌음에도 학생이 적은 것은 동시대의 젊은 학자들이 카르탕의 수학을 제대로 이해하지 못했음을 반증하고 있다. 이와 함께 카르탕은 다른 수학자들과는 달리 자신의 추종자 세력을 키우는 데에 별 노력을 기울이지 않았다고 하며, 또한 당시 프랑스의 수학의 전개 방향이 피카르(Picard) 등의 영향을 이어 받아 해석함수의 이론에 치우쳐 있어서 기하학을 주제로 한 카르탕의 이론들은 이미 빛이 바랜 다르부(Darboux)의 이론 정도로 치부되는 경향도 있었다. 시일이 지나면서 연구의 중심이 당시 새로운 연구 대상인 위상수학과 현대대수학으로 옮겨진 것도 프랑스 젊은 수학자들이 카르탕의 연구 방향에서 멀어지게 한 요인이 되었다고 할 수 있다.

그의 업적에 대한 당대의 평가는 오히려 프랑스에서 보다는 외국에서 제대로 이루어졌으며 특히 바일(H. Weyl)의 군 표현론에 대한 중요한 논문이 발표되면서 독일에서는 카르탕의 연구의 중요성이 부각되었다. 한편 카르탕이 낭시 대학에서 교편을 잡고 있을 때 그가 소르본느로 옮길 수 있도록 추천서를 써준 사람은 포앙카레였다. 당시에 포앙카레의 추천서가 없었다면 카르탕의 연구 결과를 제대로 파악하고 인정할 수 있는 사람이 없었다고 한다. 이와 관련하여 듀도네(Dieudonné)는 다음과 같이 썼다 [8].

“카르탕이 일류 수학자임이 일반에게 알려진 것은 그의 나이가 많이 들어서였다. 1930년 이전까지는 아마도 포앙카레와 바일만이 그의 뛰어난 수학적 능력을 제대로 인정한 사람들이었을 것이다. 이것은 한편은 그가 매우 겸손한 사람이었으며 또한 1900년 이후의 프랑스 수학 연구 주류가 함수론에 치우쳐 있기 때문이기도 하지만 사실은 그의 연구가 비상히도 독창적이었기 때문이다. 1930년이 지나서야 젊은 수학자들이 그의 논문에 들어 있는 주옥같은 아이디어와 결과들을 공부하기 시작했다. 그제서야 그의 연구가 다른 사람들에게 영향을 미치기 시작했으며, 포앙카레와 힐베르트(Hilbert)를 제외하고는 어느 누구도 오늘날의 수학이 이러한 모양을 갖추고 이러한 관점을 갖게 하는데 이만큼의 영향을 끼친 사람은 없을 것이다.”

3. 카르탕의 수학 (1): 연속군과 리 대수

카르탕은 그의 연구의 시작을 리(Sophus Lie)의 이론에서 출발하였다. 다르부의 지도하에서 학위를 마쳤지만 그의 학위논문의 연구 주제는 마침 라이프치히(Leibzig)에서 리의 지도를 받고 있던 친구 트레스(Tresse)가 제안한 것으로서 카르탕은 연속군론에 대한 연구로 박사학위를 받았다. 카르탕의 연속군론에 대한 리의 이론의 영향은 매우 컸다. 1893년도에 파리로 찾아온 리와 카르탕은 많은 수학적 토론을 했지만 실제로 카르탕의 1893년 4월에 발표된 논문은 이미 그 이전에 거의 완성되어 있었다고 보이며 따라서 리의 직접적인 영향은 일부분에 그친다고 평가되고 있다 [9].

그는 수학의 여러 분야에서 독보적인 이론을 세웠으며 매우 많은 논문과 책을 남겼다. 그의 수학이론을 보면 연대에 따라 대략 세 개의 분야로 나뉜다. 초기의 연속군의 이론과 리 대수의 이론, 그 후에 나타나는 외미분방정식계(exterior differential system)의 이론과 그리고 마지막으로 나타나는 움직표구(moving frame, repère mobile)의 이론을 사용한 리만기하학이 그것이다. 이 이론들은 서로 동떨어진 이론이 아니라 서로 밀접하게 연관된 이론이며 이 가운데 어떤 하나라도 없으면 다른 것의 발전이 어렵다고 할 수 있다. 이 밖에도 물리학에서 아인슈타인이 일반상대성이론을 개발하는 동안 이와 관련된 수학적 이론에 대하여 카르탕과 서신을 주고받으며 공부한 사실은 유명하다.

(1) 리(S. Lie)와 연속군론

카르탕의 초기 수학은 리 군의 이론에서 출발한다. 리 군은 리(Lie)가 19세기 말에 변환군의 이론으로서 도입한 것이다.

리는 주어진 유한개의 변수에 대하여 가능한 모든 변환군을 찾는다는 의미에서 연속군의 분류를 연구하고 있었다. 이것은 당시의 수학으로서는 너무 어려운 문제였다. 그러나 카르탕은 이미 킬링(Killing)이 생각하고 있던 것과 마찬가지로 연속군의 모든 추상적인 군 구조를 밝히는 것을 문제로 삼았다. 킬링의 연구를 바탕으로 카르탕은 단순군에 대한 분류 문제를 완벽하게 해결하였다.

이 문제가 해결됨으로써 이러한 군 구조를 구체적으로 갖는 변환군들을 구성해 나갈 수 있게 되었으며 나아가서 선형변환군으로 표현하는 것이 가능해졌다. 이 문제가 후에 단순군에 대하여 카르탕이 완벽하게 해결한 또 하나의 문제인 주어진 군의 표현을 모두 결정하는 문제이다. 이 과정을 통하여 1913년에 스피노(spinor)를 발견하게 되었으며 이는 물리학에서 중요한 도구로 활용된다.

또 무한차원 연속군의 이론을 연구하여 이런 경우의 동형의 개념을 정립하고 서로 다른 무한차원 리 군의 가능한 종류를 분류하였다. 이와 함께 리 군의 위상적 성질을 연구하여 군의 많은 대역적 성질이 한 원소 근방의 무한소적인 성질로부터 결정된다는 사실을 알아내었다.

(2) 리 대수의 이론

카르탕은 그의 학위 논문에서 복소수체 위의 단순 리 대수를 완전히 분류했다. 이러한 리 대수는 unimodular군, 홀수차원 및 짝수차원 직교군, 그리고 사교군의 리 대수 등 4개의 족(族)과 함께 5개의 예외적인 리 대수가 있다. 이러한 사실은 이미 킬링이 발표했었다. 그러나 킬링의 증명은 여러 군데에 오류가 있었고, 또 예외적인 5개의 리 대수가 존재한다는 사실을 증명하지 못했다. 카르탕은 이러한 사실을 증명하고 실제로 예외적인 리 대수들을 구체적으로 구성하였다. 그는 학위 논문에서 계속하여 리 대수의 원소 X에 대하여 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X)$로 정의되는 리 대수의 기본이차형식이 비퇴화일 필요충분조건이 이 리 대수가 반단순(semi-simple) 이라는 것을 증명하였다.

그는 계속하여 복소수체 위에서의 반단순 리 대수의 선형 표현론에 대하여 연구하였다. 그는 선형 표현론을 연구하는 과정에서 학위논문에서 개발한 카르탕 부분 대수와 선형표현의 weight 및 리 대수의 근(root) 등을 조직적으로 사용하였다. 이를 통하여 그는 단순 리 대수의 기약 선형 표현을 모두 분류하였다. 이 결과는 후에 바일에 의하여 완전한 이론으로 완결되었다. 이 연구의 과정에서 카르탕은 직교 리 대수의 스핀 표현을 발견하였으며 이는 이후 물리학의 중요한 도구가 되었다.

이 밖에 계속되는 논문에서 카르탕은 실수체 위의 단순 리 대수를 분류하였으며 또 이의 선형 표현을 모두 결정하였다.

(3) 리 군의 이론

리 대수 이론의 전개가 일단락되면서 카르탕은 리 군의 이론에 대한 연구를 시작하였다. 이는 대략적으로 1925 년부터 시작되며 바일이 컴팩트 리 군에 대한 중요한 논문을 발표한 때와 시기적으로 일치한다. 그는 [2]에서 다양체로서의 리 군을 미분기하의 관점에서 연구하였다. 여기서 그는 리 군의 left translation, right translation 및 주어진 원소에 대한 conjugation에 의한 변환 등을 연구하여 리 군에 자연스러운 의사접속을 세 개 찾아내었다. 이 중 두 접속은 곡률이 0이며 또 다른 접속은 열률(torsion)이 0이다. 이 세 접속은 모두 1변수(one-parameter) 부분군의 궤적을 측지선으로 가진다. 또 여기서 그는 이러한 리 군의 전측지적(totally geodesic) 부분다양체를 모두 찾았다.

이 밖에 계속되는 논문에서 카르탕은 컴팩트 반단순 리 군과 그의 복소화된 군의 위상에 대하여 연구하였다. 특히 이러한 리 군의 원소는 모두 1변수부분군에 속한다는 사실을 밝혔다. 또 카르탕 부분군에 대한 연구를 통하여 이러한 리 군의 기본군을 계산하는 방법을 고안하였으며 이는 바일의 연구결과인 컴팩트 반단순 리 군의 기본군이 유한하다는 정리를 내포하는 연구결과이다. 그는 이 방면으로 연구를 계속하여 컴팩트 리 군의 고차원 베티수를 계산하였다.

리 군에 대한 카르탕의 연구는 바일의 연구와는 달리 폭넓게 적용 가능하여서 컴팩

트가 아닌 리 군에도 잘 적용된다. 그는 리의 정리의 역인 모든 실수 리 대수는 어떤 리 군의 리 대수로 나타내어짐을 증명하였다. 이를 따라서 모든 단순연결 리 군은 유클리드 공간과 단순 연결인 반단순 리 군의 곱으로 표시됨을 증명할 수 있다. 이러한 방법으로 카르탕은 리 군과 리 대수에 대한 여러 가지 위상적인 성질들을 밝혔다.

3. 카르탕의 수학 (2): 외미분방정식계와 리만기하학

리 군과 관련하여 해석학을 연구하면서 카르탕은 임의의 변수 변환에 대하여도 불변인 미분방정식의 이론에 대하여 연구하였다. 이러한 이론은 이러한 불변인 미분방정식을 만족시키는 대상들의 연구에서 특정한 변수 표현에 의존한 성질이 아닌 이러한 대상의 고유한 성질들을 밝히는데 효과가 컸다. 이러한 이론을 개발하기 위하여 카르탕은 꼭 변수의 변환만큼만에 대해서 불변인 외미분형식(exterior differential form)이라는 개념을 체계적으로 활용하였다.

카르탕은 항상 리 군과 관련된 이론에 관심을 가지고 있었지만 그의 수학은 항상 기하학적 직관에 바탕을 두고 있었으며 기하학과 같은 구체적인 수학에의 응용을 생각하고 있었다. 그가 개발한 외미분형식과 외미분방정식계의 이론은 이러한 미분기하학에 꼭 맞는 도구가 되었으며 20세기 리만기하학의 발전의 방향을 결정짓는 중요한 계기가 되었다.

특히 클라인이 19세기 말에 리의 군론을 고전기하학에 적용하여 고전기하학을 특정 변환군에 대하여 불변인 성질을 연구하는 학문으로 자리매김한 에를랑겐 목록(Erlanger Programm)의 내용을 더 한층 일반화하였다. 그는 공간의 각 점에서 무한소적으로(infinitesimally) 클라인의 생각을 적용시키는 아이디어로 각 점마다 무한소적으로 작용하는 리 군을 생각하고 이러한 작용의 해석학적 요소가 각 점의 기하학적 요소를 결정한다고 하는 이론으로 발전시켰다. 즉, 각 점에서 무한소적인 좌표변환인 접공간 위에서의 basis 변환에 해당하는 선형군을 생각하고 이러한 선형군의 군론적인 대수학과 외미분적인 해석학이 리만공간의 구조를 완벽하게 설명한다는 것을 밝혀내었다. 이 이론은 각 점에서의 기하학이 유클리드 기하를 무한소적으로 변형한 것이며 이 변형의 모양을 나타내는 접속 형식이 리 대수에서 값을 갖도록 된다. 이러한 이론은 유클리드 기하의 변형 외에도 공형구면, 의사공간, 밍코프스키 공간 등의 변형으로도 일반화되며 이를 카르탕 접속(Cartan connection)이라고 부른다. 이는 더 추상적인 개념으로 발전하여 다발 공간(fiber bundle)의 접속(connection)의 이론으로 확장되었는데, 그는 이것을 일반공간(espace généralisé)이라고 불렀다 [3]. .

많은 수학의 이론들이 개발 당시에 이미 여러 사람들의 생각 속에 잠재되어 있던 개념을 구체화하고 발전시킨 이론임에 비하여, 접속에 대한 카르탕의 생각은 그 이전까지 아무도 생각하지 못했던 그의 창조물이라고 할 수 있을 정도로 혁신적이다. 이

러한 이론이 다르부 등에 의한 곡선을 따라 움직이는 moving trihedron(trière mobile)의 이론과 결부되어서 리만기하학의 새로운 도구인 움직표구의 이론을 창안하게 되었으며, 이는 미분기하학과 다양체 위의 해석학을 연구하는 획기적인 방법을 제공하게 되었다.

(1) 외미분방정식계

카르탕이 외미분방정식계를 만든 것은 미분방정식의 문제를 기하학적으로 해결해 보려는 시도였다고 할 수 있다. 편미분방정식은 일반적으로 해를 가지고 있지 않은 경우가 많다. 이러한 해가 존재하지 않는 이유 가운데 해석학적이면서도 기하학적인 이유를 찾아보는데 외미분형식은 중요한 단서를 주며 이를 통하여 이러한 문제가 대수적인 형태로 표현된다.

이 분야의 연구에서 가장 중요한 논문은 1901년의 [5]이며, 그의 외미분방정식계의 이론은 1945년에 저술한 책 [4]에 잘 소개되어 있다.

적분가능성

연립 1계 편미분방정식의 이론에 등장하는 Frobenius의 정리를 보면 외미분방정식계의 이론의 필요성을 가장 잘 이해할 수 있다. 다음과 같은 연립 편미분방정식을 생각하여 보자:

$$u_x = A(x,y), \quad u_y = B(x,y)$$

이 방정식은 이변수 함수 u에 대한 방정식으로 $R^2 = \{(x,y)\}$에서 정의된 함수 A, B로써 정의되어 있다. 이러한 편미분방정식을 외미분방정식계로는 다음과 같이 나타낸다: $R^3 = \{(x,y,u)\}$ 위에서 정의된 1-형식 $\theta := du - A\,dx - B\,dy$ 와 2-형식 $\Omega := dx \wedge dy$ 를 생각하여 보면 우리의 목표인 해 u의 그래프는 R^3의 부분다양체 $i : S \to R^3$로서 $i^*(\theta) = 0$이고 $i^*(\Omega) \neq 0$인 것을 찾는 것이다.

일반적으로 Frobenius 정리는 "$\theta^1,\ldots,\theta^s$가 M^n의 각 점에서 일차독립인 1-형식이고, 또, '$d\theta^\alpha \equiv 0 \mod \{\theta^1,\ldots,\theta^s\}$'이면 M의 각 점 x에서 이 점을 지나는 부분다양체 $i : S^n \to M$이 존재하여, 각 점 $y \in S$에서 $T_y S = \left\{\theta_y^a\right\}^\perp$가 된다"고 하고 있다.

위의 예에서는 $d\theta \equiv 0 \pmod{\theta}$ 라는 조건은

$$\left(u_x\right)_y = \left(u_y\right)_x, \quad \text{즉,} \quad A_y = B_x$$

이 된다. 이것이 대학 미적분학에서 공부하는 그린의 정리의 응용에서 나오는 포텐셜 함수를 구하는 조건이다. 이러한 조건을 일반적으로 주어진 연립 편미분방정식의 적분가능성(integrability) 조건이라고 부르며 이 편미분방정식이 국소적인 해를 가지기 위한 필요충분조건이다.

이 이론을 보면, 해 u의 그래프인 다양체 위에서는 $\theta = 0$일 뿐만 아니라, θ에 어떠

한 함수를 곱하거나 다른 미분형식을 곱하여 나타난 미분형식들도 0이 되므로 θ로부터 외미분형식의 곱에 의해 대수적으로 생성된 ideal을 생각하는 것은 자연스럽다. 위의 θ에 대한 적분가능성 조건은 ideal에도 잘 적용되는 조건이 되어, 이 조건과 동치인 "ideal이 외미분 d에 대하여 닫혀있다"는 성질을 만족시키는 외미분형식의 ideal을 differential ideal이라고 부르며, 적분가능성 조건은 형식적으로 대수적인 형태의 조건으로 바뀐다. 일반적인 경우에 이 조건을 만족시킬 때 이 방정식이 대합계(involutive system)를 이룬다고 한다. 많은 경우에는 이런 조건을 만족시키는 해의 성질은 이런 대수적 방정식의 대수기하적 성질과 연관되어 있다.

편미분방정식의 외미분방정식계

일반적으로 미분방정식이 주어지면 이 방정식을 다음과 같은 과정을 통하여 연립 1계 외미분방정식의 이론으로 고칠 수 있다. 일반적으로

$$F(x,y;z;z_x,z_y)=0,\quad G(x,y;z,z_x,z_y)=0$$

와 같이 주어져 있는 연립편미분방정식이 있으면 이는

$$dz-(s\,dx+t\,dy)=0,$$
$$F(x,y;z;x,t)=0,$$
$$G(x,y;z;x,t)=0$$

와 같이 주어지는 외미분방정식계를 푸는 문제로 전환되며 이는

$$F(x,y;z;x,t)=0,\qquad G(x,y;z;x,t)=0$$

로 정의되는 공간에서 조건 $dz-(s\,dx+t\,dy)=0$를 만족시키는 부분공간을 찾는 문제가 된다.

고차도함수 z_{xx} 등이 나타나는 경우에는

$$p=z_{xx},\quad q=z_{xy},\quad r=z_{yy}$$

라 놓고

$$ds-(p\,dx+q\,dy)=0,\qquad dt-(q\,dx+r\,dy)=0$$

이라는 조건을 더 넣어주면 방정식의 개수는 많아지지만 근본적으로 1계 미분형식들로 주어지는 연립방정식이며 앞 절에서와 같이 이 미분형식들로 생성되는 differential ideal에 대한 똑 같은 이론으로 귀착된다.

Jet 의 이론

이러한 방법으로 고계도함수를 모두 변수로 바꾸어 나가는 과정은 실제로 변수의 개수를 늘려 고려하는 공간의 차원을 높이게 되며 이 공간의 점의 좌표는 실제로 우리가 구하려는 해의 각 점에서의 테일러전개한 다항식의 계수라고 생각할 수 있다. 따라서 원래 주어진 변수 외에 편미분계수 대신 새로 첨가되는 변수들을 모두 모으면 주어진 미분방정식의 계수까지의 테일러전개 다항식 꼴의 함수를 모두 모아 놓은 공간이라고 생각할 수 있다. 이러한 공간을 Jet의 공간이라고 부르며, 외미분방정식계의

이론은 Jet의 공간에서의 적분론이라고 볼 수 있다.

주어진 미분방정식의 일반적인 해의 특이점－예를 들면 포락면－으로 주어지는 해를 이 방정식계의 특이해라고 부르기도 한다. 특이해의 점에서는 방정식이 대합(involution)이 되지 못한다. 이런 경우에 이 방정식이 대합적이 되도록 적절히 특이해와 관련된 변수를 늘려주고 이 변수가 만족시키는 방정식을 더해주어서 이 특이해가 일반적인 해가 되도록 바꾸는 방법이 사용된다. 카르탕이 개발한 이러한 방법을 연장(prolongation)이라고 부른다. 연장의 이론에 따라 방정식의 해의 그래프는 높은 차원의 그래프로 테일러 전개와 같이 자연스럽게 연장된다.

외미분방정식계의 응용

외미분방정식계의 이론은 여러 가지로 응용된다. 초기에는 카르탕이 응용한 미분기하학적 문제와 리 군의 구조에 대한 것에서 출발하였지만, 곧 물리학의 많은 계산이 이와 관련되어 있다는 것을 알게 되었다. 특히 해석역학의 모든 계산법은 실제로 미분형식의 계산과 이의 적분의 이론이며 특히 불변적분량과 같은 것은 카르탕의 방법을 사용하여 제대로 전개할 수 있다. 또한 벡터장을 사용하여 전개하던 해밀턴의 역학은 미분형식을 사용하면 매우 자연스러운 이론이 된다는 것을 알 수 있다. 이 밖에도 일반상대성이론을 전개하는 과정에서 많은 부분이 카르탕의 이론을 응용한다.

구체적으로 외미분방정식계를 사용하여 정식화되는 문제 가운데는 리만다양체를 유클리드 공간에 매립하는 문제, 편미분방정식계를 푸는 문제, 해석역학의 문제 등 구체적인 예가 많이 있다. 이 가운데 초기의 미분기하학적인 응용 예는 카르탕 자신의 책 [4]에 나와 있다.

(2) 리만기하학

리만기하학은 카르탕에 의하여 리 군의 기하와 밀접하게 연관된 이론으로 거듭난다. 카르탕은 자신이 개발한 리 군의 이론을 활용하여 리만 다양체의 국소적 이론과 이의 부분다양체의 국소적 이론 사이의 관계를 대수적으로 밝혔다. 이에는 리 군 위의 미분형식의 이론이 중요한 역할을 했다.

리 군의 미분형식의 이론

리 군의 리 대수의 바탕벡터(좌불변 벡터장)를 $X_1, \ldots, X_n$이라 하면, 적당한 상수 c_{ij}^k에 대하여

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 때, X_i의 쌍대바탕벡터를 ω_i라 하면 관계식

$$d\omega^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k\, \omega^i \wedge \omega^j$$

가 성립한다. 이를 Maurer-Cartan 방정식이라고 한다. 이 쌍대바탕벡터 ω^i는 좌불변 형식이고 모든 좌불변 형식의 바탕벡터를 이루므로 일반적으로 리 군의 좌불변 형식을 Maurer-Cartan 형식이라고 부른다. 행렬군에서 Maurer-Cartan 형식을 구하는 간단한 방법은 행렬군의 일반원소 g에 대하여 $g^{-1}dg$를 계산하는 것이다.

Maurer-Cartan 형식은 다음과 같은 중요한 성질을 가지고 있다: 위와 같은 성질을 만족시키는 리 군 G가 있다. 미분다양체 M 위에 1-형식 $\varphi^1, \dots, \varphi^n$이 있어서

$$d\varphi^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \, \varphi^i \wedge \varphi^j$$

를 만족시킨다고 하자. 이 때, $p \in M$이고 $g \in G$이면, p의 적당한 근방 U 위에서 정의된 사상 $f : U \to G$가 존재해서, $f(p) = g$이고 $\varphi^j = f^* \omega^i$가 성립한다.

카르탕은 이러한 성질을 활용하여 리만다양체의 계산법을 개발하였다. 예를 들어 유클리드 공간의 기하학은 다음과 같이 생각할 수 있다. 리 군

$$E^+(3) = \{ T_x \circ A \mid T_x \text{ 는 } x\text{에 의한 평행이동, } A \in SO(3) \}$$

을 생각하자. 그러면 $T_x \circ A$는 좌표를 사용하면 위치벡터 x와 정규직교바탕벡터 e_1, e_2, e_3로 나타낼 수 있다. 이 때 이들은 사상

$$x : E^+(3) \to E^3, \quad e_i : E^+(3) \to E^3$$

로 생각할 수 있고, 이 때, dx, de_1, de_2, de_3는 $E^+(3)$ 위에 정의된 벡터값을 갖는 1-형식이다. 따라서 이들은

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i, \quad de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j$$

라고 쓸 수 있다. 이 때 성질 $d \circ d = 0$를 이용해서 등식

$$d\omega^i = \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_j^i = \sum_k \omega_j^k \wedge \omega_k^i$$

를 보일 수 있다. 여기서 e_i를 움직표구라고 부른다.

이제 구간 $[a,b]$ 위에 두 미분가능한 함수 $\kappa(s)$, $\tau(s)$가 주어졌다고 하자 이 때,

$$\varphi^1 = ds, \quad \varphi^2 = \varphi^3 = 0, \quad \varphi_1^2 = \kappa\, ds, \quad \varphi_1^3 = 0, \quad \varphi_2^3 = \tau\, ds$$

라 놓으면 위의 성질로부터 사상 $f : [a,b] \to E^+(3)$로서 $\varphi^i = f^* \omega^i$와 $\varphi_i^j = f^* \omega_i^j$를 만족시키며 $f(s_0) = I$인 것이 존재한다. 이 때 곡선 $\alpha = \pi \circ f$는 κ, τ를 각각 곡률과 열률로 갖는 곡선이다. (여기서 π는 $T_x \circ A$를 x로 보내는 사영사상이다.) 즉 곡선론의 기본정리가 유도된다. 마찬가지 방법으로 곡면론의 기본정리도 유도할 수 있으며 이 방법은 일반적으로 모든 리만 공간의 부분공간으로 확장할 수 있다.

이를 보면 위의 이론은 부분다양체의 존재방정식에 해당하는 미분방정식을 전체공간의 Maurer-Cartan형식과 관련된 외미분방정식계의 이론으로 옮겨놓은 것이다. 즉 카르탕은 이러한 일련의 존재 문제가 모두 같은 모양의 외미분방정식계의 문제임을 알아보고 이를 한꺼번에 다루는 방법을 개발한 것이다. 이 방법은 리 군에도 잘 적용

되어 다음과 같은 정리를 얻는다: "G_1, G_2가 연결되고 단순연결인 리 군이고, 그 리 대수가 서로 동형이라고 하면, G_1, G_2도 서로 동형이다." 카르탕은 여기서도 적절히 대응되는 Maurer-Cartan 형식을 사용하고 있다.

리 군 G와 그의 닫힌 부분군 H에 대하여 나눈공간 G/H를 등질공간이라고 부른다. 그는 위와 같은 방법을 일반화하여 등질공간의 기하를 G의 Maurer-Cartan 형식을 써서 연구하였다. 이를 일반화된 움직표구라고 부른다.

움직표구

카르탕이 리만기하학의 연구에 사용한 방법론은 움직표구이다. 이것은 19세기 말부터 많은 사람들이 유클리드 공간의 미분기하에서 사용하던 계산법을 일반화한 것이다. 이 방법이 리만기하학에 잘 적용되는 것은 벡터장보다는 미분형식을 사용함으로써 계산이 자연스럽다는 점을 들 수 있다. 유클리드 공간보다 복잡한 리만 다양체는 직관적인 벡터장의 이론보다는 계산이 수월한 미분형식을 사용하는 것이 장점을 가지고 있을 뿐만 아니라, 좌표변환의 각 점에서의 미분이 직교군의 계산으로 유도되는데 이 때 직교군에서 앞 절의 Maurer-Cartan 형식이 중요한 계산도구가 되기 때문이다.

앞 절의 움직표구의 이론은 등질공간으로 일반화되었다. 카르탕은 등질공간 G/H의 부분다양체 M에서의 움직표구를 각 점 $p \in M$에서 $\pi \circ g(p) = p$인 사상 $g: M \to G$라고 생각하고 위의 방법을 적용하였다. 그는 일반적으로 움직표구 g를 잡고, G의 Maurer-Cartan 형식을 g에 의하여 끌어당기면(pull-back) 이 끌어당긴 형식이 만족시키는 Maurer-Cartan 방정식에 M의 모든 기하학적 불변량이 들어있다는 사실을 써서 기하학을 연구하였다. 이러한 방법은 우리가 연구하는 구체적인 공간의 대부분이 등질공간으로 표현된다는 사실에서 매우 중요한 도구로 등장하였다. 예를 들면 3차원 유클리드 공간은 $E^3 = E^+(3)/SO(3)$로 나타내어진다.

일반적인 리만공간에서는 이러한 이론이 무한소적 개념으로 적용된다. 즉 리만다양체의 각 점에서 잡은 정규직교인 1-형식은 변수변환의 가능성을 모두 생각하면 각 점에서 $SO(3)$만큼의 변환가능성을 가지고 있다. 이 점에서 $SO(3)$의 Maurer-Cartan 형식인 $g^{-1}dg$에 해당하는 1-형식을 그 점 근방에서의 변수변환 가능성을 고려하여 일반적으로 나타내면 그 근방에서 표현된 접속 1-형식을 얻게 된다. 그리고 이러한 표현은 리만다양체의 각 점에서의 정규직교바탕벡터들로 이루어진 주다발(principal bundle) 위의 접속이라는 개념으로 일반화된다. 이 주다발의 접속형식은 주다발의 줄기(fiber)인 리 군의 Maurer-Cartan 형식의 일반화이며, 이 주다발의 곡률형식은 줄기 리 군의 Maurer-Cartan 형식의 구조방정식의 일반화가 된다. 이러한 카르탕의 기하학 전개는 그 때까지는 전혀 생각하지 못했던 새로운 이론으로 정립되고 20세기 위상기하학에 주된 연구과제를 주었다. 리 군에 관련된 많은 위상 및 기하학적 연구결과들은 이에 바탕을 두고 있다고 할 수 있다.

미분형식 이론의 영향

카르탕의 미분형식 이론은 단순히 기하학의 무한소이론으로 그치지 않았다. 스토크스의 적분정리와 결합한 미분형식의 이론은 현대수학의 가장 중요한 정리들을 도출해 내었다. 가장 중요한 결과로 가우스-보네의 정리를 일반화한 가우스-보네-천의 정리를 들 수 있다. 특히 이의 계산 과정에서 등장하는 위상적인 불변량들은 미분형식을 사용하여 계산하기에 적절하다.

미분형식의 이론을 이어받아 앙리 카르탕은 일본의 수학자 오카(岡)가 만들어낸 아이디어를 구체화하여 위상기하학의 중심이론으로 키워냈다. 층(層, sheaf)의 이론으로 불리는 이 이론은 함수 공간을 일반화한 것으로 코호몰로지를 계산하는데 매우 강력한 도구가 되며 이를 통하여 편미분방정식을 푸는 도구로 활용된다. 복소함수론에서 시작된 이 아이디어는 현대의 다변수복소함수론과 대수기하학의 특성류(characteristic classes)의 이론 등에서 미분형식을 활용한 이론의 정수를 보여주고 있다.

(3) 카르탕과 상대성이론

항상 기하학적인 생각을 바탕에 깔고 구체적인 응용에 대한 열망을 버리지 않았던 카르탕은 1920년대에 발전하는 물리학의 일반상대성이론에서 그의 이론을 직접 적용할 대상을 찾았다. 당시 특수상대성 이론을 발표하고 곡률을 가지는(중력이 있는) 일반적인 공간에서의 물리학을 구성하고 있던 아인슈타인(Einstein)은 일반적인 공간의 기하학이 생각보다 쉽지 않아서 카르탕에게 도움을 청하였으며 수년에 걸친 두 사람 사이의 합작으로 일반상대성이론이 탄생하였다. 이에 대한 기록은 두 사람이 주고받은 서신집에 고스란히 남아있다 [5].

4. 맺는 글

카르탕의 업적은 리 군의 이론에 기초하고 있지만 그 범위는 넓다. 20세기에 발전한 모든 수학 분야가 카르탕의 연구의 영향 아래 발전하였다고 하여도 과언이 아닐 정도이다. 이미 한 세기가 지나가는 즈음임에도 아직도 그의 이론들은 일반적인 대학 교육과정에 들어오기 힘들 정도로 앞서나간 이론이었다. 21세기에 들어와서는 그의 이론의 기초적인 부분은 학부 수준에서 이해할 수 있도록 재해석하는 연구가 필요하다고 보인다. 특히 미분방정식을 외미분방정식계로 봄으로써 얻어지는 해의 공간의 연구는 상미분방정식의 경우에는 이미 Griffiths 등에 의하여 연구된 바 있다 [11]. 한편 편미분방정식의 경우는 카르탕에서부터 시작하여 Chern, Griffiths, Bryant 등으로 이어지는 기하학자들의 평생의 연구가 이를 향한 것이라고 할 수 있다.

한편 고등학교에서 설명 없이 도입하는 미분형식의 개념을 사용한 공식으로 $df = f'(x)\,dx$를 들 수 있다. 적어도 대학 미적분학에서는 이러한 공식을 정당화할 필

요가 있으며, 이를 위한 방법으로 대학 단계에서는 변수변환 공식을 사용할 수도 있다. 엄밀하지는 못해도 미적분학 수준에서의 1변수 함수 적분의 변수변환공식

$$\int f(u)\,du = \int f(u)\,\frac{du}{dx}dx$$

이 성립하는 이유를 보고 나서는, 이러한 공식이 항상 성립하므로 따라서 임의로 잡을 수 있는 함수 f와 적분기호를 제외한 나머지 부분에 대한 공식

$$du = \frac{du}{dx}dx$$

를 적분에서는 합법적으로 사용해도 된다는 식의 도입도 가능할 것이다. 이렇게 길이 등의 부피요소로서의 미분형식과 이변수 이상의 경우의 행렬식적 속성을 도입하여 형식적 계산방법이 개념을 구체화한다는 것을 보여주는 것은 중요한 교육적 효과라고 생각된다. 또한 이러한 설명은 달리 이해할 방법이 없어서 어려워하는 그린 등의 적분정리와 포텐셜함수의 이론 등을 조망해주는 좋은 관점으로 작용할 것이다. 우리도 새로운 방법론을 적극적으로 도입하여 수학과 주변학문의 괴리를 해소하고 효율적인 교육에 대한 투자를 게을리하지 말아야 할 것이다.

본 논문에 대한 여러 가지 중요한 조언을 주신 심사위원들께 감사드립니다.

참고 문헌

1. Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A., *Élie Cartan (1869-1951)*, Translations Math. Monographs, vol. 123, Amer. Math. Soc., 1993.
2. Cartan, É., *La géométrie des groupes de transformations*, J. Math. Pure Appl. (9) vol. 6 (1927), 1-119.
3. Cartan, É., *La Méthode du Repère Mobile, la Théorie des Groupes Continus et les Espaces Généralisés*, Hermann, 1935.
4. Cartan, É., *Les Systèmes Diffèrentiels Extérieurs et Leurs Applications Géométriques*, Hermann, 1945, 1971
5. Cartan, É., *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, Ann. École Norm. vol. 18 (1901), 241-411.
6. Cartan, É., Einstein, A., *Letters on absolute parallelism, 1929-1932*, Ed. R. Debever, Princeton University Press, 1979.
7. Chern, S.-S., Chevalley, C., *Élie Cartan and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 217-150.
8. Dieudonné, *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.

9. Hawkins, T., *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics*, 1869-1926, Springer, 2000.
10. Katz, V. J., *Change of Variables in Multiple Integrals: Euler to Cartan*, Mathematics Magazine, 55 (1982) No. 1, 3-11.
11. Griffiths, P., Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations, Birkhäuser, Boston, 1983.
12. 고관석, *호프의 삶과 업적에 대하여*, 한국수학사학회지 18 (2005) No. 2, 1-8.
13. 고영미, 이상욱, *폴 에르디쉬와 확률론적 방법론*, 한국수학사학회지 18 (2005) No. 4, 101-112.
14. 김성숙, *Kunihiko Kodaira*, 한국수학사학회지 13 (2000) No. 2, 13-22.

Élie Cartan and the Riemannian Geometry of 20th Century

Dept. of Math., Korea University **Young Wook Kim**
Dept. of Math., Korea University **Yuzi Jin**

Elie Cartan is one of the mathematicians whose works marked the development of geometry and algebra of 20th century. We illuminate his mathematical contributions which is familiar to the experts but is alien to most of the mathematicians in general. Also we elucidate some of his influences.

Key words: Élie Cartan, Lie groups, exterior differential systems, riemannian geometry.

2000 Mathematics Subject Classification: 01A50, 01A55, 01A60

접수일 : 2009년 4월 13일 수정일 : 2009년 5월 11일 게재확정일 : 2009년 5월 15일