

論文

액체-기체 2상 유동장의 정확하고 강건한 해석
Part 2: 전 마하수 영역 해석을 위한 예조건화

임승원*, 김종암**

Accurate and Robust Computations of Gas-Liquid Two-Phase Flows
Part 2: Preconditioned Two-Phase Schemes for All Speeds

Seung-Won Ihm* and Chongam Kim**

ABSTRACT

Two-phase RoeM and AUSMPW+ schemes are preconditioned for the simulation of all Mach number flows, which are generally of interest for many gas-liquid two-phase application problems, because of large speed of sound in liquid region and low speed of sound in mixture or gas region. Conventional characteristic based schemes lose their accuracy or robustness in low Mach number flows, because their numerical dissipation terms are scaled by speed of sound, which is too large compared with local velocity magnitude in a low Mach region. All speed versions of RoeM and AUSMPW+ reflect the eigenvalues of the preconditioned governing system, which have the same order of magnitude even in low Mach number region. From the asymptotic analysis, it is observed that the discretized system by the developed schemes is consistent with the continuum system in the incompressible limit. The numerical results show the accurate and robust behavior of the proposed schemes for all speed two-phase flows.

초 록

압축성 영역에서 개발된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+를 전 마하수 영역 해석을 위해 예조건화 하였다. 압축성 영역에서 개발된 풍상차분 수치기법들은 수치점성에서 음속을 포함하는 항들을 갖고 있는데, 이는 비압축성 영역에서 관련 수치점성 크기를 지나치게 크거나 작게 만들어 해의 정확도를 떨어뜨리거나 수치 불안정 현상을 일으킨다. 따라서 예조건화된 시스템 고유값을 수치점성에 고려하여 전 마하수 영역에서 해의 정확성을 확보하였고, 점근 분석을 통해 개발된 수치기법이 비압축 극한 영역에서 보존형 지배방정식과 일관됨을 확인하였다. 수치 예제들을 통해 예조건화된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+가 전 마하수 영역에서 합리적인 해를 도출함을 알 수 있었다.

Key Words : Preconditioning(예조건화), Asymptotic Analysis(점근 분석), RoeM, AUSMPW+, Two-Phase Flow(2상 유동), All Mach Number Flow(전 마하수 유동)

† 2008년 9월 4일 접수 ~ 2008년 12월 12일 심사완료

* 정회원, 서울대학교 기계항공공학부 대학원

** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부, 항공우주신기술연구소
교신저자, E-mail : chongam@snu.ac.kr
서울시 관악구 신림동 산56-1

1. 서 론

많은 2상 유동 문제들은 압축성에서 비압축성 영역이 혼재되어 있다. 이는 물에서의 음속이 약

1400-1500m/s인데 반해, 공기에서는 300-400m/s, 혼합류에서는 수십m/s로, 음속의 범위가 넓기 때문에, 비슷한 속도 범위라도 상(phase)에 따라 압축성과 비압축성 영역이 달라질 수 있기 때문이다. 따라서 수중 캐비테이션 문제와 같이 공학적인 응용 범위가 넓은 많은 2상 유동 문제들에서 압축성 및 비압축성 영역을 동시에 해석하는 수치 해석 알고리즘을 필요로 한다[1,2].

압축성 유체의 지배방정식을 이와 같이 넓은 범위의 마하수 영역에 적용하고자 하면, 저마하수 영역으로 갈수록 최대 고유값과 최소 고유값의 비가 매우 커져 수치해의 수렴성에 강건성 문제가 발생하게 된다. 수치해의 안정성을 확보하기 위한 시간 간격의 제약은 최대 고유값에 의존하여 결정되는데 반해, 전체 유동장이 수렴하기 위해서는 최소 고유값으로 전달되는 특성치의 정보까지 전 유동 영역에 전달되고, 수렴해야 하기 때문이다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 지배방정식 시스템의 예조건화에 대한 연구가 진행되어 왔으며, 다양한 예조건화 기법이 제안되었다[3-6].

한편, 압축성 영역에서 개발된 고유값 기반의 풍상차분 수치기법들은 저마하수 영역에서 해의 정확성이 떨어지거나, 불안정한 현상을 보이는 것으로 알려져 있다. 이는 저마하수 영역에서 수치 점성에 반영되어 있는 고유값이 유동 속도에 비해 지나치게 크기 때문에 나타나는 현상으로, 저마하수 영역에서는 예조건화된 시스템 고유값에 따라 풍상차분 수치기법의 고유값을 재조정해주어야 한다. 이와 같은 관점으로부터 Liou 등은 AUSM 계열 수치기법을 기체[7] 및 2상 유동[8]에서 예조건화 한 바 있다. Luo 등은 기체 역학의 HLLC 수치기법에서 예조건화된 시스템 고유값은 단순히 수치점성에 반영하는 방법으로 전 마하수 영역에서 안정하도록 수정하기도 하였다[9].

RoeM과 AUSMPW+는 충격과 안정적인 특성 외에도 전엔탈피 보존이라는 중요한 특징을 지니고 있으며, 해의 정확도와 강건성이 보장된 수치기법이다. 따라서 이들 수치기법으로 압축성에서 비압축성 영역이 모두 해석 가능해지면, 보다 넓은 범위의 물-공기 2상 유동 문제에 대해 수치해석이 가능하다. 본 연구에서는 기존 연구자들의 분석과 예조건화 전략에 따라, 압축성 영역에서 개발된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+ 수치기법을 전 마하수 영역으로 확장하고자 한다.

II. 지배 방정식

압축성 영역에서부터 저마하수 비압축성 영역

까지 단일 코드로 해석하기 위하여 Part 1의 지배방정식을 예조건화하였다. 점성력과 축대칭(S_{axi}), 상변화(S_{cav}) 항이 추가된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\Gamma}{J} \frac{\partial Q_p}{\partial \tau} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + S_{axi} + S_{cav} \quad (1)$$

원시변수 벡터 Q_p 와 비점성 플럭스 및 관련 변수의 정의는 Part 1과 같고, 상변화 항은 다음과 같다.

$$S_{cav} = [0, 0, 0, 0, \dot{m}^+ + \dot{m}^-]^T$$

압축성 형태로 표현된 지배방정식이 수렴하기 위해서는 시스템 고유값을 따라 전달되는 특성치들이 모두 수렴해야 한다. 그런데 저마하수에서는 속도와 음속의 크기 차이가 크기 때문에 해의 수렴성이 늦어진다. 이 점을 개선하기 위해 예조건화 행렬 Γ 를 도입하여 시스템 고유값들이 모두 같은 차수로 존재하도록 재조정한다. Γ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} & \frac{\partial \rho_m}{\partial Y_1} \\ \frac{u}{\beta} & \rho_m & 0 & u \frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} & u \frac{\partial \rho_m}{\partial Y_1} \\ \frac{v}{\beta} & 0 & \rho_m & v \frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} & v \frac{\partial \rho_m}{\partial Y_1} \\ \frac{H}{\beta} - 1 & 0 & 0 & \rho_m + H \frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} & H \frac{\partial \rho_m}{\partial Y_1} \\ \frac{Y_1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & \rho_m + Y_1 \frac{\partial \rho_m}{\partial Y_1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

위 식에서 가상 압축성 계수 β 대신 $\frac{\partial p}{\partial \rho_m}$ 이 사용되면 $\Gamma = \Gamma_e$ 가 되어, 예조건화 되지 않은 본래 시스템으로 돌아간다.

예조건화 된 시스템의 변경된 고유값은 다음과 같다.

$$\lambda(\Gamma^{-1} \frac{\partial E}{\partial Q_p}) = U, U, U, U' + D, U' - D \quad (3)$$

$$U' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c'^2}{c^2} \right) U$$

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{c'^2}{c^2} \right) U^2 + 4c'^2 (n_x^2 + n_y^2)}$$

$$\frac{1}{c'^2} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial h_m}$$

β 또는 c' 에 대한 정의는 연구자들마다 다소 차이가 있으나[3-6], 주요 목적은 c'^2 값이 $O(V^2)$ 이 되도록 함으로써 시스템 고유값이 모두 같은 차수가 되도록 하는데에 있다. ($V^2 = u^2 + v^2$) 본 연구에서는 $|M| \leq 1/a_k$ 인 영역에서 저마하수로 가면서 고유값이 연속적으로 변화하도록 다음과 같이 c'^2 을 정의하였다. 이것은 Li 등의 방법[10]과 유사하나, 임의의 마하수 구간에서도 미분 가능하도록 만든 것이다.

$$c'^2 = a_2 \times c^2 + (1 - a_2) \times \max(V^2, (0.1 V_{ref})^2) \quad (4)$$

$$\text{여기서 } a_2 = \frac{1}{2} \left(\sin(\pi a_1 - \frac{\pi}{2}) + 1 \right)$$

$$a_1 = \min(1, a_0 |M|)$$

예조건화를 하고자 할 때에는 a_0 에 통상적으로 1~10의 값을 사용하였으며, a_0 에 매우 큰 값을 넣어주면 예조건화 되지 않은 본래 시스템으로 돌아오게 된다.

한편 식 (1)에서 ξ 방향의 점성 플럭스 E_v 는 다음과 같다.

$$E_v = [0, n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy}, n_x \tau_{xy} + n_y \tau_{yy}, \quad (5)$$

$$n_x (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + k_e \frac{\partial T}{\partial x}) +$$

$$n_y (u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + k_e \frac{\partial T}{\partial y}), 0]^T$$

이 때 2상 혼합류에서 점성 및 열역학적 계수는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$k_e = \left(\frac{\mu_m}{Pr_m} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) Cp_m \quad (6)$$

$$Cp_m = \Sigma Y_i Cp_i \quad (7)$$

$$\mu_m = \Sigma \alpha_i \mu_i \quad (8)$$

혼합류의 Prandtl 수 $Pr_m = \Sigma \alpha_i Pr_i$ 과 같이 정의되며, 각 상에서 $Pr_g = 0.71$, $Pr_l = 6.0$ 이다. 난류 Prandtl 수 $Pr_t = 0.9$ 를 사용하였다. 정압비열은 각각 $Cp_g = 1003.5 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$, $Cp_l = 4180. \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ 이고, 각 상의 점성계수는 $\mu_g = 1.85 \times 10^5 \text{ kg/ms}$, $\mu_l = 85.7 \times 10^5 \text{ kg/ms}$ 이다.

난류 문제의 경우 표준 2방정식 $k-\epsilon$ 모델을 사용하였다.

III. 예조건화된 공간 이산화 기법

압축성 영역에서 개발된 공간 이산화 기법은

물리적인 파의 전달 특성에 기초하여 수치점성이 설계되어 있다. 그런데 이러한 공간 이산화 기법을 저 마하수 영역에서 그대로 사용하게 되면, 지나치게 과도한 수치점성으로 해의 정확성에 큰 손상을 입기도 하고, 때로는 훌쩍 분리 문제와 같은 수치적 불안정 문제를 겪기도 한다. 따라서 식 (3)과 같이 변경된 고유값에 따라 공간 이산화 기법을 재설계할 필요가 있다.

3.1 Roe의 예조건화

원시변수 Roe 수치기법은 변경된 지배방정식 시스템에 따라 다음과 같이 예조건화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{1/2} &= \frac{1}{2} (E_L + E_R - \Gamma_{1/2} |\Gamma^{-1} A_p|_{1/2} \Delta Q_p) \\ &= \frac{1}{2} (E_L + E_R - \Gamma_{1/2} X |A| X^{-1} \Delta Q_p) \end{aligned} \quad (10)$$

수치점성부에서 변환행렬 Γ_e 대신 예조건화 행렬 Γ 가 사용됨으로써, 식 (3)의 예조건화된 시스템 고유값이 반영되었다.

3.2 RoeM의 예조건화

RoeM은 Roe의 FDS에서 유도된 수치기법이다. 하지만 예조건화된 Roe 수치기법에서부터 예조건화된 RoeM을 유도하는 데에는 어려움이 따른다. 예조건화된 Roe 수치기법에는 아음속 수치점성부에서 공통의 고유값이 2개로 나타나지 않아 HLLE 풀로 변환하기 어렵기 때문이다.

따라서 RoeM의 예조건화는 HLLC의 예조건화 [9]와 같이, 최종 형태에서 음속과 마하수를 재조정하는 방식을 따르고자 한다. 음속과 마하수가 직접적으로 드러나는 RoeM의 형태는 다음과 같다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{2} [E_L + E_R - \tilde{M} A_p \Delta Q_p + \quad (11)$$

$$\hat{c}(\tilde{M}^2 - 1) \Delta Q^* + g \hat{c}(1 - |\tilde{M}|) B \Delta Q^*]$$

$$B \Delta Q^* = (\Delta \rho_m - f \frac{\Delta p}{c^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{H} \\ \hat{Y}_1 \end{pmatrix} + \hat{\rho}_m \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \Delta H \\ \Delta Y_1 \end{pmatrix}$$

이 때 제어함수 f, g 는 Part I과 같다.

위 식에서 마하수 및 음속을 식 (3)으로 나타나는 변경된 시스템 고유값에 따라 다음과 같이 변경한다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{2} [E_L + E_R - \tilde{M}^* \Delta E + \quad (12)$$

$$\hat{D}(\tilde{M}^{*2}-1)\Delta Q^*+g\hat{D}(1-|\tilde{M}^*|)B\Delta Q^{**}$$

$$B\Delta Q^{**}=(\Delta\rho_m-f\frac{\Delta p}{\hat{D}^2})\begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{H} \\ \hat{Y}_1 \end{pmatrix}+\hat{\rho}_m\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u-n_x\Delta U \\ \Delta v-n_y\Delta U \\ \Delta H \\ \Delta Y_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}^*=sign(\hat{M}^*)\times\min(1,|\hat{M}^*|), \hat{M}^*=\hat{U}'/\hat{D}$$

이제 변경된 식 (12)에서 수치점성부는 예조건화된 시스템 고유값에 따라 음속의 차수가 아닌 속도의 차수로 재조정되었다. 최종적인 2상 유동 예조건화 RoeM의 형태는 다음과 같이 정리된다.

$$E_{1/2}=\frac{1}{b_1^*-b_2^*}[b_1^*\times E_L-b_2^*\times E_R+b_1^*\times b_2^*\times(\Delta Q^*-\frac{g}{1+|\tilde{M}^*|}B\Delta Q^{**})]$$

$$\text{여기서 } b_1^*=\max(\hat{U}'+\hat{D}, U_L'+\hat{D}, 0)$$

$$b_2^*=\min(\hat{U}'-\hat{D}, U_R'-\hat{D}, 0)$$

3.3 AUSMPW+의 예조건화

Edwards와 Liou[7,8]는 AUSM+와 AUSMDV의 예조건화 방법으로 마하수 분할 함수와 음속에 변경된 시스템 고유값을 반영하는 방법을 제안하였다. AUSMPW+ 역시 같은 방식으로 예조건화가 가능하다. 재정의된 마하수와 음속을 사용하는 AUSMPW+는 다음과 같다.

$$E_{1/2}=\bar{M}_L^{*+}c_{1/2}^*Q_L^*+\bar{M}_R^{*-}c_{1/2}^*Q_R^*+(P_L^{*+}p_L+P_R^{*-}p_R) \quad (14)$$

$$1) M_{1/2} \geq 0$$

$$\bar{M}_L^{*+}=M_L^{*++}+M_R^{*-}[(1-\omega)(1+f_R)-f_L]$$

$$\bar{M}_R^{*-}=M_R^{*-}\omega(1+f_R)$$

$$2) M_{1/2} < 0$$

$$\bar{M}_L^{*+}=M_L^{*+}\omega(1+f_L)$$

$$\bar{M}_R^{*-}=M_R^{*-}+M_L^{*+}[(1-\omega)(1+f_L)-f_R]$$

식 (14)에서 사용된 $\bar{M}_{L,R}^{*+}$ 와 $P_{L,R}^{*+}$ 는 다음과 같이 변경된 마하수 M^{**} 를 이용한 마하수 분할함수이다.

$$M_{L,R}^{**}=\frac{1+M_{r,1/2}^2}{2}\times\frac{M_{L,R}}{\phi_{1/2}}+\frac{1-M_{r,1/2}^2}{2}\times\frac{M_{R,L}}{\phi_{1/2}} \quad (15)$$

이 때 변경된 시스템 고유값을 반영하기 위해 도입된 함수 $\phi_{1/2}$ 는 다음과 같다.

$$\phi_{1/2}=\frac{M_{1/2}}{M_{1/2}'}=\frac{\sqrt{(1-M_{r,1/2}^2)M_{1/2}^2+4M_{r,1/2}^2}}{1+M_{r,1/2}^2} \quad (16)$$

여기서 $M_r^2=c'^2/c^2$ 이다.

식 (14)에서 사용하는 음속 역시 다음과 같은 형태로 변경된 시스템 고유값이 반영되어 있다.

$$c_{1/2}^*=c_{1/2}\times\phi_{1/2} \quad (17)$$

식 (15)와 식 (17)로 주어지는 변경된 음속과 마하수를 사용함으로써 AUSMPW+는 예조건화된 지배방정식의 고유값을 반영하게 된다.

한편 Edwards와 Liou[7]는 저마하수에서 예조건화된 수치기법이 중심차분처럼 작동함으로써 홀짝 분리현상이 생길 수 있음을 주목하였다. 이 문제를 해결하기 위해서는 수치기법에서 압력장-속도장에 대한 연계가 필요하기 때문에, AUSM+에 AUSMDV에서 나타난 압력 구배에 의한 수치점성 항을 새롭게 추가하였다. AUSMPW+는 압력 가중함수 $f_{L,R}$ 이 존재하기 때문에 밀도 플럭스에도 압력 구배에 대한 수치점성항이 이미 존재한다. 따라서 이 항을 예조건화된 시스템에 맞도록 조정하는 것으로 AUSMPW+의 예조건화를 완성할 수 있다. Part 1에서 $0 \leq M_{1/2} \leq 1$ 인 경우에 유도된 밀도 플럭스의 $f_{L,R}$ 에 의한 수치점성은, 식 (14)로 주어진 예조건화된 AUSMPW+에서 다음과 같다.

$$\frac{c_{1/2}^*}{2}(M_R^{**}-1)^2\min(\rho_{m,L},\rho_{m,R})\Delta f \quad (18)$$

그런데 $\min(\rho_{m,L},\rho_{m,R})\Delta f \approx \frac{\Delta p}{O(c^2)}$ 이므로, $c \gg V$

인 저마하수에서 압력 구배에 따른 수치점성은 그 크기가 매우 작아지게 된다. 따라서 기존의 $f_{L,R}$ 로는 저마하수에서 벽면 근처의 수치 진동을 제어하지 못하고 홀짝 분리 문제를 발생시킨다. 그러므로 다음과 같이 예조건화 시스템을 반영한 압력 가중함수 $f_{L,R}^*$ 을 사용하여야 한다.

$$f_{L,R}^*=\frac{f_{L,R}}{M_r^2} \quad (19)$$

이제 식 (14)에 나타나는 압력 가중 함수 $f_{L,R}$ 을 $f_{L,R}^*$ 로 대체하여 사용함으로써, AUSMPW+의 예조건화가 완성되었다.

이상을 통해 얻어진 예조건화된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+는 $|M| \geq 1/a_k$ 인 구간에서는 Part I과 같은 완전한 압축성 수치기법 형태로 돌아가고, 충격과 안정적인 특성을 유지하게 된다. 또한 수치점성이 모든 마하수의 $\Delta H=0$ 인 영역에서 $D^{(energy)}=H \times D^{(mass)}$ 를 만족하므로 전 엔탈피 보존 특성을 갖는다.

IV. 비압축 극한 영역에서 예조건화 수치기법의 분석

풍상 차분에 기반한 수치기법이 올바르게 예 조건화 되었는지 확인하기 위하여, 보존식의 비 압축성 극한 영역에서의 형태와 수치 기법에 의 한 차분식의 일관성을 확인하는 방법이 있다. Guillard와 Viozat은 예조건화된 기체 역학의 Roe 수치기법에 대해 점근 분석법으로 이와 같 은 사실을 확인하였다[11]. 최근에는 Liou가 AUSM+up 수치기법을 이와 같이 분석하여 비압 축성 영역에서도 적합하도록 수치점성 항을 설계 하였다[12]. 본 장에서도 비압축성 2상 유동 영역 에서 RoeM과 AUSMPW+가 어떠한 특징을 갖는 지 같은 방법으로 분석하였다.

4.1 2상 유동 보존식의 특성

먼저 2상 유동장의 질량, 운동량, 에너지 보존 식이 비압축 한계 영역에서 어떤 특징을 갖는지 살펴보자. t, x, \vec{u} 를 무차원화 하는데에 L^*, U^* 를 사용하고, 열역학적 변수를 무차원화 하는데 ρ_m^*, c_s^2 을 사용하면, 다음과 같은 무차원 지배 방 정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial \rho_m^l}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^l \vec{u}^l = 0 \tag{20a}$$

$$\frac{\partial \rho_m^l \vec{u}^l}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^l \vec{u}^l \vec{u}^l + \frac{1}{M_*^2} \nabla p^l = 0 \tag{20b}$$

$$\frac{\partial \rho_m^l E_t^l}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^l H^l \vec{u}^l = 0 \tag{20c}$$

$$\frac{\partial \rho_m^l Y_1}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^l Y_1 \vec{u}^l = 0 \tag{20d}$$

위 식에서 상첨자 l 은 무차원 변수를 뜻하고, $M_* = U^*/c_s^*$ 이다. 이제 위 식에 다음과 같이 마하 수에 대해 전개된 유동 변수를 도입하자.

$$\vec{q} = \vec{q}^{(0)} + M_* \vec{q}^{(1)} + M_*^2 \vec{q}^{(2)} + \dots \tag{21}$$

여기서 $\vec{q} = [\rho_m^l, \vec{u}^l, E_t^l, Y_1]^T$ 이다. 예조건화가 올바르게 이루어진 수치기법이라면 M_*^2 부터 전개해 도 지배방정식과 일관된 결과가 나타나지만, 아 직 예조건화된 수치기법이 비압축성 극한 영역에 서 올바른 거동을 보이는지 확인되지 않은 상태 이므로 M_* 부터 전개하였다[11,12].

이제 M_* 가 같은 차수끼리 모아주면 다음과 같 이 정리된다.

(1) $O(1/M_*^2)$:

$$\nabla p^{l(0)} = 0 \tag{22}$$

(2) $O(1/M_*)$:

$$\nabla p^{l(1)} = 0 \tag{23}$$

(3) $O(1)$:

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)}}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^{l(0)} \vec{u}^{l(0)} = 0 \tag{24a}$$

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)} \vec{u}^{l(0)}}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^{l(0)} \vec{u}^{l(0)} \vec{u}^{l(0)} + \frac{1}{M_*^2} \nabla p^{l(2)} = 0 \tag{24b}$$

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)} E_t^{l(0)}}{\partial t^l} + \nabla \cdot (\rho_m^{l(0)} E_t^{l(0)} + p^{l(0)}) \vec{u}^{l(0)} = 0 \tag{24c}$$

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_1^{l(0)}}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho_m^{l(0)} Y_1^{l(0)} \vec{u}^{l(0)} = 0 \tag{24d}$$

식 (24b)에서 알 수 있듯이, 비압축 극한 영역 에서 보존식은 '마하수에 대한 2차의 압력항이 다른 물성치의 0차와 연계'되어야 함을 알려주고 있다. Liou는 이를 고려하여 다음과 같은 보조 정리를 제안하였다[12].

보조정리. $M_* \rightarrow 0$ 일 때 차분식의 압력에 대한 수치점성부 $\mu^l = O(\Delta x^l) > 0$ 이고 M_* 에 독립이면, 그 차분식은 다음과 같은 편미방의 $O(\Delta x^l)$ 까지 일관적이고 소산적인 근사식이다.

$$\frac{\partial \rho^{l(0)}}{\partial t^l} + \nabla \cdot \rho^{l(0)} \vec{u}^{l(0)} = \frac{\partial}{\partial x_k^l} \left(\mu^l \frac{\partial p^{l(2)}}{\partial x_k^l} \right) \tag{25}$$

그러면 수치 점성이 $p^{l(2)}$ 의 공간 변화량과 직접 적으로 연계된다.

곧, 어떤 수치기법을 이용한 질량 보존식의 차 분식이 위 보조정리를 만족하면, 그 수치기법은 비압축 극한 영역에서 유동 보존식과 일관성이 있음을 의미한다.

4.2 RoeM 차분식의 비압축성 형태

먼저 예조건화된 2상 유동 RoeM의 비압축 극 한 형태를 살펴보자. $M_* \rightarrow 0$ 일 때 $\Pi_{1/2}^* \rightarrow 1$ 이고 $f, g \rightarrow 1$ 이다. 그러면 식 (12)에서 질량 플럭스는 다음과 같이 정리된다.

$$E_{1/2}^{(\rho_m)} = \frac{1}{2} \rho_m^* u_*^* \left[\{ (1 + \hat{M}^*) \rho_{m,L}^l u_L^l + (1 - \hat{M}^*) \rho_{m,R}^l u_R^l \} - \frac{1 - |\hat{M}^*|}{\hat{D}^l} \frac{\Delta p^l}{M_*^2} - \hat{D}^l (|\hat{M}^*| - \hat{M}^{*2}) \frac{\partial \rho_m^l}{Y_1} \Delta Y_1 \right] \tag{26a}$$

$$E_{1/2}^{(\rho_m, Y_1)} = \frac{\rho_m^* u^*}{2} \left[\left\{ (1 + \hat{M}^*) \rho_{m,L}^l u_L^l Y_{1,L} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \hat{M}^*) \rho_{m,R}^l u_R^l Y_{1,R} \right\} - \frac{(1 - |\hat{M}^*|) \hat{Y}_1}{\hat{D}^l} \frac{\Delta p^l}{M^2} \right. \\ \left. - \hat{D}^l \left\{ (1 - \hat{M}^{*2}) \hat{\rho}_m^l + (|\hat{M}^*| - \hat{M}^{*2}) \frac{\partial \hat{\rho}_m^l}{\hat{Y}_1} \right\} \Delta Y_1 \right] \quad (26b)$$

위 식에서 $\hat{D}^l > 0$, $1 - |\hat{M}^*| > 0$, $|\hat{M}^*| - \hat{M}^{*2} > 0$, 그리고 $1 - \hat{M}^{*2} > 0$ 이다.

이제 식 (21)과 같이 각 변수를 M_* 에 대해 전개하고, 다음과 같은 1차원 준 차분식에 플럭스를 대입하자.

$$\Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} + E_{1/2} - E_{-1/2} = 0 \quad (27)$$

같은 M_* 차수끼리 모아준 결과는 다음과 같다.

(1) $O(1/M_*^2)$:

· 혼합류 질량 보존:

$$\frac{1 - |\hat{M}_{1/2}^{*(0)}|}{\hat{D}_{1/2}^{l(0)}} \Delta_{1/2} p^{l(0)} - \frac{1 - |\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}|}{\hat{D}_{-1/2}^{l(0)}} \Delta_{-1/2} p^{l(0)} = 0 \quad (28a)$$

· 혼합류 운동량 보존:

$$\frac{(1 - |\hat{M}_{1/2}^{*(0)}|) \hat{u}_{1/2}^{l(0)}}{\hat{D}_{1/2}^{l(0)}} \Delta_{1/2} p^{l(0)} - \frac{(1 - |\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}|) \hat{u}_{-1/2}^{l(0)}}{\hat{D}_{-1/2}^{l(0)}} \Delta_{-1/2} p^{l(0)} \quad (28b) \\ + \left\{ (1 - \hat{M}_{1/2}^{*(0)}) \Delta_{1/2} p^{l(0)} + (1 + \hat{M}_{-1/2}^{*(0)}) \Delta_{-1/2} p^{l(0)} \right\} = 0$$

· 상 '1'에 대한 질량 보존:

$$\frac{(1 - |\hat{M}_{1/2}^{*(0)}|) \hat{Y}_{1,1/2}^{(0)}}{\hat{D}_{1/2}^{l(0)}} \Delta_{1/2} p^{l(0)} - \frac{(1 - |\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}|) \hat{Y}_{1,-1/2}^{(0)}}{\hat{D}_{-1/2}^{l(0)}} \Delta_{-1/2} p^{l(0)} = 0 \quad (28c)$$

위 식 (28a)~(28c)가 임의의 속도 및 질량 비율장에서 성립하기 위해서는 모든 j번째 계산 격자에서 $\Delta_{\pm} p^{l(0)} = 0$ 이어야 한다. 따라서,

$$p_j^{l(0)} = p_j^{l(0)}(t), \quad \forall j \Leftrightarrow p_j^{l(0)} = \text{const. in space} \quad (29)$$

(2) $O(1/M_*)$:

같은 과정을 거쳐,

$$p_j^{l(1)} = p_j^{l(1)}(t), \quad \forall j \Leftrightarrow p_j^{l(1)} = \text{const. in space} \quad (30)$$

(3) $O(1)$:

· 혼합류 질량 보존:

$$\Delta x^l \frac{\partial \rho_{m,j}^{l(0)}}{\partial t^l} \\ + \frac{1}{2} \left[(1 - \hat{M}_{1/2}^{*(0)}) \Delta_{1/2} \rho_m^{l(0)} u^{l(0)} + (1 + \hat{M}_{-1/2}^{*(0)}) \Delta_{-1/2} \rho_m^{l(0)} u^{l(0)} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - |\hat{M}_{1/2}^{*(0)}|}{\hat{D}_{1/2}^{l(0)}} \Delta_{1/2} p^{l(2)} - \frac{1 - |\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}|}{\hat{D}_{-1/2}^{l(0)}} \Delta_{-1/2} p^{l(2)} \right]$$

$$- \frac{1}{2} \left[\hat{D}_{1/2}^{l(0)} (|\hat{M}_{1/2}^{*(0)}| - \hat{M}_{1/2}^{*(0)2}) \frac{\partial \hat{\rho}_m^l}{\partial Y_1} \Big|_{1/2}^{(0)} \Delta_{1/2} Y_1^{(0)} \right. \\ \left. - \hat{D}_{-1/2}^{l(0)} (|\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}| - \hat{M}_{-1/2}^{*(0)2}) \frac{\partial \hat{\rho}_m^l}{\partial Y_1} \Big|_{-1/2}^{(0)} \Delta_{-1/2} Y_1^{(0)} \right] = 0 \quad (31a)$$

· 상 '1'에 대한 질량 보존:

$$\Delta x^l \frac{\partial \rho_{m,j}^{l(0)} Y_{1,j}^{(0)}}{\partial t^l} + \frac{1}{2} \left[(1 - \hat{M}_{1/2}^{*(0)}) \Delta_{1/2} \rho_m^{l(0)} u^{l(0)} Y_1^{(0)} \right. \\ \left. + (1 + \hat{M}_{-1/2}^{*(0)}) \Delta_{-1/2} \rho_m^{l(0)} u^{l(0)} Y_1^{(0)} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - |\hat{M}_{1/2}^{*(0)}|) \hat{Y}_{1,1/2}^{(0)}}{\hat{D}_{1/2}^{l(0)}} \Delta_{1/2} p^{l(2)} \right. \\ \left. - \frac{(1 - |\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}|) \hat{Y}_{1,-1/2}^{(0)}}{\hat{D}_{-1/2}^{l(0)}} \Delta_{-1/2} p^{l(2)} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\hat{D}_{1/2}^{l(0)} (1 - \hat{M}_{1/2}^{*(0)2}) \hat{\rho}_{m,1/2}^{l(0)} \right. \\ \left. + (|\hat{M}_{1/2}^{*(0)}| - \hat{M}_{1/2}^{*(0)2}) \frac{\partial \hat{\rho}_m^l}{\partial Y_1} \Big|_{1/2}^{(0)} \right] \Delta_{1/2} Y_1^{(0)} \\ - \hat{D}_{-1/2}^{l(0)} \left\{ (1 - \hat{M}_{-1/2}^{*(0)2}) \hat{\rho}_{m,-1/2}^{l(0)} \right. \\ \left. + (|\hat{M}_{-1/2}^{*(0)}| - \hat{M}_{-1/2}^{*(0)2}) \frac{\partial \hat{\rho}_m^l}{\partial Y_1} \Big|_{-1/2}^{(0)} \right\} \Delta_{-1/2} Y_1^{(0)} = 0 \quad (31b)$$

식 (31a)와 (31b)는 $\Delta x \rightarrow 0$ 에서 다음 편미방에 대응하게 된다.

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)}}{\partial t^l} + \frac{\partial \rho_m^{l(0)} u^{l(0)}}{\partial x^l} = \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu_p^l \frac{\partial p^{l(2)}}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu_{Y_1}^l \frac{\partial Y_1^{l(0)}}{\partial x^l} \right) + O(\Delta x^2) \quad (32a)$$

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_1^{(0)}}{\partial t^l} + \frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_1^{(0)} u^{l(0)}}{\partial x^l} = \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu_p^l Y_1^{(0)} \frac{\partial p^{l(2)}}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu_{Y_1 Y_1}^l \frac{\partial Y_1^{l(0)}}{\partial x^l} \right) + O(\Delta x^2) \quad (32b)$$

위 식에서 각 점성항은 다음과 같다.

$$\mu_p^l = \frac{1 - |M^{*(0)}|}{D^{l(0)}} \Delta x^l > 0 \quad (33a)$$

$$\mu_{Y_1}^l = D^{l(0)} (|M^{*(0)}| - M^{*(0)2}) \frac{\partial \rho_m^l}{\partial Y_1} \Big|_{1/2}^{(0)} \Delta x^l > 0 \quad (33b)$$

$$\mu_{Y_1 Y_1}^l = D^{l(0)} (1 - M^{*(0)2}) \rho_m^{l(0)} \Delta x^l + Y_1^{(0)} \mu_{Y_1}^l > 0 \quad (33c)$$

이상의 결과는 Liou가 제안한 보조 정리를 만족하며, 예조건화된 2상 유동 RoeM 수치기법이 비압축 극한 영역에서 2상 유동 보존식과 일관됨을 의미한다. 또한 비압축성 영역의 2상 유동 RoeM은 서로 다른 상을 고려하지 않았던 기존 연구자들의 분석에서는 나타나지 않은 '질량 비

올에 따른 수치점성항'을 포함한다는 것을 알아 내었다.

4.3 AUSMPW+ 차분식의 비압축 형태

AUSM 계열의 수치기법은 일반적으로 다음과 같이 대류 플럭스와 압력 플럭스로 나누어 쓸 수 있다.

$$E_{1/2} = E_{1/2}^{(c)} + E_{1/2}^{(p)} \quad (34)$$

예조건화된 AUSMPW+의 경우, 대류 플럭스는 다음과 같다.

$$E_{1/2}^{(c)} = \overline{M}_L^{*+} c_{1/2}^* Q_L^* + \overline{M}_R^{*-} c_{1/2}^* Q_R^* \quad (35)$$

마하수 분할 함수에 사용되는 예조건화 마하수는 무차원 변수를 도입하면 다음과 같다.

$$M_{L,R}^{**} = \frac{M_L^l + M_R^l}{2\phi^l} + O(M_*^2) \quad (36)$$

Van Leer 마하수 분할 $M_{L,R}^{\pm} = \pm 1/4(M_{L,R} \pm 1)^2$ 을 사용하여 $0 \leq M_{1/2} \leq 1$ 인 경우에 대해 나타나는 마하수 분할 함수를 정리하면 다음과 같다.

$$M_L^{*+} + M_R^{*-} = \frac{M_L^l + M_R^l}{2\phi^l} + O(M_*^2) > 0 \quad (37a)$$

$$M_R^{*-} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{M_L^l + M_R^l}{2\phi^l} \right) + O(M_*^2) < 0 \quad (37b)$$

AUSMPW+에서 나타나는 ω 는 무차원 값이고, $f_{L,R}^{**} = f_{L,R}^{**l} / M_*^2$ 임을 이용하면, 식 (35)는 $M_* \rightarrow 0$ 일 때 다음과 같이 정리된다.

$$E_{1/2}^{(c)} = u_* c_{1/2}^* \left\{ \left(\frac{M_L^l + M_R^l}{2} \right) Q_L^* - \frac{\omega}{4} (\phi^l - (M_L^l + M_R^l)) \Delta Q^* \right\} - \frac{u_* c_{1/2}^*}{4} (\phi^l - (M_L^l + M_R^l)) \left\{ (Q_L^* + \omega \Delta Q^*) \frac{\Delta f^{**l}}{M_*^2} + \omega \frac{f_L^{**l}}{M_*^2} \Delta Q^* \right\}, \quad \text{여기서 } \phi^l - (M_L^l + M_R^l) > 0 \quad (38)$$

위 식에서 $Q_R^* = Q_L^* + \Delta Q^*$, $f_R^* = f_L^* + \Delta f^*$ 이다.

한편 압력 플럭스 역시 유사한 방식으로 정리할 수 있고, 그 결과는 다음과 같다.

$$E_{1/2}^{(p)} = \frac{p_L^l + p_R^l}{2M_*^2} = \frac{p_s^l}{M_*^2} \quad (39)$$

$M_* \rightarrow 0$ 일 때 $\Pi_{1/2}^* \rightarrow 1$ 이고 $\omega \rightarrow 0$ 임을 이용하면, 무차원화된 AUSMPW+의 질량 플럭스를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\rho_m u)_L^l = \rho_{m,L}^l c_{1/2}^l \frac{M_L^l + M_R^l}{2} - \min(\rho_{m,L}^l, \rho_{m,R}^l) c_{1/2}^l K_1 \frac{\Delta p^l}{M_*^2}$$

$$\text{여기서 } K_1 = \frac{\phi^l - (M_L^l + M_R^l)}{4p_s^l M_*^2} \times O(1) \quad (40)$$

이제 비압축 극한 영역에서 AUSMPW+에 의한 질량 플럭스는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{1/2}^{(\rho_m)} = (\rho_{m*} u_*) (\rho_m u)_{L/R}^l \quad (41a)$$

$$E_{1/2}^{(\rho_m Y_1)} = (\rho_{m*} u_*) (\rho_m u)_{L/R}^l Y_{1,L/R} \quad (42b)$$

위 식에서 $()_{L/R} = \begin{cases} ()_L, M_{1/2} \geq 0 \\ ()_R, M_{1/2} < 0 \end{cases}$ 이다.

앞 절에서와 같이 식 (21)로 각 변수를 M_* 에 대해 전개하고, 식 (27)로 주어진 1차원 준 차분식에 플럭스를 대입하면, 다음과 같이 정리된다.

(1) $O(1/M_*^2)$:

· 혼합류 질량 보존:

$$\min(\rho_{m,j}^{(0)}, \rho_{m,j+1}^{(0)}) c_{1/2}^{(0)} K_{1,1/2}^{(0)} \Delta_{1/2} p^{(0)} - \min(\rho_{m,j-1}^{(0)}, \rho_{m,j}^{(0)}) c_{-1/2}^{(0)} K_{1,-1/2}^{(0)} \Delta_{-1/2} p^{(0)} = 0 \quad (43a)$$

· 혼합류 운동량 보존:

$$\min(\rho_{m,j}^{(0)}, \rho_{m,j+1}^{(0)}) c_{1/2}^{(0)} u_{j,j+1}^{(0)} K_{1,1/2}^{(0)} \Delta_{1/2} p^{(0)} - \min(\rho_{m,j-1}^{(0)}, \rho_{m,j}^{(0)}) c_{-1/2}^{(0)} u_{j-1,j}^{(0)} K_{1,-1/2}^{(0)} \Delta_{-1/2} p^{(0)} - (\Delta_{1/2} p^{(0)} + \Delta_{-1/2} p^{(0)})/2 = 0 \quad (43b)$$

· 상 '1'에 대한 질량 보존:

$$\min(\rho_{m,j}^{(0)}, \rho_{m,j+1}^{(0)}) c_{1/2}^{(0)} Y_{1,j,j+1}^{(0)} K_{1,1/2}^{(0)} \Delta_{1/2} p^{(0)} - \min(\rho_{m,j-1}^{(0)}, \rho_{m,j}^{(0)}) c_{-1/2}^{(0)} Y_{1,j-1,j}^{(0)} K_{1,-1/2}^{(0)} \Delta_{-1/2} p^{(0)} \quad (43c)$$

위 식이 임의의 속도 및 질량 비율 장(field)에서 성립하기 위해서 $\Delta_{\pm} p^{(0)} = 0$ 이어야 하므로,

$$p_j^{(0)} = p_j^{(0)}(t), \quad \forall j \Leftrightarrow p_j^{(0)} = \text{const. in space} \quad (44)$$

(2) $O(1/M_*)$:

같은 과정을 거쳐,

$$p_j^{(1)} = p_j^{(1)}(t), \quad \forall j \Leftrightarrow p_j^{(1)} = \text{const. in space} \quad (45)$$

(3) $O(1)$:

· 혼합류 질량 보존:

$$\Delta x^l \frac{\partial \rho_{m,j}^{(0)}}{\partial t^l} + \frac{1}{2} [\rho_{m,j/j+1}^{(0)} (u_j^{(0)} + u_{j+1}^{(0)}) - \rho_{m,j-1/j}^{(0)} (u_{j-1}^{(0)} + u_j^{(0)})] - [\min(\rho_{m,j}^{(0)}, \rho_{m,j+1}^{(0)}) c_{1/2}^{(0)} K_{1,1/2}^{(0)} \Delta_{1/2} p^{(2)} - \min(\rho_{m,j-1}^{(0)}, \rho_{m,j}^{(0)}) c_{-1/2}^{(0)} K_{1,-1/2}^{(0)} \Delta_{-1/2} p^{(2)}] = 0 \quad (46a)$$

· 상 '1'에 대한 질량 보존:

$$\begin{aligned} \Delta x^l \frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_{1,j}^{l(0)}}{\partial t^l} + \frac{1}{2} [\rho_{m,j/j+1}^{l(0)} Y_{1,j/j+1}^{l(0)} (u_j^{l(0)} + u_{j+1}^{l(0)}) \\ - \rho_{m,j-1/j}^{l(0)} Y_{1,j-1/j}^{l(0)} (u_{j-1}^{l(0)} + u_j^{l(0)})] \\ - [\min(\rho_{m,j}^{l(0)}, \rho_{m,j+1}^{l(0)}) c_{1/2}^{l(0)} Y_{1,j/j+1}^{l(0)} K_{1,1/2}^{l(0)} \Delta_{1/2} p^{l(2)} \\ - \min(\rho_{m,j-1}^{l(0)}, \rho_{m,j}^{l(0)}) c_{-1/2}^{l(0)} Y_{1,j-1/j}^{l(0)} K_{1,-1/2}^{l(0)} \Delta_{-1/2} p^{l(2)}] = 0 \end{aligned} \quad (46b)$$

식 (46a)와 (46b)는 $\Delta x \rightarrow 0$ 에서 다음 편미방에 대응하게 된다.

$$\frac{\partial \rho_m^{l(0)}}{\partial t^l} + \frac{\partial \rho_m^{l(0)} u^{l(0)}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu^l \frac{\partial p^{l(2)}}{\partial x^l} \right) + O(\Delta x^{l2}) \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_1^{l(0)}}{\partial t^l} + \frac{\partial \rho_m^{l(0)} Y_1^{l(0)} u^{l(0)}}{\partial x^l} = \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\mu^l Y_1^{l(0)} \frac{\partial p^{l(2)}}{\partial x^l} \right) + O(\Delta x^{l2}) \end{aligned} \quad (47b)$$

$$\text{여기서 } \mu^l = \rho_m^{l(0)} c^{l(0)} K_1^{l(0)} \Delta x^l > 0 \quad (48)$$

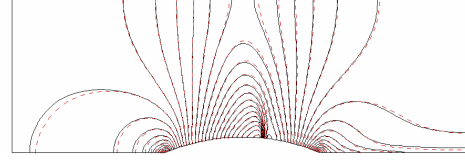
위 결과 역시 보조 정리를 만족하며, 예조건화 된 2상 유동 AUSMPW+가 비압축 극한 영역에서 2상 유동 보존식과 일관됨을 보여준다. 앞 절 RoeM과 달리 AUSMPW+에서는 질량 비율에 따른 수치점성이 나타나지 않았다. 그러나 압력 가중함수 ω 가 상 경계면에서 작동하도록 재설계 해준다면, 질량 비율에 대한 수치점성향도 만들 수 있음을 언급한다.

V. 수치해석 결과

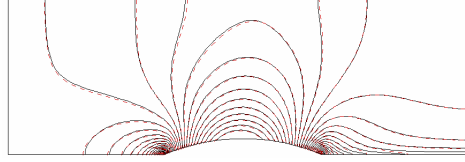
5.1 전 마하수 혼합류 범프 문제

일반적으로 압축성 영역에서 개발된 풍상차분 수치기법을 비압축성 영역에 적용하면, 과도한 수치 점성으로 인하여 해의 퍼짐 현상이 나타나거나, 홀짝 분리 문제와 같은 수치 불안정 현상이 생긴다. 개발된 예조건화 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+가 전 마하수 영역에서 해석 가능성을 보이기 위해, 자유류의 마하수를 변화시켜 가며 $Y_1 = 0.1$ 인 2상 유동 범프 문제를 해석하였다. 129×65 의 격자계에서 1차 외재적 시간 적분 및 1차의 공간 정확도를 사용하였고, 식 (4)의 a_0 값은 1로 하였다.

$M=0.675$ 인 천음속 영역과 $M=0.01$ 인 비압축성에 가까운 영역의 해석 결과를 Fig. 1에 도시하였다. 마하수가 $M=1 \times 10^{-4}$ 과 $M=1 \times 10^{-6}$ 인 경우에는 $M=0.01$ 인 경우와 유사한 등고선도를 도출한다. 두 수치기법의 차이는 크지 않았으며, 천음속 영역 뿐 아니라, $M=0.01$ 인 비압축성 영역의 결

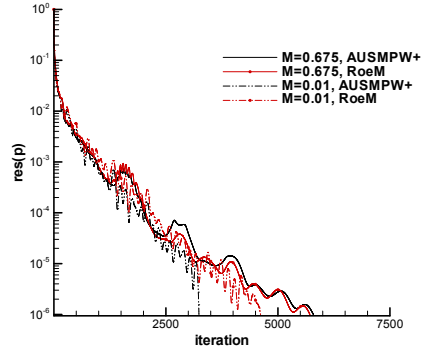


(a) $M=0.675$

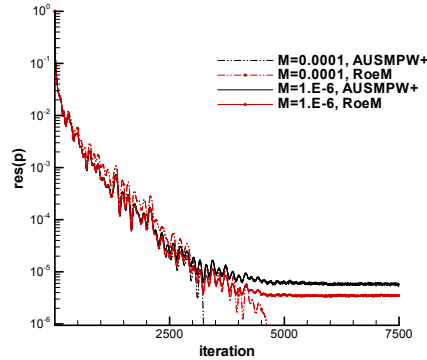


(b) $M=0.01$

Fig. 1. Velocity magnitude for $Y_1=0.1$ flow: red dashed: RoeM, black solid: AUSMPW+



(a) $M=0.675, 0.01$



(b) $M=1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$

Fig. 2. Convergence history for $Y_1 = 0.1$ flow

과에서 수치적인 어려움 없이 해를 도출하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 2에 압력 변화량에 대한 L_2 -norm을 수렴 곡선으로 나타내었는데, 두

수치기법의 수렴성 역시 유사함을 볼 수 있다. $M=1 \times 10^{-6}$ 인 경우 수렴 곡선이 $O(10^{-5})$ 이후 진동하는 것은 유효숫자 오차 때문이다.

5.2 난류 캐비테이션 문제

반구형 전두부를 갖는 축대칭 난류 캐비테이션 문제를 해석해 보았다. 캐비테이션 수 $Ca=0.3, 0.4$ 이고 $Re=1.36 \times 10^5$ 이다. Merkle의 캐비테이션 모델[13]을 사용하여 상변화를 모사하였고, 표준 $k-\epsilon$ 난류 모델을 사용하였다. 격자계는 121×65 이고, Kunz의 dissipation sensor[1]와 결합된 minmod 제한자를 사용하였다. 앞서와 같이 식 (4)의 a_0 값은 1로 하였고, LU-SGS를 사용하여 시간 전진하였다.

수중에 놓인 물체의 반구형 전두부 끝단에서 유동이 가속되어 압력이 증기압 이하로 떨어지면 물이 수증기가 되는 상변화 현상이 일어난다.

Fig. 3에 계산된 표면압력 분포를 실험치[14]와 비교하여 나타내었다. 캐비테이션이 생성된 모습은 Fig. 4에 도시하였다. 표면압력 분포에서 볼 수 있듯이 AUSMPW+가 RoeM보다 다소 더 긴 캐비테이션 영역을 예측하였다.

본 문제는 다소의 비정상성을 갖는 것이 알려

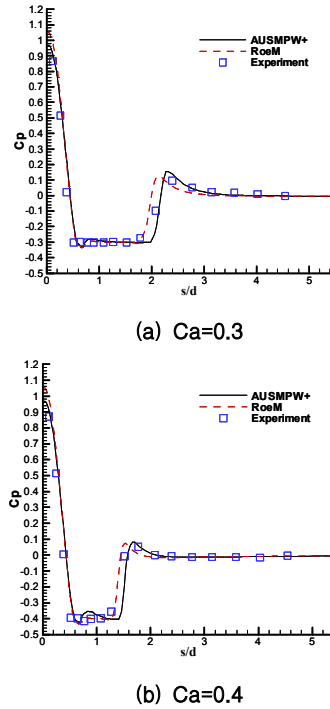


Fig. 3. Comparison of surface pressure distribution
Experimental data from Ref. 11

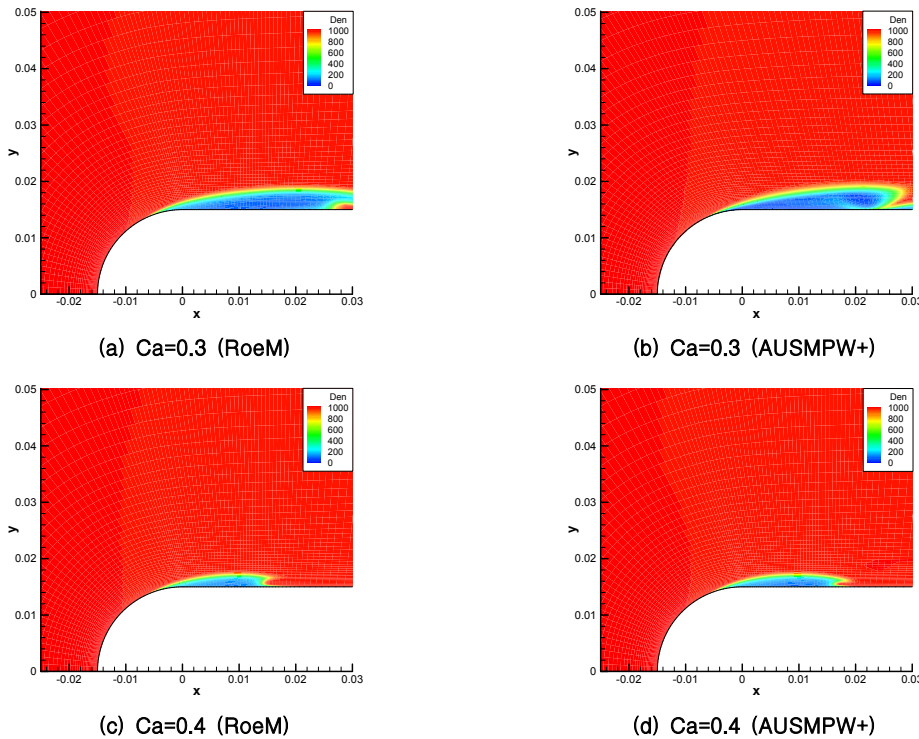


Fig. 4. Cavitation prediction: density contour

저 있고, 주요 원인 중 하나는 캐비테이션 영역의 끝부분에서의 지속적인 와류에 의한 캐비테이션 영역 변화이다. 기존 연구자들에 따르면 격자계나 캐비테이션 모델, 공간 이산화 정확도, 심지어 AUSM+의 압력 분할 함수 차이[8]에 따라서도 표면 압력 분포가 달라지는 것이 보고된 바 있다. 이러한 점을 고려하면 개발된 두 2상 유동 수치기법에 의한 결과의 차이는 납득할 만한 범위에 존재한다. 다만 AUSMPW+의 경우 RoeM에 비하여 상 경계면이 존재하는 문제에서 CFL 수의 제약을 더 받는 경향이 있는데, 이는 비압축 극한 영역에서 질량 비율에 대한 수치점성이 RoeM에는 존재하지만 AUSMPW+에는 존재하지 않은 사실과 관련이 있는 것으로 추정된다.

VI. 결 론

압축성에서 비압축성 영역을 포괄하는 2상 유동 수치 기법을 개발하였다. 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+를 HLLC-type 예조건화 방법과 AUSM-type 예조건화 방법을 이용하여 전 마하수 영역에서 해석 가능하도록 수정하였다. RoeM의 경우 최종 형태에서 예조건화된 시스템 고유값을 수치점성부에 반영하는 방식으로 예조건화가 이루어졌다. AUSMPW+는 먼저 예조건화된 시스템 고유값을 제어면의 음속과 마하수 분할 함수에 적용하였으며, 비압축 영역에서 압력 구배에 따른 수치점성의 크기가 지나치게 작아지지 않도록 제어함수 f_{LR} 을 수정하는 것으로 예조건화를 완성하였다.

점근 분석을 수행하였으며, 그 결과 개발된 예조건화 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+가 비압축 극한 영역에서 보존형 지배 방정식과 일관성을 갖는 것을 확인하였다. 혼합유동에 대한 전 마하수 범프 문제를 통해 압축성에서 비압축성에 이르는 영역에서 개발된 수치기법이 강건하게 해석할 수 있음을 보였다. 개발된 코드는 축대칭 난류 캐비테이션 문제에까지 적용하였으며, 알려진 실험치와 대체로 일치한 표면 압력 분포를 얻을 수 있었다.

RoeM과 AUSMPW+는 압축성 영역에서 충격과 안정적인 특징 외에도 전엔탈피 보존이라는 중요한 특성을 갖고 있으며, 해의 정확성과 강건성이 보장된 효율적인 수치기법이다. 본 연구 결과로 기체 역학에 비해 개발되어 있는 수치기법의 종류가 적었던 2상 유동 분야에서, 공간차분 수치기법의 선택의 폭을 넓힐 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 서울대학교 기계항공공학부 BK21 사업과 항공우주 신기술 연구소, 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Kunz, R. F., Lindau, J. W., Billet, M. L., and Stinebring, D. R., "Multiphase CFD Modeling of Developed and Supercavitating Flows", *VKI Special Course on Supercavitating Flows*, Feb. 2001.
- 2) Owis, F. M. and Nayfeh, A. H., "Computations of the Compressible Multiphase Flow Over the Cavitating High-Speed Torpedo", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 125, 2003, pp. 459-468.
- 3) Venkateswaran, S., and Merkle, C. L., "Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations", 1999-03, *VKI Lecture Series on CFD*, March, 1999.
- 4) Turkel, E., "A Review of Preconditioning Methods for Fluid Dynamics", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 12, 1993, pp. 258-284.
- 5) 이재은, 박수형, 권장혁, "저속 압축성 유동에서 예조건화 방법을 이용한 수렴성 증진에 대한 연구", *한국항공우주학회지*, Vol. 33(8), 2005, pp. 8-17.
- 6) 이상현, "예조건화 오일러 방정식의 계산 오차 문제", *한국항공우주학회지*, Vol. 35(7), 2007, pp. 586-591.
- 7) Edwards, J. R., and Liou, M. -S., "Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at All Speeds", *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 6, 1998, pp. 1610-1617.
- 8) Edwards, J. R., Franklin, R. K., and Liou, M. -S., "Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions", *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 9, 2000, pp. 1624-1633.
- 9) Luo, H., Baum, J. D., Löhner, R., "Extension of Harten-Lax-van Leer Scheme for Flows at All Speeds", *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 6, 2005, pp. 1160-1166.
- 10) Li, D., Sankaran, V., Lindau, J. W., and Merkle, C. L., "Computational Formulation for Multi-Phase and Multi-Component Flows", 43rd

AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2005-1391, Reno, NV, 2005.

11) Guillard, H., Viozat, C., "On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit", *Computers & Fluids*, Vol. 28, 1999, pp. 63-86.

12) Liou, M. -S., "A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds", *Journal of Computational Physics*, Vol. 214, 2006, pp. 137-170.

13) Merkle, C. L., Feng, J., Buelow, P. E. O., Sheet Cavitation", *Proceedings of the 3rd International Symposium on Cavitation*, Grenoble, France, 1998.

14) Rouse, H., McNown, J. S., "Cavitation and Pressure Distribution, Head Forms at Zero Angle of Yaw", *Studies in Engineering*, Bulletin 32, State university of Iowa, 1948.