

論文

시험 장치를 이용한 슬로시 모델 파라미터 추정

오충석*, 선병찬*, 박용규*, 노웅래*

Estimation of Slosh Model Parameters Using Experimental Test-bed

Choong-Seok Oh*, Byung-Chan Sun*, Yong-Kyu Park* and Woong-Rae Roh*

ABSTRACT

The slosh natural frequencies, damping ratio, slosh mass and slosh force applying point of the liquid in cylindrical tank are estimated using the nonlinear least squares method in time domain. The estimated slosh model parameters are in good agreement with the results of the theoretical calculations for various liquid depths. Furthermore, this methodology will be applied to predict the sloshing parameters for a liquid propellant tank using ground experimental test-bed.

초 록

본 논문에서는 시간영역에서 최소자승법을 이용하여 실린더 용기의 슬로시 주파수와 댐핑 계수와 함께 슬로시 모드 질량 및 슬로시 힘 작용점 높이를 시험을 통해 추정하였다. 추정된 결과가 해석 결과와 비교적 잘 일치함을 확인 할 수 있었으며 추정기법의 정확성을 파악할 수 있었다. 향후 이 기법을 이용해 액체 연료 용기의 슬로시 모델 파라미터를 추정하는데 적용할 예정이다.

Key Words : Slosh(슬로시), Slosh Mode Frequency(슬로시 모드 주파수), Slosh Damping Ratio(슬로시 댐핑계수), Slosh Mass(슬로시 질량)

1. 서 론

슬로시는 일반적으로 연료탱크 내의 연료의 운동 진폭과 주기, 연료탱크내의 연료의 깊이, 연료의 특성 그리고 연료탱크의 기하학적 형상에 의해 그 특성이 결정된다. 이와 같은 연료의 슬로시 운동은 로켓이나 인공위성의 자세제어시 안정성에 큰 영향을 줄 수 있다. 위와 같이 안정성에 영향을 줄 수 있는 슬로시 현상을 지상시험장치를 이용해 분석함으로써 제어기 설계시 슬로시 영향을 고려한 설계를 할 수 있다.

주파수 영역에서 FFT분석을 수행하면 특정한 주파수에서 다른 주파수에 비해 신호의 크기가

최대가 되는 곳이 존재하며 이 주파수를 슬로시 모드 주파수라 정의한다. 각 모드 주파수로 가진 하게 되면 액체 표면이 각각의 슬로시 모드 형상으로 움직이게 된다. 이와 같은 주파수 영역에서 슬로시 모델 파라미터를 추정한 연구가 참고문헌 [1,2]에서 수행되었다. 참고 문헌 [3-5]에서는 실린더 형태의 용기에 대한 댐핑계수를 추정한 경우에 대해 분석하였다. 또한 Toroidal 용기의 슬로시 주파수와 댐핑계수를 실험으로 구한 데이터가 참고문헌[6]에 나타나 있다. 슬로시의 진자 모델링을 통하여 가진 후 정지구간 데이터의 최초의 최대값을 이용한 구형 액체 용기와 실제 발사체의 액체 산소, 수소 용기의 슬로시 모델 파라미터를 추정한 연구도 수행되었다[7-10]. 참고문헌[11]은 Nyquist plots을 이용한 슬로시 모델 파라미터를 추정하는 방법에 대해 설명하였다. 또한 소형 발사체의 상단부 슬래그 문제를 분석하

† 2009년 4월 20일 접수 ~ 2009년 6월 20일 심사완료

* 정회원, 한국항공우주연구원 발사체연구본부

교신저자, E-mail : csoh@kari.re.kr

대전시 유성구 어은동 45 한국항공우주연구원

기 위해 슬로시 모드 주파수와 댐핑 계수를 실험을 통해 추정하였다[12].

정지 구간 데이터의 최초의 최대값을 이용한 슬로시 파라미터 추정은[7-10] 한 개의 데이터만 이용해 파라미터를 구하므로 오차가 많이 포함될 수 있다. 또한 주파수 영역에서 파라미터 추정 기법[1,2]은 입력 신호를 측정하기 위한 추가의 센서가 필요하며 주파수 영역 데이터 처리를 위한 많은 연산 과정이 필요하게 된다.

이 논문에서는 슬로시 시험장치를 이용하여 슬로시 질량 및 슬로시 힘 작용점 높이를 추정하기 위한 시험 방법 및 기법에 대하여 연구하였다. 시간영역에서 최소화방법을 이용하여 실린더 용기의 슬로시 주파수와 댐핑 계수와 함께 슬로시 모드 질량 및 슬로시 힘 작용점 높이를 시험을 통해 추정하였다. 이와 같은 추정 기법을 적용함으로써 시험 장치를 좀 더 단순화 시켰으며 한 개의 데이터만 이용하지 않고 많은 데이터를 이용함으로써 추정오차를 많이 줄일 수 있다. 시험을 통해 추정한 결과를 해석 결과와 비교해 추정기법의 정확성을 파악하였다.

II. 시험 장치 구성

실린더 액체 용기를 이용한 슬로시 시험 장치는 다음 그림 1과 같이 구성된다.

슬로시 시험 장치는 액체 용기와 액체 용기를 측면에서 지지해 주는 측면 지지대와, 액체의 슬로시에 의해 야기되는 힘을 수직방향 및 수평방향으로 측정하기 위한 로드셀, 모터에 의한 가진력이 링크부와 볼베어링 결합으로 연결되어 전달되는 연결판, 액체 용기의 병진 운동시 마찰을

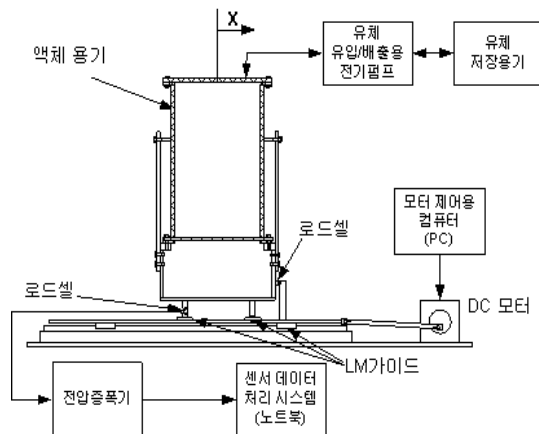


그림 1. 시험장치 구성도

최소화 할 수 있도록 하기 위한 선형 운동(LM) 가이드 장치가 부착된다. 또한 선형 운동 가이드의 고정판 역할을 하면서 모터의 회전중심과 모터와 연결판의 높이를 갖게 하기위한 가이드 고정판, 전체 부품들이 놓이게 되는 시험장치 밑받침, 액체 용기를 가진 시킬 수 있는 가진 시스템인 직류(DC) 모터로 구성된다.

액체 용기는 세 점에서 지지하게 되는데 그림 1과 같이 한 점은 수직 방향 힘을 측정하기 위한 로드셀이 부착되어 있다. 또한 수평 방향 힘을 측정하기 위해 측면에 로드셀이 부착되어 있다. 액체 용기를 지지하는 부분들은 모두 선형 운동 가이드가 장착되어 있어 수평 방향으로 자유도를 갖도록 하여 수평 방향 힘을 측정하게 된다. 슬로시 힘을 측정하기 위해 동적 힘을 측정하는 DYTRAN 1051V1, 1051V2 센서를 사용하였다.

III. 파라미터 추정 기법 및 시험결과

3.1 해석 적인 슬로시 파라미터 분석

실린더 용기의 경우 해석 적인 방법으로 슬로시 모델 파라미터를 구할 수 있다.

먼저 슬로시 모드 주파수는 다음식과 같이 각 액체 높이(h)에서 구할 수 있다[13].

$$\omega_n^2 = \frac{g\xi_n}{R} \tanh\left(\xi_n \frac{h}{R}\right), \quad (1)$$

$$\xi_1 = 1.841, \xi_2 = 5.331, \xi_3 = 8.536$$

$$R=0.1426\text{m}(\text{실린더 반경}), g=9.81[m/s^2]$$

댐핑 계수의 해석적인 값은 다음과 같이 구할 수 있다[3,14].

$$A = K Ga^{-1/4} \left[1 + 2 \left(1 - \frac{h}{R} \right) \sinh^{-1} \left(2\xi_i \frac{h}{R} \right) \right] \times \left[\tanh^{-1/4} \left(\xi_i \frac{h}{R} \right) \right] \quad (2)$$

위 식에서 $K=5.23$, $Ga = gR^3/\nu^2$ (ν : kinematic viscosity of the liquid) 와 같다. 물의 동점성 계수는 $\nu=1 \times 10^{-6} [m^2/s]$ 이다. 댐핑 계수는 다음과 같다.

$$\zeta_n = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4\pi^2}} \quad (3)$$

한편 위식은 $h < R$ 일 경우에 적용되며 $h > R$ 인 경우 다음식과 같이 일정한 값을 가진다[3].

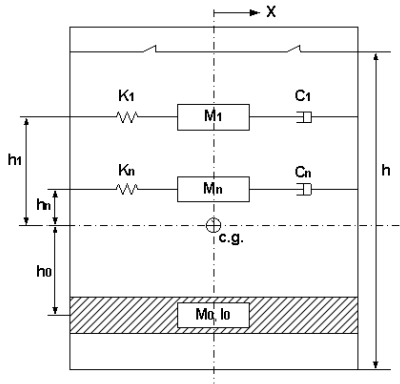


그림 2. 슬로시 모델의 등가의 질량 스프링 댐퍼 모델

$$\Lambda = K G a^{-1/4} \quad (h > R) \quad (4)$$

또한 슬로시 질량과 슬로시 힘 작용점 높이는 다음 그림 2와 같은 슬로시 모델의 등가의 질량 스프링 모델을 참고해 구할 수 있다.

실린더 용기의 액체 높이(h)에 따른 슬로시 모델 해석적인 질량은 다음 식으로 구할 수 있다[15].

$$\frac{m_n}{m_L} = \frac{2R}{\xi_n h (\xi_n^2 - 1)} \tanh(\xi_n \frac{h}{R}) \quad (5)$$

실린더 용기의 슬로시 힘 작용점 높이비는 직경(D)을 이용해 다음식과 같이 표현된다[15].

$$\frac{h_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{D}{\xi_n h} \tanh(\xi_n \frac{h}{D}) \quad (6)$$

3.2 슬로시 모델 파라미터 추정기법

슬로시 모델 파라미터를 시험데이터를 이용해 추정하기 위해 비선형 최소자승법(Nonlinear Least Squares)을 이용하였다[16].

임의의 시간 t_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)에서 측정 한 슬로시 변위 또는 힘 성분을 모아서 측정벡터 Y_m 을 정의할 수가 있으며

$$Y_m = [y_m(t_1) \ y_m(t_2) \ \dots \ y_m(t_N)] \quad (7)$$

마찬가지로 파라미터 벡터 ϕ 와 추정벡터 Y 를 정의할 수가 있다.

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]^T \quad (8)$$

$$Y = [y_s(\phi, t_1) \ y_s(\phi, t_2) \ \dots \ y_s(\phi, t_N)] \quad (9)$$

최소자승기법을 적용해서 파라미터 추정을 수행하기 위해서, 다음의 2차 오차 함수를 정의하고

$$J = \{Y_{k+1} - Y_m\}^T \{Y_{k+1} - Y_m\} \quad (10)$$

$$Y_{k+1} = Y(\phi_{k+1}) = Y(\phi_k + \Delta\phi_k)$$

오차를 최소화 되는 조건을 $\frac{\partial J}{\partial \Delta\phi_k} = 0$ 으로부터 구할 수가 있다

$$\Delta\phi_k = (C_k^T C_k)^{-1} C_k^T (Y_m - Y_k) \quad (11)$$

$$C_k = \left[\frac{\partial Y_k}{\partial \phi_1} \ \frac{\partial Y_k}{\partial \phi_2} \ \dots \ \frac{\partial Y_k}{\partial \phi_M} \right]$$

이때 파라미터 벡터는

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \gamma \Delta\phi_k, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (12)$$

와 같은 형태로 수정이 이루어지게 되는데, γ 를 항상 1보다 작은 값으로 두는 이유는 비선형 수렴 특성에 의해 오차가 커지는 것을 방지하기 위함이다. 개선벡터 $\Delta\phi_k$ 의 절대치가 충분히 작은 값일 때

$$|\Delta\phi_k| \leq \epsilon_f \ll 1 \quad (13)$$

파라미터 벡터가 최종적으로 수렴된 것으로 판정하게 된다.

3.3 시험데이터를 이용한 슬로시 파라미터 분석

위에서 언급한 최소자승법을 이용해 슬로시 시험장치를 이용해 슬로시 모델 파라미터를 시간영역에서 추정하였다. 슬로시 모드 데이터는 가진 구간과 정지구간에서 얻을 수 있다. 각각의 구하려고 하는 파라미터에 따라 다음과 같은 추정 모델을 적용하였다.

3.3.1 슬로시 모드 주파수 및 댐핑계수 추정

슬로시 모드 주파수와 댐핑계수는 슬로시 시험 장치의 정지 구간 데이터를 이용하였다. 정지 구간 시험 데이터를 이용해 슬로시 운동 파라미터를 시간영역에서 추정하기 위해서는 슬로시 변위 또는 슬로시 운동에 의한 힘 성분을 다음과 같은 형태로 가정한다. 여기서 $\phi = [C_s, \alpha_n, \omega_n^*, \theta, B]$ 가 추정해야할 파라미터에 해당하는데, B 는 측정센서에서의 바이어스 성분을 보상하기 위한 항이 된다.

$$y_s(t) = C_s e^{-\alpha_n t} \sin(\omega_n^* t + \theta) + B \quad (14)$$

$$\alpha_n = \zeta_n \omega_n$$

$$\omega_n^* = \zeta_n \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$$

표 1. 실린더 용기 슬로시 주파수 (R=0.1426m)

액체높이 [m]	1st 모드[Hz]		2nd 모드[Hz]	
	이론값	추정값	이론값	추정값
0.05	1.3506	1.3460	2.9762	2.9627
0.10	1.6604	1.6487	3.0462	3.0463
0.15	1.7542	1.7469	3.0478	3.0570
0.20	1.7809	1.7714	3.0479	3.0548
0.25	1.7883	1.7824	3.0479	3.0552
0.30	1.7903	1.7829	3.0479	3.0552
0.35	1.7903	1.7804	3.0479	3.0364
0.40	1.7903	1.7829	3.0479	3.0774

표 2. 슬로시 댐핑 계수 (ζ_n) (R=0.1426m)

액체높이 [m]	1st 모드($\times 10^{-3}$)		2nd 모드($\times 10^{-3}$)	
	이론값	추정값	이론값	추정값
0.05	4.1375	3.1832	2.1779	2.8527
0.10	2.2964	2.1440	2.0287	2.1851
0.15	2.0268	2.2991	2.0268	2.7737
0.20	2.0268	2.1149	2.0268	2.8170
0.25	2.0268	2.5640	2.0268	1.8832
0.30	2.0268	2.9640	2.0268	2.1556
0.35	2.0268	2.4145	2.0268	1.4185
0.40	2.0268	3.0975	2.0268	1.3501

각 모드 별로 식(14)의 추정식을 적용하여 구하고자 하는 슬로시 모드 주파수 ω_n 와 댐핑 계수 ζ_n 를 구할 수 있으며 그 결과는 표 1, 2와 같다. 시험을 통해 추정된 슬로시 모드 주파수와 댐핑계수가 해석치와 근사함을 확인할 수 있다.

3.3.2 슬로시 질량 추정

슬로시 시험장치의 가진 구간 수평방향 측정 힘을 이용하여 슬로시 질량을 계산할 수 있다. 먼저 슬로시 모델의 등가의 질량 스프링 댐퍼 모델에서 수평방향으로 $x_0(t) = X_0 \cos(\Omega t)$ 변위로 가진을 주는 경우를 생각해 볼 수 있다. 그림 3에서 x_n 는 용기의 무게 중심(c.g)를 기준으로 하는 변위로 정의한다. 이 때 용기가 회전운동은 하지 않고 병진운동으로 가진을 주는 경우로 가정한다. 그러면 슬로시 운동은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$m_n \ddot{x}_n + c_n \dot{x}_n + k_n x_n = -m_n \ddot{x}_0 \quad (15)$$

$$= m_n X_0 \Omega^2 \cos \Omega t = F_0 \cos \Omega t$$

위식에서 먼저 외란힘에 의한 특별해(particular solution)는 다음식과 같다.

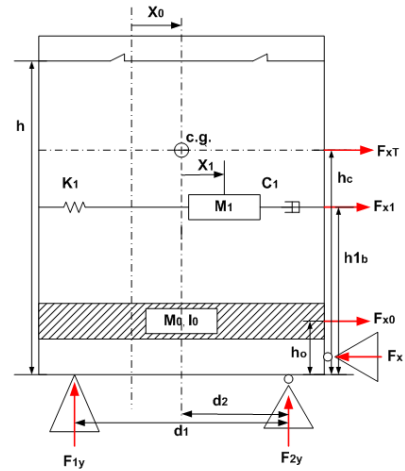


그림 3. 슬로시 파라미터 추정 모델

$$(x_n)_p = a_n \cos \Omega t + b_n \sin \Omega t \quad (16)$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(\Omega t - \eta_n) = P_n \cos(\Omega t - \eta_n)$$

$$a_n = \frac{X_0 \Omega^2 (\omega_n^2 - \Omega^2)}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4 \Omega^2 \alpha_n^2}, \quad b_n = \frac{2 X_0 \Omega^3 \alpha_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4 \Omega^2 \alpha_n^2}$$

$$\tan \eta_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{2 \Omega \alpha_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}$$

외력이 없는 경우의 일반해(homogeneous solution)는 다음식과 같다.

$$(x_n)_h = e^{-\alpha_n t} (A_h \cos \omega_n^* t + B_h \sin \omega_n^* t) \quad (17)$$

$$= Q_n e^{-\alpha_n t} \cos(\omega_n^* t - \delta_n)$$

액체 가진시 액체의 초기 상태가 움직임이 전혀 없는 정지 상태에서 가진 하는 경우 변위와 속도가 영인 조건을 이용하여 위의 식에서 두 개의 미지수 A_h, B_h 를 구할 수 있다.

$$A_h = -a, \quad B_h = \frac{-b \Omega - \alpha_n a}{\omega_n^*}$$

$$Q_n = \sqrt{A_h^2 + B_h^2}, \quad \tan \delta_n = \frac{B_h}{A_h}$$

최종적인 일반해는 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$x_n = (x_n)_h + (x_n)_p \quad (18)$$

$$= Q_n e^{-\alpha_n t} \cos(\omega_n^* t - \delta_n) + P_n \cos(\Omega t - \eta_n)$$

수평 힘 센서는 물체의 관성힘에 의해 압축을 받으면 양의 값이 측정되고 인장을 받으면 음의 값이 측정된다. 그 결과 F_{xT} 는 액체 용기 구조물

의 관성력을 $F_{x,n}$ 은 n차 슬로시 모드가 용기 벽면에 가하는 힘을 F_{x0} 는 고정된 유체 질량의 관성력을 나타낸다.

$$\begin{aligned} F_{xT} &= -m_T \ddot{x}_0, & F_{x0} &= -m_0 \ddot{x}_0, \\ F_{xn} &= c_n \dot{x}_n + k_n x_n = -m_n (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_n) \end{aligned} \quad (19)$$

그 결과 그림 3의 슬로시 파라미터 추정 모델에서 가진하고 있는 동안 수평 방향 측정힘은 다음 식과 같은 힘이 측정된다.

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xT} + \sum F_{x,n} + F_{x0} \\ &= -(m_T + m_0) \ddot{x}_0 - \sum m_n (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_n) \\ &= -(m_T + m_L) \ddot{x}_0 - \sum m_n \ddot{x}_n \end{aligned} \quad (20)$$

이 식에서 m_T 는 실린더 용기를 포함한 움직이는 구조물의 질량을 나타내며 m_0 는 액체의 고정 질량을, m_L 은 액체의 질량을 나타낸다. m_n 은 구하려고 하는 액체의 n차 모드 슬로시 질량을 나타내며 \ddot{x}_n 은 앞에서 구한 슬로시 모드 변위의 일반해를 두 번 미분해 구할 수 있다.

1차 모드만을 고려할 경우 가진 시작후 t_0 시간에서의 수평방향 측정힘은 다음식과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} F_x &= -(m_T + m_L) \ddot{x}_0 - \sum m_n \ddot{x}_n \\ &= (m_T + m_L) X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0) \\ &\quad - m_1 R_1 e^{-\alpha_1(t+t_0)} \cos(\omega_1^* t + \omega_1^* t_0 - \delta_1 - \beta_1) \\ &\quad + m_1 P_1 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0 - \eta_1) \\ M_1 &= Q_1 (\alpha_1^2 - \omega_1^{*2}), \quad N_1 = 2Q_1 \alpha_1 \omega_1^* \\ R_1 &= \sqrt{M_1^2 + N_1^2}, \quad \tan \beta_1 = \frac{N_1}{M_1} \end{aligned} \quad (21)$$

최소 자승법을 이용하여 슬로시 질량을 포함한 각 함수의 위상들을 추정할 수 있다. 추정하려는 파라미터 벡터를 ϕ 라 하면 위 식의 수평방향 측정힘은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= \phi_1 \cos(\Omega t + \phi_3) + \phi_2 e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1^* t + \phi_4) \\ &\quad + (m_T + m_L) X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi_5) + \phi_6 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\phi = [m_1 P_1 \Omega^2, -m_1 R_1 e^{-\alpha_1 t_0}, \Omega t_0 - \eta_1, \omega_1^* t_0 - \delta_1 - \beta_1, \Omega t_0, B]^T$$

실제 측정된 수평 방향 힘은 그림 4와 같으며 추정시에 이용한 데이터를 표시하였다.

그림 5는 위에서 설명한 최소자승법을 이용하여 다음과 같은 초기값들을 적용한 경우의 슬로시 질량 추정 결과를 보여주며 액체 높이가 $h=0.3m$ 인 경우이다.

$$\begin{aligned} m_T &= 22.83kg, & m_L &= 19.079kg, & \omega_1 &= 1.7829Hz, \\ \zeta_1 &= 2.9640 \times 10^{-3}, & \Omega &= 1.1Hz, & X_0 &= 0.0110m \end{aligned}$$

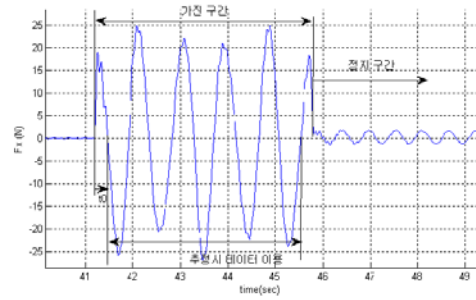


그림 4. 슬로시 수평방향 측정힘

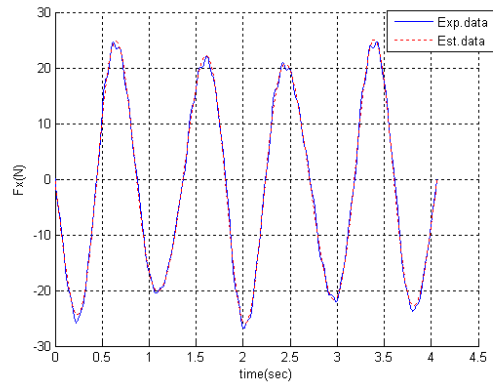


그림 5. 슬로시 수평방향 측정힘 추정 결과 (h=0.3m)

구하고자 하는 슬로시 모드 질량은 위 추정벡터와 관련된 ϕ 벡터 식에서 ϕ_1 이나 ϕ_2 를 이용해 구할 수 있다. 그러나 시험결과 ϕ_1 과 관련된 신호는 다른 모드의 가진 주파수 성분과 액체 질량과 용기 질량 오차등 여러 변수가 복합적으로 포함되어 있으므로 이 파라미터를 이용해 슬로시 질량을 구할 경우 오차가 크게 된다.

수평방향 힘 성분중 ϕ_2 와 관련된 신호는 신호 성분이 크며 슬로시 제1모드와 관련된 성분만 포함되어 있으므로 오차가 적게 포함됨을 확인하였다. ϕ_2 와 관련된 파라미터로 구한 슬로시 제1모드 질량은 3.9512kg 이다. 높이 $h=0.3m$ 에서 이론적인 슬로시 제1모드 질량은 4.1199kg으로 추정값은 오차가 작음을 확인할 수 있다.

정현파 함수로 가진 하면서 슬로시 파라미터를 추정할 경우 주의해야 할 변수가 가진 주파수와 가진 진폭이다. 움직이는 액체 표면이 직선 형태를 유지하면서 움직일 경우 선형 모델에 해당한다. 액체 표면이 곡선형태가 나타나면 약한 비선형 모델에 해당하며 액체가 벽면에 부딪쳐 떨어지면 강한 비선형 모델에 해당한다[15]. 해석

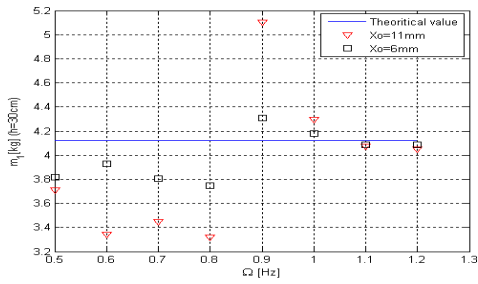


그림 6. 가진 주파수와 진폭에 따른 슬로시 질량

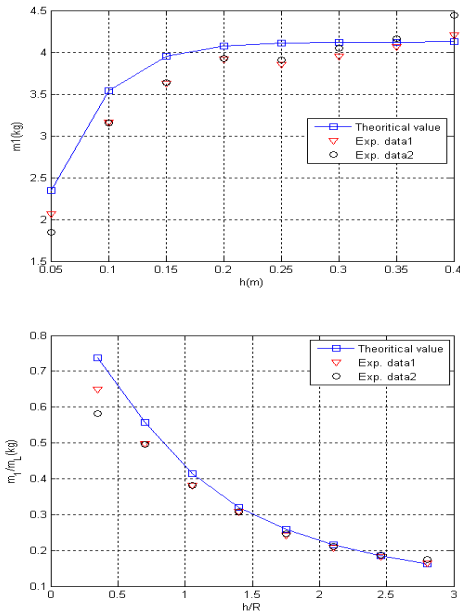


그림 7. 슬로시 제1모드 질량(상) 및 질량비(하)

적으로 구한 슬로시 파라미터는 선형 모델에서 구한 값이므로 실험으로 구한 값이 선형모델이 아니면 해석적인 값과 오차가 크게 된다. 그림 6은 가진 주파수에 따른 제1모드 슬로시 질량을 액체 높이 0.3m에서 구하였다. 가진 진폭을 0.011m로 가진 하는 경우에 가진 주파수가 제1모드 슬로시 주파수의 절반이 되는 곳 즉 0.9Hz 가진 주파수에서 슬로시 질량이 크게 추정되었다. 이 가진 주파수에서 해석값과 오차가 큰 것으로 보아 비선형 모델 거동을 하고 있음을 유추할 수 있다. 분석 결과 되도록이면 가진 주파수를 슬로시 제1모드 주파수의 절반이 되는 주파수를 피해 설정하는 것이 오차가 적음을 알 수 있다. 가진 진폭을 0.006m로 설정하였을 경우 가진 주파수에 따른 슬로시 질량 오차가 많이 감소함을 확인 할 수 있다. 그러나 가진 진폭을 너무 줄이면 측정시 구조물 잡음으로 인한 센서 측정

오차가 커지므로 적절한 값을 설정할 필요가 있다.

위와 같은 결과를 이용하여 각 높이에 따른 가진 진폭은 $X_0 = 0.0110\text{m}$ 로 설정 하였다. 가진 주파수는 액체 양이 작은 0.05m의 경우에는 0.8Hz, 0.9Hz로 가진 주파수를 설정하였다. 다른 액체 높이에서는 가진 주파수를 1.1Hz, 1.2Hz로 설정하여 비교하였다.

다음 그림 7은 최소 자승기법을 적용하여 구한 슬로시 제1모드 질량과 질량비를 나타낸다. 추정한 제1모드 슬로시 질량이 해석값과 유사함을 확인할 수 있다. 이 시험 장치의 경우 상위 모드 질량은 양이 작아 구조물 잡음으로 인해 구하는데 있어서 정확성이 떨어짐을 확인할 수 있었다.

3.3.3 슬로시 힘 작용점 높이 추정

그림 3에서 가진하고 있는 동안 슬로시 질량에 의한 슬로시 수평방향 힘의 작용점(h_{1b})을 실험적인 방법으로 계산하기 위해 다음과 같이 시험 장치를 모델링 할 수 있다. 이때 수평 힘 센서를 부착할 경우 수평 센서 부착 부분의 모멘트 반력으로 인해 수직 센서 측정 오차가 커짐을 확인하였다. 그 결과 수평 센서는 제거하고 수직 센서만 부착하여 모델링과 시험을 진행하였다. F_{2y} 가 작용하는 힌지점을 기준으로 모멘트 방정식을 표현하면 다음 식과 같다.

$$\sum M_2 = F_{1y}d_1 - m_0gd_2 + F_xTh_c + \sum F_{x,n}h_{n,b} + F_{x0}h_0 - \sum m_n g(d_2 - x_n) = 0 \quad (23)$$

실제 측정되는 F_{1y} 는 정적인 힘 성분은 나타나지 않고 동적인 힘 성분만 측정되므로 식(19)을 대입하면 다음식과 같이 표현된다.

$$F_{1y,dym} = m_T x_0 \ddot{\frac{h_c}{d_1}} + m_0 x_0 \ddot{\frac{h_0}{d_1}} + \sum m_n (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_n) \frac{h_{n,b}}{d_1} - \sum m_n g \frac{x_n}{d_1} \quad (24)$$

위 식에서 앞에서 구한 슬로시 질량을 이용하면 고정된 유체 질량 작용점 높이 h_0 을 구할 수 있다. 또한 빈용기를 가진하면 구조물의 수평방향 작용점 높이 h_c 을 구할 수 있다. 그 결과 구하고자 하는 슬로시 모드 질량에 의한 수평방향 작용점 높이 $h_{n,b}$ 을 추정할 수 있다. 슬로시 질량을 구한 경우 사용한 슬로시 모드 변위의 가속도항 \ddot{x}_n 을 대입하고 슬로시 제1모드만을 고려할 경우 가진 후 t_0 시간 후 수직 방향 동적인 힘은 다음과 같이 나타나며 같은 위상을 갖는 주파수별로 추정하기 위해 분리해서 표현하였다.

$$\begin{aligned}
 F_{1y, dgm} = & -m_T \frac{h_c}{d_1} X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0) \\
 & -m_0 \frac{h_0}{d_1} X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0) - m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0) \\
 & -m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} P_1 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Omega t_0 - \eta_1) \\
 & + m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} R_1 e^{-\alpha_1(t+t_0)} \cos(\omega_1^* t + \omega_1^* t_0 - \delta_1 - \beta_1) \\
 & + m_1 \frac{g}{d_1} \{-P_1 \cos(\Omega t + \Omega t_0 - \eta_1) - Q_1 e^{-\alpha_1(t+t_0)} \cos(\omega_1^* t + \omega_1^* t_0 - \delta_1)\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

최소 자승법을 이용하여 슬로시 힘 작용점 h_{1b} 을 포함한 각 함수의 위상들을 추정할 수 있다. 추정하려는 파라미터 벡터를 ϕ 라 하면 위 식의 수직방향 측정힘은 다음과 같이 표현된다. 다음 식에서 β_1 는 댐핑이 작은 경우 180도 위상차를 나타내는 변수로 초기에 모드 주파수와 댐핑 계수로 계산가능 하므로 추정시 β_1 는 계산된 값을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 F_{1y, dgm} = & -m_T \frac{h_c}{d_1} X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi_4) \\
 & -m_0 \frac{h_0}{d_1} X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi_4) + \phi_1 \cos(\Omega t + \phi_4) \\
 & + \phi_2 \cos(\Omega t + \phi_5) + \phi_3 e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1^* t + \phi_6 - \beta_1) \\
 & + m_1 \frac{g}{d_1} \{-P_1 \cos(\Omega t + \phi_5) - Q_1 e^{-\alpha_1(t+t_0)} \cos(\omega_1^* t + \phi_6)\} + \phi_7 \\
 \phi = & [-m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} X_0 \Omega^2, -m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} P_1 \Omega^2, m_1 \frac{h_{1b}}{d_1} R_1 e^{-\alpha_1 t_0}, \\
 & \Omega t_0, \Omega t_0 - \eta_1, \omega_1^* t_0 - \delta_1, B]^T
 \end{aligned} \tag{26}$$

그림 8은 위식을 적용한 최소자승법을 이용하여 액체 높이가 $h=0.3m$ 인 경우 다음과 같은 초기값들을 적용한 슬로시 작용점 높이를 추정한 결과이다.

$$\begin{aligned}
 m_T = & 22.83kg, \quad m_L = 19.079kg, \quad \omega_1 = 1.7829Hz, \\
 \zeta_1 = & 2.9640 \times 10^{-3}, \quad \Omega = 1.1Hz, \quad X_0 = 0.0110m, \\
 h_c = & 0.2669m, \quad h_0 = 0.3692m
 \end{aligned}$$

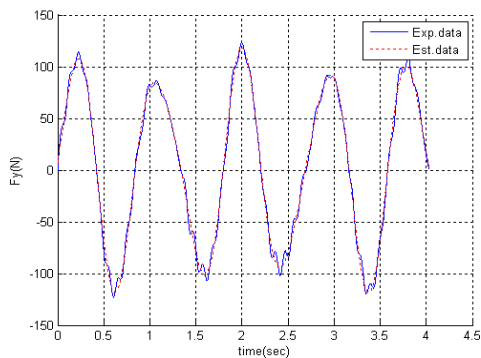


그림 8. 슬로시 수직방향 힘 추정 결과 (h=0.3m)

슬로시 질량 추정과 마찬가지로 가진 주파수 성분에는 포함된 파라미터 ϕ_1, ϕ_2 항으로 추정하는 것보다 슬로시 모드 주파수 성분으로 구한 힘 작용점 높이 추정 결과가 정확함을 알 수 있었다. 즉 위 식 (26)에서 ϕ_3 항을 포함한 신호는 신호 강도가 크고 제 1모드 성분만을 포함하기 때문에 이 파라미터로 구한 슬로시 힘 작용점 높이는 오차가 적게 포함됨을 확인하였다. ϕ_3 와 관련된 파라미터로 구한 슬로시 제1모드 힘 작용점 높이 h_{1b} 은 0.1593m이다. 실제 추정값은 바이어스 값을 포함하고 있으나 이를 제거하면 실린더용기 바닥면 기준 높이를 구할 수 있다. 높이 $h=0.3m$ 에서 이론적인 슬로시 제1모드 힘 작용점 높이는 0.1514m로 추정값이 이론값과 유사함을 알 수 있다. 이와 같은 방법으로 용기 바닥면 기준 슬로시 힘 작용점 높이를 액체의 각 높이에서 추정 한 결과는 그림 9와 같다.

액체 높이가 낮은 부분에서 슬로시 질량과 힘 작용점 높이 오차가 크게 발생함을 확인 할 수 있다. 이는 액체 높이가 낮은 부분에서는 액체 질량이 작아 센서 측정오차가 많이 포함되고 슬로시 운동의 비선형 특성이 포함되어 생기는 원인으로 유추된다. 또한 액체 용기가 작아 상위 모드 슬로시 질량이 매우 작으며 이에 비해 구조물의 잡음이 크게 나타나 상위 모드 슬로시 질량

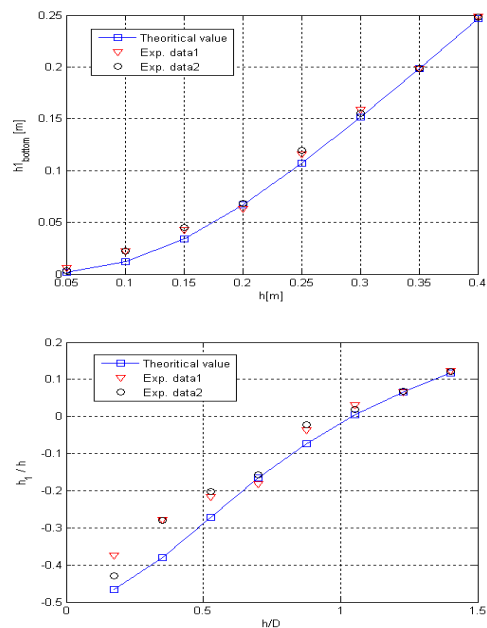


그림 9. 슬로시 제1모드 힘 작용점 높이(상) 및 높이비(하)

과 힘 작용점 높이를 추정하기에 어려움이 있다.

발사체의 경우 슬로시 모델 파라미터 추정 오차가 제어기 설계의 안정성에 미치는 영향은 비행구간마다 다르게 나타난다. 일반적으로 슬로시 제1모드가 다른 모드에 비해 갖는 힘이 가장 크므로 제1모드의 추정 오차를 5% 이내로 고려하며 그 외 상위 모드는 5-10% 오차범위를 고려한다. 추정된 결과는 실린더 직경이상의 액체 높이에서는 대부분 오차 범위이내에 분포함을 확인할 수 있다. 표 2의 댐핑 계수의 경우 오차가 다른 파라미터에 비해 크게 나타남을 확인할 수 있었으며 참고문헌[3]에서도 유사한 결과를 확인할 수 있다. 댐핑 계수는 가진 조건 즉 가진 진폭이나 가진 주파수에 따라 추정 결과의 편차가 크게 나타난다.

IV. 결 론

본 논문에서는 슬로시 시험장치를 이용하여 슬로시 주파수와 댐핑 계수, 슬로시 질량 및 슬로시 힘 작용점 높이를 추정하기 위한 시험 방법 및 기법을 정립하였다. 시간 영역 데이터를 이용한 최소 자승법을 적용해 추정함으로써 시험장치를 좀 더 단순화시킬 수 있으며 추정오차를 많이 줄일 수 있었다. 이를 통해 슬로시 주파수와 댐핑 계수와 함께 슬로시 모드 질량 및 슬로시 힘 작용점 높이를 시험을 통해 추정하였다. 추정된 각 슬로시 모델 파라미터가 해석 결과와 비교해 근사함을 확인하였으며 추정기법의 정확성을 파악할 수 있었다. 이와 같이 추정한 슬로시 모델 파라미터를 이용하여 발사체나 인공위성 자세 제어 설계시 슬로시 모드를 고려한 설계를 할 수 있다.

참고문헌

- 1) J. S. Meserole and A. Fortini, "Slosh Dynamics in a Toroidal Tank", J. Spacecraft, Vol. 24, No. 6, Nov. 1987, pp. 523-531.
- 2) J. F. Unruh etc, "Digital Data Analysis Techniques for Extraction of Slosh Model Parameters", J. Spacecraft, Vol. 23, No. 2, March 1986, pp. 171-177.
- 3) T. Arndt, M. Dreyer, "Damping Behavior of Sloshing Liquid in Laterally Excited Cylindrical Propellant Vessels", 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA-2007-5162, 8-11

July 2007, Cincinnati, OH

4) D. G. Stephens etc, "Investigations of the Damping of liquids in Right-Circular tanks Including the Effects of Time-Variant Liquid Depth" NASA TN-D-1367, July 1962.

5) C. Oh, etc, "Sloshing Analysis Using Ground Experimental Apparatus," International Conference on Control, Automation and Systems, 2008, pp. 2203-2207.

6) I. E. Sumner, "Preliminary Experimental Investigation of Frequencies and Forces Resulting From Liquid Sloshing in Toroidal Tanks" NASA TN-D-1709, June 1963.

7) I. E. Sumner etc, "Experimentally Determined Pendulum Analogy of Liquid Sloshing in Spherical and Oblate-spheroidal Tanks" NASA TN- D-2737, April 1965.

8) I. E. Sumner etc, "Experimental Sloshing Characteristics and a Mechanical Analogy of Liquid Sloshing in a Scale-Model Centaur Liquid Oxygen Tank" NASA TM-X-999, August 1964.

9) I. E. Sumner etc, "Experimental Investigation of Liquid Sloshing in a Scale-Model Centaur Liquid-Hydrogen Tank" NASA TM-X-1313, November 1966.

10) F. T. Dodge and L. R. Garza, "Equivalent Mechanical Model of Propellant Sloshing in the Workshop Configuration of the Saturn S-IVB" NASA CR-102615, June 1969.

11) R. G. Ross and J. R. Womack, "Slosh Testing of a Spherical Mercury Propellant Tank With Positive-Expulsion Diaphragm", NASA CR-133790, July 1973.

12) 오충석, 선병찬, 박용규, 노웅래, "지상 시험장치를 이용한 고체 모터 슬래그에 의한 슬로시 분석", 한국항공우주학회 2008년도 추계 학술 발표회 논문집 pp. 1152-1155.

13) F. T. Dodge, The New Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, Southwest Research Institute, 2000.

14) NASA, Slosh Suppression NASA Space Vehicle Design Criteria, NASA-SP-8031, May 1969.

15) R. A. Ibrahim, Liquid Sloshing Dynamics, Cambridge, 2005.

16) S. Van Huffel, etc, "The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis", Philadelphia: SIAM, 1991.