한국수학사학회지 제22권 제2호(2009년 5월), 1 - 12

朝鮮 算書 算學啓蒙註解

서강대학교 수학과 홍성사
sshong@sogang.ac.kr

숙명여자대학교 수학과 홍영희
yhhong@sookmyung.ac.kr

朱世傑의 算學啓蒙은 조선 산학의 발전에 가장 큰 기여를 하였다. 19세기 중엽에 출판된 算學啓蒙註解를 조사하여 19세기 조선 산학의 발전을 연구한다. 洪正夏의 九一集의 方程式論과 서양 수학의 영향을 받아 구조적으로 算學啓蒙을 연구하여 저술한 算學啓蒙註解는 19세기 조선의 대수학 발전의 기초를 이룬 산서이다.

주제어 : 算學啓蒙註解, 19세기 朝鮮 算學, 算學啓蒙, 洪正夏, 九一集, 直指算法統宗

0. 서론

조선 산학에 가장 큰 영향을 끼친 산서는 **楊輝算法**(Yang Hui suan fa, 1274~1275), 朱世傑(Zhu Shi Jie)의 **算學啓蒙**(Suan xue qi meng, 1299), 安止齋(An Zhi Zhai)의 **詳明算法**(Xiang ming suan fa)인 것은 잘 알려져 있다. 전자의 세 산서중에서 특히 **算學啓蒙**은 天元術과 增乘開方法을 포함하여 나머지 산서와 달리 동양 산학에서 가장 중요한 방정식론과 구고술, 퇴타술 등의 발전에 큰 기여를 하였다. 중국에서 天元術이 잊혀지고 이에 따라 18세기 말 天元術이 재발견 될 때까지 이 분야에 관하여 조선 산학은 중국 산학과 독립적으로 발전을 이루었다.

조선에서 **算學啓蒙**에 대한 연구는 慶善徵(1616-?)의 **黙思集算法**, 洪正夏(1684-?)의 **九一集**에 나타난다. 慶善徵은 **算學啓蒙**의 方程正負門, 開方釋鎖門을 제외한 나머지 부분에 대한 연구를 하였다([4]). 洪正夏는 **九一集**의 卷之四의 毬隻解隱門, 缶瓶堆垛門, 倉囤積粟門, 卷之五의 句股互隱門, 卷之六 ~ 八 開方各術門에서 天元術을 활용하고, 또

增乘開方法을 현재 우리가 사용하고 있는 방법과 완전히 일치하는 것으로 정리하여 방정식 이론에 크게 기여 하였다. 黃胤錫(1729～1791)은 그의 **算學入門**에서 **算學啓蒙**을 인용하고, 洪大容(1731～1783)은 그의 **籌解需用**에서 **算學啓蒙**의 開方釋鎖門에서 취급한 문제들에 대하여 天元術을 이용하여 방정식을 구성하는 것은 제외하고 얻어진 방정식의 풀이를 天元解 절에서 취급하고 있다. **算學啓蒙**과 조선 산학의 관계에 대한 자세한 논의는 다음 기회로 넘긴다.

이 논문의 목적은 19세기 중엽 朝鮮에서 출판된 **算學啓蒙註解**의 분석을 통하여 조선 산학의 발전을 연구하는 것이다.

18세기 말부터 淸에서 다시 宋, 元대의 산학이 재발견되고 이에 대한 연구가 이루어진다. 특히 19세기 초에 朱世傑의 **四元玉鑑**(Si yuan yu jian, 1303)이 재발견 되어 羅士琳(Luo Shi Lin, 1774～1853), 沈欽裴(Shen Qin Pei) 등이 **四元玉鑑細草**(1829)를 저술하였다. **四元玉鑑**의 서문에 언급된 **算學啓蒙**은 이 후에 羅士琳이 金始振의 重刊本을 찾아서 교정하여 다시 출판하므로 淸에서 朱世傑의 업적을 완전히 이해하게 되었다.

18세기 중엽 서양 수학의 영향을 받은 淸의 산학이 조선에 들어오고, 또 19세기 중엽에 위에 언급한 宋, 元代의 산서와 함께 나머지 秦九韶(Qin Jiu Shao, 1202～1261), 李冶(Li Ye, 1192～1279)의 산서들이 조선에 들어와 李尙爀(1810～?), 南秉吉(1820～1869), 南秉哲(1817～1863) 등에 의하여 연구되므로 조선 산학의 발전에 많은 영향을 주었다. **算學啓蒙註解**는 李尙爀, 南秉吉 등에 의하여 저술된 것으로 추정된다.

算學啓蒙註解는 두 종류가 국립중앙도서관과 영남대학교 도서관에 남아 있다. 동일 저자의 것으로 보이지만 기술 방법과 부록으로 취급하고 있는 부분은 두 산서가 다르다. **算學啓蒙**에 대한 注는 기본적으로 같다. 洪正夏가 **算學啓蒙**을 연구하여 저술한 **九一集**을 가장 많이 인용하고, 또 程大位(Cheng Da Wei, 1533～1606)의 **算法統宗**(Suan fa tong zong, 1592)을 일부 인용하고 있다.

첫째 절에서 두 **算學啓蒙註解**를 비교한다.
둘째 절은 上卷 異乘同除門부터 下卷 方程正負門까지 달아 놓은 注를 조사한다.
마지막 절에서 下卷 마지막 부분인 開方釋鎖門의 注를 조사한다.

조선 산학에 관한 史料는 **韓國科學技術史資料大系 數學編**([3]), 중국 산학은 **中國科學技術典籍通彙**(Zhong guo ke xue ji shu dian ji tong hui) **數學卷**(Shu xue juan, [1])과 **中國歷代算學集成**(Zhong guo li dai suan xue ji cheng, [2])을 사용한다.
朝鮮과 中國의 算書로 참고문헌의 번호가 없는 경우 이들에 들어 있는 것을 뜻한다.

1. 算學啓蒙註解

전술한 대로 **算學啓蒙註解**는 두 판본이 있다. 앞으로 이 논문에서 이들을 각각 中央本, 嶺南大本으로 줄여서 나타내기로 하고, 또 **算學啓蒙**과 **算學啓蒙註解**는 각각 啓蒙, 註解로 나타내기로 한다.

中央本은 金始振의 庚子(1660) 重刊本 서문과 趙城의 서문을 싣고, 이어서 啓蒙에 들어 있는 總括의 일부분과 저자의 것이 함께 들어 있다. 그리고 **新編算學啓蒙註解抄**라는 제목을 달고 있다. 嶺南大本은 이들을 전혀 언급하지 않고 다만 **新編算學啓蒙註解**라는 제목으로 시작하였다.

中央本의 重刊本序의 마지막 부분에 "庚午重刊藏於學, 乙未校正, 壬寅輯書註解"가 들어 있다. 현재 우리가 가지고 있는 啓蒙은 國立中央圖書館에 소장된 판본과 [1]에 들어 있는 羅士琳이 교정하여 출판한 **算學啓蒙**(1839)과 [2]에 들어 있는 啓蒙 초판본과 王鑒(Wang Jian)이 羅士琳의 교정본에 추가로 그의 注를 달아 출판한 **算學啓蒙述義**(Suan xue qi meng shu yi, 1884) 등이다. 黃胤錫의 頤齋遺稿에 들어 있는 "題家藏數學啓蒙後"에 의하면 啓蒙의 庚子 重刊本에는 金始振의 서문이 마지막에 들어 있다고 하였는데, 中央圖書館에 소장된 판본이 그렇게 되어있다. 다만 羅士琳이 重刊本을 교정한 것과 이 판본과 비교하면 일부는 교정이 이미 되어 있는 것으로 보아 중앙도서관 소장본이 중간본으로 보기는 어렵다. 이 서문에는 "乙未校正"이라는 문구가 들어 있지 않다. 따라서 "乙未校正"은 羅士琳이 교정하면서 넣은 것으로 乙未年은 1832년으로 보아야 한다. 다만 "庚午重刊藏於學"의 庚午年은 王鑒의 述義와 中央本에 이 문구가 함께 들어 있는데 언제인지 알 수 없다. 따라서 壬寅은 1842년으로 추정한다. 羅士琳의 校正本을 저자들이 보고 이에 더하여 注를 단 것으로 추정된다.

嶺南大本은 啓蒙의 門과 해당되는 문항의 번호를 넣고 바로 "解曰"로 시작하는 注를 넣은 것과 달리 中央本은 해당되는 啓蒙의 문제와 또 啓蒙의 "術"과 "按"을 모두 싣고 이어서 嶺南大本과 같이 注를 달고 있다. 注의 내용은 기본적으로 같지만 注안에서 순서는 여러 곳에서 바뀌어 있다. 또 注를 전혀 달지 않은 문항들도 中央本의 之分齊同門에 들어 있다.

中央本은 附錄으로 **算法統宗**의 3차방정식 문제의 숫자를 변환한 것들과 句股術에 관한 일반론으로 顧應祥(Gu Ying Xiang)의 **句股算術**의 句股論說을 인용한 **算法統宗**을 재인용하고 이어서 **算法統宗**의 문항들을 차례로 인용하고, 이 부분의 상단에 **九一集**의 雜錄에 들어 있는 洪正夏와 何國柱와의 대담 부분을 인용하였다. 물론 이는 후에 첨가되었을 수 있다. 이에 반하여 嶺南大本은 句股 절에서 **數理精蘊**(Shu li jing yun, 1723) 下篇 卷12를 인용하였다. 이어서 卷之五의 句股互隱門 78問의 대부분을 인용하였다. 같은 卷의 望海島術門 6問에서 1, 3問을 제외하고 그 나머지를 인용하였다.

또 凡例 부분에서 11乘方까지 들어있는 明開方帶從式을 4乘方까지 인용하고 그 나머지는 "推之"로 처리하고 또 開方求廉率正負圖를 인용하여 이를 참고하면 된다고 하였다. 마지막으로 開方各術이라는 제목을 달고, 앞에서 언급한 天元術을 이용하여 방정식을 구성하는 문항들을 대거 인용하였다. 주로 卷之六～八의 開方各術門에서 가장 많이 인용하였지만, 그 나머지 모든 卷에서 고루 문항들을 선택하여 인용하였다. 문항의 순서는 약간씩 변경되어있다. 마지막으로 雜錄에 들어 있는 河國柱의 외접정8각형, 내접정5각형의 변을 구하는 문제를 인용하고, 周公으로 시작하는 문제와 日去地圖를 함께 인용하였다. 따라서 洪正夏의 句股術과 方程式論을 철저하게 연구한 후에 저자가 註解를 저술한 것을 알 수 있다. 3절에서 이에 대하여 자세히 논한다. 조선 산서를 이와 같이 철저하게 연구하고 또 인용한 예는 조선 산학에서 거의 찾을 수 없다. 趙義純의 저서 **算學拾遺**에 南秉吉이 쓴 서문에 "余嘗有輯古演段 測量圖解 算學正義 等諸書之述 又取劉氏句股術要 洪氏 **九一集** 李生 算學管見及翼算 印而布之 其於象數雖無獨得之見 亦可爲學之勤而好之篤矣"라고 하여([7]) **九一集**에 대한 언급을 한 것을 보면 註解가 南秉吉이나 그와 함께 연구한 李尙爀과 공동으로 저술된 것으로 추정된다.

2. 異乘同除門부터 方程正負門

이 절에서는 開方釋鎖門을 제외한 나머지 門들에 대한 注를 조사한다. 각 門에서 취급된 문항 번호는 아래와 같다.

上卷 異乘同除門 : 第1問; 庫務解稅門 : 第10, 11問; 折變互差門 : 第2, 8, 12問
中卷 田畝形段門 : 第13, 15, 16問; 倉囤積粟門, 雙據互換門 : **算法統宗** 인용
求差分和門 : 第9問; 差分均配門 : 第7, 10問; 商功修築門 : 第12, 13問;
貴賤反率門 : 第2, 3問
下卷 之分齊同門 : 第5, 7問; 堆積還元門 : 第1～8, 14問
盈不足術門 : 第1, 4, 6, 7, 8, 9問; 方程正負門 : 第5, 8, 9問

異乘同除門은 비례사율, 즉 $a:b=c:x$와 $ax=bc$가 동치라는 사실을 이용하여 문제를 해결하는 것이다. 저자는 이를 $x=\dfrac{b}{a}\times c=\dfrac{bc}{a}$로 이해하고 있는데 異乘同除와 같은 뜻이지만 비례식에서 바로 나오는 답을 單價×個數로 설명하고 있다. 나머지 門들도 그 제목에서 알 수 있듯이 堆積還元門과 方程正負門의 마지막 두 문항을 제외하고 나머지 문항들은 모두 비례나 1차방정식의 문제들이다. 미지수를 나타내는 방법이 정립되기 전에 이들을 취급하게 되어 많은 어려움을 겪게 되었다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 1차방정식 $ax=b$에서 a, b를 정하는 일이 매우 어려워 이를 해결하는 방법으로 盈不足術과 같이 이중가정법(Rule of double false position)이 **九章算術**(Jiu zhang suan shu)에 이미 도입되었다. 또 a, b 둘 중에 하나가 결정되면 이중가정법 대신에 단순가정법(Rule of (single) false position)으로 해결할 수 있다. 예를 들어 庫務解稅門 第11問은 $x(1-\frac{1}{30})(1-\frac{3}{50})=3000$을 해결하는 것인데 이 경우 통분을 생각하여 $x=50\times30$이라고 하면 구하는 식에서 결과가 1363이 되어 비례식으로 문제를 해결한다. 물론 위의 식에서 바로 방정식은 $\frac{1363}{1500}x=3000$으로 문제를 해결할 수 있는데 위의 식이 없기 때문에 이와 같은 어려움을 겪고 있다. 上卷의 문제들은 모두 같은 종류들이다.

中卷의 田畝形段門 第7問은 삼각형의 세 변과 높이를 주고 넓이를 구하는 문제인데 啓蒙에서 준 문제가 실제로 직각삼각형이 되어 주어진 높이를 사용하지 않고 넓이를 구할 수 있음을 지적하고 있다. 저자는 높이를 中垂線으로 나타내었는데 이는 **數理精蘊** 등 서양 수학의 영향을 받은 후에 나타나는 용어이다. 第8問은 方五斜七, 즉 정사각형의 한 변이 5이면 대각선은 7, 즉 $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$이라 할 때 정8각형의 넓이를 구하는 문제이다. 두 쌍의 대변을 연장하여 생기는 정사각형의 넓이에서 새로 만들어 진 네 귀퉁이의 삼각형의 넓이의 합이 주어진 한 변으로 이루어진 정사각형의 넓이와 같은 것을 이용하여 구한다. 그러나 方五斜七로 계산하면 이들의 넓이가 같지 않음을 저자는 지적하고 있다.

第9問은 環田의 내외원의 둘레 c_1, c_2를 주고 넓이 $\frac{c_2^2}{4\pi}-\frac{c_1^2}{4\pi}=\frac{c_2+c_1}{2}\times\frac{c_2-c_1}{2\pi}$을 구하는 문제인데 π의 값, 즉 古率$(=3)$, 徽率$(=\frac{157}{50})$, 密率$(=\frac{22}{7})$에 따라 계산하면 된다. $\frac{c_2-c_1}{2\pi}=r_2-r_1$, 즉 두 반지름의 차(= 實經)인데 啓蒙의 문제는 古率일 때 실경을 주고 있다. 이상에서 저자는 간단하지만 기하에 대한 연구가 이루어 졌음을 추정할 수 있다. 倉囤積粟門과 雙據互換門은 모두 **算法統宗**에서 인용하고 있다 (see p. 2-1281, 2-1263 [1]).
求差分和門 第9問은 等差數列의 제2항 까지의 합과 마지막 3항의 합을 주고 각 항을 구하는 문제이다. **張丘建算經**(Zhang Qiu Jian suan jing)에 들어 있는 방법을 들고, 또 초항을 x, 공차를 d라 하면 $2x+d=3; 3x+15d=2$에서 d, x를 쉽게 구할 수 있는데 이를 문자 x, d를 사용하지 못한 채 해결하려고 하여 어려움을 겪고 있다. 실제로 또 다른 예를 첨가하여 독자들을 이해시키려고 노력하였다. **算法統宗**을 인용하고 있다. 差分均配門도 모두 단순가정법으로 설명하였다. 商功修築門은 모두 둘레와 반경의 관계에 관한 注이다. 貴賤反率門은 **九章算術** 粟米章에 도입된 문제들이다. 이에 대한 注는 [12]의 p. 139～140을 참조한다.

下卷의 之分齊同門의 자리는 매우 이상하다. 왜냐하면 분수계산에 관한 것으로 **九**

章算術 方田章에 들어 있는 것이고, 이미 앞의 두 권에서 사용된 것들이기 때문이다. 嶺南大本은 단지 平分에 관한 第5問만 취급한 셈이다. 第7問은 특별한 의미가 있는 것이 아니다. 그런데 中央本은 之分齊同門 9問 모두를 인용하고 있다. 아마도 嶺南大本이 먼저 저술되고 이를 공부하여 抄라는 제목으로 만든 책이 中央本일 가능성을 나타내고 있는 대목이다.

堆積還元門은 9～13問을 제외하고 나머지 문제를 모두 다루고 있다. 조선의 堆垜術에 대하여 [5]를 참조하고 자세한 내용은 생략한다. 第1問 교초적부터 시작하여 이를 등차수열의 합을 얻어내는 방법으로 설명하고, 다시 그림으로 보충하고 있다. 圓箭, 方箭 모두 등차수열로 이해하고, 또 圓箭은 6개의 茭草積으로 설명하였다. 第3問 方箭에 대하여 저자는 혼동하고 있다. 方箭은 두 가지 형태가 있다. 가운데 心箭이 한 개 있고 그 다음에 정사각형 모양으로 차례로 늘어놓는 급수 $1+\sum_{k=1}^{n}8k=(2n+1)^2$형태와 心箭을 두지 않은 정사각형 모양으로 배열한 모양으로 이 합은 n^2인데, 전자의 경우 外周가 $8n$이고, 후자의 경우는 $4(n-1)(2\le n)$이다. 第3問은 후자의 경우인데 전자의 경우로 설명하여 틀린 답을 얻어내고, 이어 전자의 경우인 外周가 16인 경우를 예로 들었다. 三角垜, 四角垜의 합에 대한 식을 茭草積과 같이 그림을 그려 설명하였지만 특별한 의미는 없다. 第4問 三角垜의 합이 15,180인데 이 합$(=\alpha)$을 주고 항 수를 구하는 문제를 첨가하였다. 啓蒙에서 三角垜의 합은 $S_n^2=\dfrac{n\{n(n+3)+2\}}{6}$로 되어 구하는 방정식은 $n\{n(n+3)+2\}=6\alpha$, 즉 $n^3+3n^2+2n=6\alpha$를 풀어야 한다고 하였다. 그러나 저자의 해법은 $S_n^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$를 사용하여 $n(n+1)(n+2)=6\alpha$를 다음과 같은 방법으로 풀고 있다. 初商을 40으로 하고, $40, 40+1, 40+2$를 차례로 늘어놓고 이들을 곱하여 實에서 빼면 餘實$(=22{,}200)$이 된다. 또 이 세 수를 둘 씩 짝을 지어 곱한 수들을 합한 것이 次商을 위한 방정식의 餘方法$(=5042)$, 즉 1차항의 계수가 된다. 次商을 위한 2차항의 계수, 즉 餘廉法은 구하지 않고 餘實과 餘方法을 비교하여 次商으로 4를 구하고 $4\times\{5042+4(40+41+42)+4^2\}=22{,}200$이 되어 구하는 해가 44임을 보였다. 실제로 이 방법은 $x(x+a)(x+b)=c$의 경우 항상 통용되는데 이는 增乘開方法으로 쉽게 확인할 수 있다. 이 방법을 사용하여 四角垜의 경우도 해결할 수 있다고 하였다. 구의 부피는 **九章算術**에 도입된 것을 그대로 사용하고 또 이를 설명하려고 하였다. 나머지 두 문제는 전술한 第4問과 같이 급수의 합을 주고 항의 수를 구하는 문제이다. 中央本은 第8問인 茭草積의 문제를 다루고 嶺南大本은 전술한 第4問의 예를 들고 있다. 두 本 모두 방정식을 구하고 增乘開方法을 사용하여 해를 구하였다. 현재와 완벽하게 일치하는 조립제법을 사용하였는데 이 부분은 다음 절에서 함께 논하기로 한다. 嶺南大本은 茭草積의 문제와 함께 제곱근과 세제곱근을 구하는 것을 추가로 예를 들어 해설하고, 또 제곱근과 세제곱근의 경우 일차보간법도 함

께 해설하였다. 第14問은 三角垜와 四角垜의 합과 두 항수에 대한 조건을 주고 이들을 구하는 문제이다. 이 문항은 天元術을 사용하는 편이 훨씬 나은데 실제로 해설에서 三角垜, 四角垜의 항수를 天元一로 놓아 방정식을 얻어 이를 增乘開方法으로 해결하였다. 그러나 "按" 항에서 이를 天元術을 사용하지 않고 설명하려고 하였다. 저자가 天元術에 익숙하지 않은 것을 나타내고 있다. 中央本은 이어서 **九一集** 卷之四의 缶瓶堆垜門의 第17, 18問을 예로 인용하였는데 嶺南大本은 이를 생략하였다.

盈不足術門은 전술한 대로 1차방정식 $ax=b$의 표현이 어려운 시기에 만들어진 해법인데 저자는 盈不足術을 피할 수 있는 경우 바로 해를 구할 수 있음을 보여주려고 하였다. 第1問은 전통적인 방법에 대한 해설이고 또 a, b를 구한 후 x도 구할 수 있음을 언급하였다. 第4問은 $16a=b+57$, $12a=b-15$의 경우인데 a를 구한 후 위의 첫째 식에 대입하여 b를 구하였다. 第6, 9問의 경우도 啓蒙의 盈不足을 사용하지 않고 연립1차방정식으로 이를 해결하였다. 그러나 方程正負門에 들어 있는 行列의 기본열연산(elementary column operation)을 사용하지 않고 소거하는 방법으로 해결하였다. 第7問은 a, b를 쉽게 구할 수 있는데, 이를 "按"으로 넣어 설명하는데 天元術과 같이 "立一算爲元酒率"이라 하여 x를 一算으로 하여 문제의 조건에서 a, b를 구하여 a를 法, b를 實로 하여 1차방정식을 해결하였다.

方程正負門 第44問의 경우 기본열연산을 사용하지 않고 문제를 해결하였다. 계수가 특별한 경우로 세 방정식을 합하여 $x_1+x_2+x_3=204$를 얻었다. 어떻게 구하였는지 모르지만 $x_2=\dfrac{204}{3}$로 구하여 문제를 해결하였다. 第8, 9問은 啓蒙에서 처음으로 句股術의 문제를 다루는데 이를 연립방정식의 문제로 句弦和, 股弦和를 미지수로 하는 연립방정식을 풀어 이들을 구한 후 句, 股, 弦을 구하는 문제이고, 第9問은 啓蒙에 최초로 天元術을 사용하여 해결하였다. 天元術을 이용하게 되어 句股術은 새로운 전기를 맞게 되는데 조선 산학은 이를 받아들일 수 있었고 중국 산학은 啓蒙이 잊혀지는 바람에 두 나라의 산학은 다른 길을 걷게 된다([8]). 第9問의 경우 두 째 식의 계수가 모두 분모가 7인 식인데, 이를 소거하기 위하여 양변에 49를 곱하고 있다. 이 문제 역시 天元術을 사용하지 않고 第8問과 같이 해결할 수 있음을 다음과 같이 해설하였다.

句, 股, 弦을 각각 a, b, c라 하고 $a+c=\alpha$, $b+c=\beta$라 하면

$\alpha^2+\beta^2=3c^2+2ac+2bc$, $2(\alpha+\beta)=4c+2a+2b$에서 $2(\alpha+\beta)c=c^2+\alpha^2+\beta^2$을 얻어, 弦에 대한 방정식 $-x^2+2(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\beta^2$을 얻어 내었다. 天元術에 의한 방정식의 구성과 비교하면 좋을 것이다. 이와 같은 방법은 南秉吉의 **劉氏句股術要圖解**에 자주 나타난다([9]). 第8問과 함께 사용된 등식 $(a+b+c)^2=2\alpha\beta$에서 $a+b+c$를 구할 수 있다고 하면서 이어서 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-(\beta-\alpha)}$로 구할 수 있다는 것도 설명하였는데 근호 속이 바로 $2\alpha\beta$이기 때문이라고 하였다. 불필요한 해설이다.

3. 開方釋鎖門

開方釋鎖門은 모두 34問으로 이루어졌는데 中央本은 모든 문항을 다루고 있고, 嶺南大本은 第4, 9問만 생략하고 있다. 따라서 저자가 방정식론에 관심을 가지고 註解를 저술한 것으로 보인다. 실제로 **九章算術** 이후 새로운 발전을 이룬 것은 방정식론과 이에 따른 句股術, 堆垜術의 발전이라고 하여도 크게 틀리지 않다. 방정식론은 방정식의 구성과 해법으로 나뉘는데 구성은 天元術에서 시작하여 四元術로 정리가 되고 해법은 **九章算術**의 少廣章의 제곱근, 세제곱근을 구하는 방법에서 시작하여 增乘開方法으로 정리되었다. 발전 단계를 아래에 간단히 기술한다. 논의를 줄이기 위하여 2차방정식 $ax^2+bx=c$를 가지고 기술한다.
初商을 α로 하고 次商 y를 구하는 방법으로 단계가 나누어진다.

가장 간단한 방법으로 $a(\alpha+y)^2+b(\alpha+y)=c$에서 $ay^2+(b+2a\alpha)y=c-(a\alpha^2+b\alpha)$를 얻는다. 일반적인 경우 $(\alpha+y)^n$을 풀어야 하는데 이를 위하여 賈憲(Jia Xian)이 도입한 이항정리, 즉 Pascal triangle이 12세기에 도입되었다. **九章算術**은 산대를 이용한 계산법으로 初商, 次商을 모두 자릿수만 구하기 때문에 새로 만들어 진 계수의 자릿수를 옮겨야 하였다([12]). 增乘開方法은 $ax^2+bx-c=a'(x-\alpha)^2+b'(x-\alpha)+c'$으로 변형하여 $x-\alpha=y$로 놓아 조립제법을 되풀이 사용하여 a', b', c'을 구하여 次商 y에 대한 방정식을 얻어내는 것으로 秦九韶의 **數書九章**(Shu shu jiu zhang)에 처음 나타난다. 이때도 자릿수만으로 나타내었지만 실제로 계산은 α를 가지고 계산하였다. 두 방법은 같은 결과를 얻어내지만 이들을 정확히 이해하지 못하여 여러 가지 변형이 나타난다. 전 절 堆積還元門 第4問의 해법도 한 예이다. 특히 增乘開方法은 조립제법을 생각하면 天元術의 다항식 표시가 제대로 이해되어야 한다. 開方釋鎖門의 第1, 2問은 제곱근, 세제곱근을 增乘開方法을 정확히 사용하여 구하였다. 다만 자릿수를 계산하는 방법을 사용하여 "方法 一退, 廉法 再退" 등을 하여 次商을 위한 방정식을 구하였다. 나머지 방정식들에 대한 해법은 언급하지 않았지만 이들 두 문항에서 차상을 구하는 방정식의 계수를 정확히 나타내어 이를 그대로 적용하면 되므로 생략하였다. 洪正夏의 **九一集**은 이를 정확히 이해하여 일반 방정식에 대한 增乘開方法을 정확히 이해하여 "一退, 再退"를 할 필요가 없는 것을 나타내었다. 다만 啓蒙과 비교하기 위하여 注로 "從方 一退, 隅法 二退"를 첨가하였다. 秦九韶의 **數書九章**을 접하지 않고도 그는 완벽한 增乘開方法을 얻어내었다. 저자는 洪正夏의 **九一集**에 따른 增乘開方法을 해설로 넣고 있는데, 이 때 불필요한 "從方 一退, 隅法 二退"마저 생략하여 현재 우리가 사용하는 조립제법으로 방정식의 해를 구하였다. 한편 第1, 2問에서 **算法統宗**의 방법을 인용하고 있는데 이는 珠算으로 계산하는 방법으로 특별한 의미는 없다. 第2問은 $\sqrt[3]{17576}$을 구하는 문제인데 저자는 이를 $x(x-0)(x-0)=17576$으로 보아, 堆積還元門 第4問의 방법으로 해를 구하였다. 第5問에서 三乘方 이상을 "三乘方積數 而三次乘

之 故曰三乘方 三乘方其形不知如何模樣 只是取數而已”라 하여 기하적으로 접근할 수 없지만 대수적으로 접근할 수 있음을 지적하고, 또 $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$ 로 계산할 수 있음을 추가하였다.

第8問은 전통적인 2차방정식의 문제로 직사각형의 두변 $a, b\ (a<b)$의 합($=92$)과 곱($=2052$)을 주고 두 변을 구하는 문제이다. 전술한 대로 增乘開方法을 사용하여 방정식의 해를 구하였다. 흥미 있는 일은 a, b 모두 $x^2-92x+2052=0$의 두 근인데, a, b를 각각 $-x^2+92x-2052=0$, $x^2-92x+2052=0$의 근으로 구하였다. 또 **九一集** 卷之六 第24問에 들어 있는 益積術을 그대로 인용하였다. 이는 **楊輝算法**에 들어 있는 益積開方術이다([10]). 이는 전술한 방정식 해법의 前者의 변형이다. 저자는 이에 그치지 않고 增乘開方法을 사용하는데 a를 구하는 경우에 初商을 10, 次商을 20, 그 다음 次商을 8을 구하여 이들의 합으로 근을 구하였다. 또 b의 경우 初商을 90, 次商을 -30, 그 다음 次商을 -6을 구하여 그들의 합으로 근을 구하였다. 저자는 조립제법에서 그 때까지 양수만 사용하였는데 음수로 확장할 수 있음을 보였다. 그리고 나서 이들 방법이 서로 다르지만 “以究則於*正負消長之理* 似可易曉 故幷著焉”라 하여 正負消長의 법칙만 제대로 이해하면 모두 같다고 하였다. 음수에 대한 增乘開方法은 李銳(Li Rui, 1769~1817)의 **開方說**(Kai fang shuo, 1819)에 들어 있는데 이 책이 조선에 들어 온 것은 白芙堂算學叢書(1873)에 들어 있는 판본이다. 한 편 이 방법은 羅士琳의 **四元玉鑑細草**(1829)의 부록으로 들어 있는 易之瀚(Yi Zhi Han)의 附增 補天元四元各例에 들어 있다. 李尙爀과 南秉吉이 이를 연구하였다([6]). 第10問은 第8問과 달리 두 변의 차를 조건으로 준 문제로 第8問과 같은 해설을 첨가하였다. 啓蒙은 第8問에서 古法을 "按"에서 논하고 나서 天元術을 사용하여 방정식을 구성하여 해를 구하는 것이 좋다는 것을 포함시키고 있는데, 註解는 第10問에서 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$를 사용하여 합을 구하고 합과 차에서 근을 구하는 古法을 언급하였다. 第9, 12問에서 次商을 위한 방정식의 1차항을 구하는데 “倍之” “倍方法” 등으로 나타내었다. 第12問에서 이 방법을 舊法이라 하여, 저자가 **九章算術**에 기초한 방법을 여전히 사용하고 있는 것을 알 수 있다. 실제로 增乘開方法을 사용하여 해를 구하면서도 演段圖는 이 방법을 나타내는 것을 넣고 있다. 第18問에서 방정식 $ax^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$의 근을 $\dfrac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4a\alpha\beta}}{2a}$ 와 $\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha+\beta}{2})^2-a\alpha\beta}}{a}$로 구하였다. 실제로 $a=1$인 경우 古法으로 근을 구하는 것이 근의 공식이지만, 저자는 일반 2차 방정식의 근의 공식을 사용하였다. 조선 산서에 최초로 나타난 근의 공식이다.

이상과 같이 해법은 여러 가지 방법으로 注를 달고 있는데 그 나머지는 방정식의 구성에 관한 注들로 이루어 졌다. 第17問은 원에 내접하는 정사각형을 주고 餘積과 弧矢($=s$)를 주고 원의 지름($=x$)과 사각형의 한 변($=y$)을 구하는 문제이다. 方五斜

七을 사용하면 $x=\frac{7}{5}y$, $x-y=2s$에서 $x=7s$, $y=5s$를 구할 수 있음을 지적하였다. 그런데 이를 $x=\sqrt{7^2\times s^2}$, $y=\sqrt{5^2\times s^2}$으로 설명하였다. 그 나머지 문제들의 구성에서 啓蒙의 術 부분은 모두 天元術을 사용하여 방정식을 구성하였는데 이와 차별하기 위한 것인지는 모르겠지만 天元術을 사용하지 않고 演段圖를 사용하여 방정식을 구성하는 것을 해설하고 있는데 물론 啓蒙의 방법이 더 좋은 것이다. 第22問은 $b^2-a=\alpha$, $a^2-b=\beta$에서 a, b를 구하는 문제이다. 이를 등식
$\beta^2-\alpha=(a^2-b)^2-(b^2-a)=a^4-2a^2b+a$, $-2a^2b=2(a^2-b)a^2-2a^4=2\beta a^2-2a^4$에서 방정식을 구성하였다. 방정식을 미리 알지 못하고 이와 같이 구성 하는 일은 매우 어려운 것으로, 天元術에 의한 구성과 비교하면 매우 번거로운 방법이다.
第25問은 세 항 x_1, x_2, x_3으로 이루어진 등차수열의 합$(=\alpha)$과 각 항의 제곱의 합 $(=\beta)$을 주고 각 항을 구하는 문제이다. 啓蒙에서는 중항은 $\frac{\alpha}{3}$이므로 공차를 天元一로 놓고 방정식을 구한다. 저자는 $x_1^2=x_1x_2-dx_1$, $x_2^2=x_2^2$, $x_3^2=x_2x_3+dx_1+2d^2$을 演段圖를 통하여 보이고, 이들을 합하여 $2d^2=\beta-68\alpha^2$을 얻고 있다. 역시 번거로운 방법이다. 이와 같은 방법은 南秉吉의 **劉氏句股術要圖解**에 자주 나타난다([9]).

4. 結論

算學啓蒙은 世宗대 이후에 거의 잊혀진 상태이다가 1660년 金始振이 重刊本을 출판하여 다시 연구가 시작되어 洪正夏에 의하여 그 내용이 대폭 확대되고 특히 그의 방정식론과 이에 따른 句股術은 18세기 초 동양 수학에서 가장 우수한 업적이 되었다. 洪正夏 이후에 조선 산학은 서양 수학의 영향, 특히 **數理精蘊**의 영향을 받아 전통적인 산학이 더 이상 발전하지 못하였다([11]). 그러나 19세기 중엽 宋, 元代의 秦九韶, 李冶의 산서와 함께 朱世傑의 **四元玉鑑**이 조선에 들어오게 되고, 또 이를 **數理精蘊**에 들어 있는 결과와 비교하여 오히려 宋, 元代의 산학이 더 우수하다는 사실을 알게 되었다. 특히 方程式論과 堆垛術 등에 대한 업적들은 조선 산학자들에게 새로운 전기를 주게 되었다. 이 때 서양 수학을 연구한 조선 산학자들은 洪正夏의 **九一集**을 함께 연구하여 **算學啓蒙**에 대한 註解를 저술하게 되었다. 따라서 수학적 원리와 논리를 가지고 **算學啓蒙**을 연구하게 되어 방정식론, 즉 방정식의 구성과 근을 구하는 문제를 추가하여 **算學啓蒙**을 19세기 산서로 재정리하였다. 宋, 元代의 산서에 접근할 수 있는 산학자들과 내용의 전개과정을 모두 종합하면 저자는 南秉吉, 李尙爀 등에 의하여 초기에 연구된 결과를 모두 알고 있는 산학자가 틀림없다. 물론 이들 두 사람에 의하여 저술되었을 가능성도 배제할 수 없다. 2차방정식의 근의 공식, 음의 근을 구할 수 있는 방법 등은 19세기 조선 산학의 발전에 크게 기여할 수 있는 계기가 되었을

것이다. 다만 天元術보다 借根方이나 전통적인 방법으로 방정식을 구성하는데 익숙한 저자가 번거로운 방법으로 구성한 것을 보면 宋, 元代의 산학을 충분히 연습하지 않은 상태에서 저술한 산서로 추정된다. 그러나 이를 계기로 하여 후에 **翼算**이나 **算學正義** 등의 업적을 얻어낼 수 있는 기틀을 마련하였을 것은 틀림없다.

감사의 글 嶺南大學校 圖書館에서 **算學啓蒙註解**를 구해주신 서강대학교 李在權 교수님과 영남대학교 李在原 교수님 두 분 형제께 깊은 감사의 뜻을 전합니다.

참고 문헌

1. *中國科學技術典籍通彙 數學卷 全五卷*, 河南敎育出版社, 1993.
2. *中國歷代算學集成*, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
3. *韓國科學技術史資料大系*, 數學編, 1卷 – 10卷, 驪江出版社, 1985.
4. 허민, 산학계몽과 묵사집산법의 비교, 한국수학사학회지 21(2008), No. 1, 1-16.
5. 홍성사, 朝鮮 算學의 堆垜術, 한국수학사학회지 19(2006), No. 2, 1-24.
6. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學과 四元玉鑑, 한국수학사학회지 20(2007), No. 1, 1-16.
7. 홍성사, 홍영희, 南秉吉의 方程式論, 한국수학사학회지 20(2007), No. 2, 1-18.
8. 홍성사, 홍영희, 김창일, 18世紀 朝鮮의 句股術, 한국수학사학회지 20(2007), No. 4, 1-22.
9. 홍성사, 홍영희, 김창일, 19世紀 朝鮮의 句股術, 한국수학사학회지 21(2008), No. 2, 1-18.
10. 홍영희, 조선시대의 방정식론, 한국수학사학회지 17(2004), No. 4, 1-16.
11. 홍영희, 朝鮮 算學과 數理精蘊, 한국수학사학회지 19(2006), No. 2, 25-46.
12. K. Shen, J. N. Crossley, A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Arts*, Oxford University Press, 1999.

Chosun Mathematics Book Suan Xue Qi Meng Ju Hae

Department of Mathematics, Sogang University **Hong Sung Sa**
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University **Hong Young Hee**

Zhu Shi Jie's Suan Xue Qi Meng is one of the most important books which gave a great influence to the development of Chosun Mathematics. Investigating San Hak Gye Mong Ju Hae(算學啓蒙註解) published in the middle of the 19th century, we study the development of Chosun Mathematics in the century. The author studied western mathematics together with theory of equations in Gu Il Jib (九一集) written by Hong Jung Ha(洪正夏) and then wrote the commentary, which built up a foundation on the development of Algebra of Chosun in the century.

Key Words : San Hak Gye Mong Ju Hae(算學啓蒙註解), Chosun Mathematics in the 19th century, Suan Xue Qi Meng, Hong Jung Ha(洪正夏), Gu Il Jib(九一集), Suan Fa Tong Zong(算法統宗)

2000 Mathematics Subject Classification : 01A13, 01A25, 01A55, 12-03, 12E12

접수일 : 2009년 3월 31일 수정일 : 2009년 5월 11일 게재확정일 : 2009년 5월 13 일