

論文

속력변화를 고려한 비례항법유도의 최적성 해석

전인수* 이진익*

Analysis on Optimality of Proportional Navigation
With Time-Varying Velocity

In-Soo Jeon* and Jin-Ik Lee*

ABSTRACT

This paper shows that the conventional proportional navigation guidance(PNG) law with a constant navigation gain is an optimal solution strictly also when the velocity is varying during engagement. Especially, PNG with navigation constant, 3, is an optimal solution minimizing a closing velocity weighted induced-drag. While most of previous studies on optimality of PNG were relied on the linear formulation and the constant speed assumption, this study presents more general analysis results on optimality of PNG based on the nonlinear formulation and the time-varying velocity assumption.

초 록

본 논문에서는 기존의 호밍유도법칙으로 널리 사용되는 상수 항법이득을 갖는 비례항법유도법칙이 속력 변화가 있는 경우에도 엄밀한 의미에서 최적해임을 보였다. 해석결과로부터 항법상수가 3인 경우 유도항력에 접근속력이 가중된 성능지수를 최소화하는 최적해임이 확인되었다. 비행체의 운동을 선형방정식으로 표현하고 속력변화를 고려하지 않은 기존 연구결과들과 달리 본 연구에서는 비선형 방정식을 기반으로 속력변화까지 고려하여 비례항법유도법칙의 최적성에 관한 보다 일반적인 해석 결과를 제시하였다.

Key Words : Proportional Navigation Guidance(비례항법유도), Optimal Guidance(최적유도), Time-Varying Velocity(시변속력)

1. 서 론

비례항법유도법칙은 2차 세계대전 이후 유도탄의 중기 혹은 종말유도에 사용되기 시작하였으며, 현재 각종 전술 유도탄에 가장 널리 사용되고 있는 유도법칙이다. 비례항법유도법칙은 충돌삼각형 상에서 표적과 비행체를 잇는 시선(LOS, Line of Sight)이 변화하지 않으면 결국 비행체가 표적에 충돌하게 된다는 사실로부터 유도명령

은 시선의 회전각속도에 비례하도록 주어진다. 이때 비례상수를 항법상수라고 하며 일반적으로 3~5의 값이 선택되는 것으로 알려져 있다.

비례항법유도법칙의 최적성에 관하여, 항법상수 3인 비례항법유도법칙은 비행체의 제어 에너지를 최소화하는 최적해가 된다는 사실이 널리 알려져 있다[1,2]. 또한 비행상태와 제어 에너지에 가중함수를 갖는 어떤 성능지수가 존재하여 항법상수가 3이 아닌 경우의 비례항법유도법칙도 최적해의 하나가 될 수 있음이 알려져 있다[3]. 제어 에너지를 최소화하는 최적제어문제의 가중함수가 특수한 함수 형태가 되면 그 해가 임의의 항법상수를 갖는 비례항법유도법칙이 되는지에 대한 연구도 수행되었으며 결과적으로 그

† 2009년 7월 2일 접수 ~ 2009년 9월 7일 심사완료

* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : isjeon@fdcl.kaist.ac.kr

대전유성우체국사서함 35-3번지

가중함수는 잔여비행시간의 지수 형태가 됨이 알려졌다[4,5]. 이러한 연구들은 비례항법유도법칙의 최적성에 관한 다양한 시각을 제공해 주었다.

그러나 이러한 연구 결과들은 모두 비행체와 표적의 기하학적 관계에서 비행체의 운동을 선형 방정식으로 표현할 수 있다는 가정 하에서 정립된 것이다. 또한 대부분의 연구결과들은 유도과정에서 비행체의 속력이 일정하다는 가정을 도입한다. 비행체가 시변(time-varying) 속력을 갖는 경우에 대한 유도법칙의 최적성에 관한 선도적인 연구가 수행된 바 있으나 이 연구도 선형화 가정을 통해 정립되었다[6].

본 논문에서는 일체의 선형화 가정을 도입하지 않고 비행체가 시변 속력을 갖는 일반적인 경우에 대하여 기존의 상수 항법이득을 갖는 비례항법유도법칙의 최적성에 대한 엄밀한 해석을 수행하고 그 결과를 제시한다.

II. 문제 설정

수평면 상의 임의의 표적을 향해 비행하는 비행체를 고려하자. 표적의 운동과 무관하게 표적을 원점으로 하는 기준 좌표계를 도입하여 유도기하를 나타내면 Fig. 1과 같다. 이로부터 비행체의 운동은 다음과 같은 비선형 방정식으로 기술된다.

$$\dot{r}(t) = -V(t) \cos(\gamma(t) - \lambda(t)) \quad (1)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{V(t)}{r(t)} \sin(\gamma(t) - \lambda(t)) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}(t) = a(t)/V(t) \quad (3)$$

여기서 r 은 비행체와 표적과의 상대거리(이하 표적거리), V 는 표적에 대한 비행체의 상대 속력, γ 는 비행 경로각, λ 는 비행체와 목표점의 시선각, 그리고 a 는 비행체 속도 벡터에 수직인 제어 입력이다. 상대속력(V)은 유도 과정에서 시변할 수 있다.

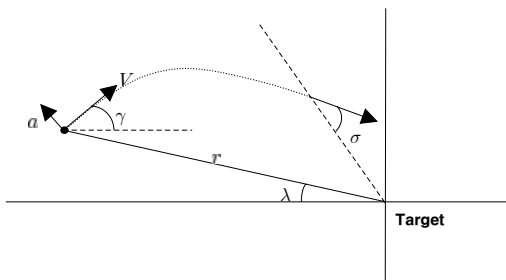


Fig. 1. Guidance Geometry

비행체의 속도 벡터가 비행체와 목표점의 시선과 이루는 각(σ)을 지향각이라고 정의하자. 식 (1)~(3)을 지향각($\sigma = \gamma - \lambda$)을 이용해 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{r}(t) = -V(t) \cos \sigma(t) \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{a(t)}{V(t)} + \frac{V(t)}{r(t)} \sin \sigma(t) \quad (5)$$

비행체가 표적과 충돌(intercept)하기 위해 표적거리(r)는 유한한 시간(t_f)에 영으로 접근해야 한다. 또한 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각도 영으로 접근해야 한다. 따라서 충돌을 위한 종말의 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\lim_{t \rightarrow t_f < \infty} r = 0, \lim_{r \rightarrow 0} \sigma = 0 \quad (6)$$

먼저 수평면 상의 정지된 표적에 대하여 호밍 과정에서 지향각이 작고, 비행체의 속력이 일정하다는 가정을 도입하여 선형해석을 수행해 보자. 식(4)와 (5)는 다음과 같이 선형화될 수 있다.

$$\dot{r}(t) = -V \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{a(t)}{V} + \frac{V}{r(t)} \sigma(t) \quad (8)$$

제어 에너지를 최소화하기 위한 목적으로 성능지수를 다음과 같이 표현하자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} a(t)^2 dt \quad (9)$$

이러한 성능지수를 최소화하는 최적 가속도 명령(a)을 구해보면

$$a(t) = -\frac{3V\dot{\lambda}(t)}{t_f - t} \quad (10)$$

여기서 $\dot{\lambda}(t) \approx -\sigma(t)/(t_f - t)$ 이므로 최적 해는 항법상수가 3인 비례항법유도법칙이 됨을 알 수 있다.

$$a(t) \approx 3V\dot{\lambda}(t) \quad (11)$$

이상과 같이 정지 표적에 대하여 첫째 지향각이 작고, 둘째 비행체의 속력이 일정하다는 가정 아래에 제어 입력 에너지를 최소화시키는 유도법칙은 항법상수가 3인 비례항법유도법칙임은 지금까지 잘 알려진 사실이다. 그러나 이러한 사실은 도입한 두 가정에 의해 선형화된 식을 사용할 경우에만 타당하다는 점을 주목해야 한다.

III. 최적성 해석

만약 표적거리가 시간에 따라 단조감소하면, 상태변수들의 독립변수로 시간(t) 대신 표적거리(r)를 사용하여 표현할 수 있다. 이 경우 $t = f(r)$ 또는 $r = f^{-1}(t)$ 와 같이 두 독립변수의 관계를 나타내는 함수 f 가 존재한다. 식(4)로부터 r 이 시간에 따라 단조 감소하기 위한 조건은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$|\sigma(t)| < \frac{\pi}{2} \text{ for } t \in [0, t_f] \quad (12)$$

식(4), (5)에서 독립변수를 시간 대신 표적거리를 사용하여 표현하면 다음과 같이 하나의 비선형 미분방정식으로 표현된다.

$$\frac{d\sigma'(r)}{dr} = -\frac{a'(r)}{V^2(r)\cos\sigma'(r)} - \frac{1}{r}\tan\sigma'(r) \quad (13)$$

여기서 프라임 기호는 $\sigma(t) = \sigma(f(r)) \equiv \sigma'(r)$ 등과 같이 독립변수가 r 인 함수를 정의하기 위한 것이나 표기의 편의상 이하에서 프라임 기호는 생략하기로 하자.

위 식을 각각 새로운 변수 $\eta(r) = \sin\sigma(r)$ 와 $u(r) = a(r)/V^2(r)$ 를 도입하여 정리하면 다음과 같이 η 에 대한 미분 방정식 형태가 된다.

$$\frac{d\eta(r)}{dr} = -u(r) - \frac{\eta(r)}{r} \quad (14)$$

이제 유도의 종말 경계조건은 식(6)에 따라 $\eta_f = \eta(0) = 0$ 로 표현된다.

다음과 같은 성능지수를 정의하자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \frac{u^2(r)}{r^\alpha} dr \quad (15)$$

여기서 r_0 는 r 의 초기치, α 는 임의의 실수를 의미한다. 이제 식(12)의 조건을 만족하며, 식(14)의 구속조건을 가지고 식(15)의 성능지수를 최소화하는 최적제어입력(u)을 구하는 문제를 고찰한다.

식(15)의 성능지수를 최소화하기 위한 유도 문제에서 Pontryagin의 minimum principle을 적용하기 위하여 다음과 같이 해밀토니언(H)을 정의하자[2].

$$H = \frac{u^2(r)}{2r^\alpha} + \lambda_\eta(r) \left(-u(r) - \frac{\eta(r)}{r} \right) \quad (16)$$

여기서 λ_η 는 costate이며 다음과 같은 식을 따름적이다.

$$\frac{d\lambda_\eta(r)}{dr} = -H_\eta = \frac{\lambda_\eta(r)}{r} \quad (17)$$

여기서 $\eta(0) = 0$ 라는 종말 경계조건에 의해 $\lambda_{\eta f} = 0$ 로 둘 수 있다. 따라서 식(17)을 풀면 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_\eta(r) = \nu_\eta r \quad (18)$$

여기서 ν_η 는 상수이다. 한편 최적제어 입력은 다음의 관계식을 만족한다.

$$H_u = \frac{u(r)}{r^\alpha} - \lambda_\eta(r) = 0 \quad (19)$$

따라서 최적 제어 입력은 다음과 같이 표현된다.

$$u(r) = \nu_\eta r^{\alpha+1} \quad (20)$$

식(20)의 제어입력을 식(14)에 대입하고 초기조건을 적용하면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$\eta(r) = \eta_0 \frac{r_0}{r} + \frac{\nu_\eta}{r} \frac{r_0^{\alpha+3} - r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \quad (21)$$

여기서 종말조건($\eta_f = 0$)을 적용하면 상수 ν_η 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\nu_\eta = -\eta_0 \frac{\alpha+3}{r_0^{\alpha+2}} \quad (22)$$

따라서 최종 해의 형태를 정리하면 다음과 같다.

$$\eta(r) = \eta_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha+2} \quad (23)$$

여기서 실수 $\alpha > -2$ 이면 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각이 영으로 접근함을 알 수 있다.

식(22)를 식(20)에 대입하고 앞에서 도입한 관계식 $u(r) = a(r)/V^2(r)$ 를 이용하면 다음과 같은 개루프 최적 해를 구할 수 있다.

$$a(r) = -\frac{(3+\alpha)V^2(r)\eta_0}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha+1} \quad (24)$$

위 식에서 실수 $\alpha \geq -1$ 이면 표적거리가 영으로 접근할 때 유도명령은 유한함을 알 수 있다. 또한 현재의 상태를 초기조건으로 보면 다음과 같은 페루프 최적 해를 구할 수 있다.

$$a(r) = -\frac{(3+\alpha)V^2(r)\sin\sigma(r)}{r} \quad (25)$$

위 식의 유도명령은 식(15)의 성능지수를 최소화시키며 유도 목적을 달성할 수 있는 최적 유도명

령이다. 여기서 식(2)의 관계를 이용하면 식(25)는 흥미롭게도 정확히 다음과 같은 상수 항법이득 $N(=3+\alpha)$ 을 갖는 비례항법유도법칙이 됨을 알 수 있다.

$$a(t) = NV(t)\dot{\lambda}(t) \quad (26)$$

그러므로 시간에 따라 속력 변화가 있는 경우 항법상수가 $N=3+\alpha$ ($\alpha \geq -1$)인 비례항법유도법칙은 식(15)의 성능지수를 최소화하는 최적 해임을 알 수 있다. 식(15)의 성능지수를 다른 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{a(r)}{V^2(r)} \right)^2 dr \quad (27)$$

또는,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \frac{V(t)\cos\sigma(t)}{r(t)^\alpha} \left(\frac{a(t)}{V(t)^2} \right)^2 dt \quad (28)$$

한편, 정지 표적에 대해 상대 접근속력과 가속도는 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_C(t) = V(t)\cos\sigma(t) \quad (29)$$

$$a = C_L \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 S \quad (30)$$

따라서 위 성능지수의 피적분함수는 접근속력과 유도항력으로 구성됨을 알 수 있다.

이제, 성능지수의 특징을 구체적으로 고찰하기 위해 $\alpha=0(N=3)$ 으로 놓으면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} V_C C_L^2 dt \quad (31)$$

이는 식(26)에서 $N=3$ 인 가속도 명령은 위 성능지수 (31)을 최소화하는 최적해임을 의미한다. 즉 속력변화가 있는 경우 항법상수가 3인 비례항법유도법칙은 접근속력이 가중된 유도항력을 최소화하는 최적해임을 나타낸다.

참고로, 이러한 성능지수는 접근속력이 작은 경우 상대적으로 큰 유도항력 또는 수직 가속도 유도명령을 허용하고 있음을 내포하고 있다. 이는 속력이 일정하다고 가정한 이전 연구결과[7]보다 일반화한 해를 제공하고 있다.

마지막으로 r 을 단조 감소시키는 지향각의 초기 조건에 대해 살펴보자. 식(26)의 비례항법유도법칙이 적용되면 식(5)에서 지향각의 시간변화율은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\sigma}(t) = -2V(t)\sin\sigma(t)\frac{1}{r(t)} \quad (32)$$

따라서 표적거리가 영인 경우를 제외하고는 항상 $\sigma(t)\dot{\sigma}(t) < 0$ 이 성립한다. 이는 $d|\sigma(t)|/dt < 0$ 이 성립함을 의미하므로 만약 지향각의 초기조건이 $|\sigma_0| < \pi/2$ 이면 항상 다음의 관계가 성립한다.

$$|\sigma(t)| \leq |\sigma_0| < \frac{\pi}{2} \quad \text{for } t \in [0, t_f] \quad (33)$$

그러므로 $|\sigma_0| < \pi/2$ 이면 비례항법유도법칙은 항상 r 을 단조 감소시킨다. 그러므로 초기 지향각의 범위가 $|\sigma_0| < \pi/2$ 이면 이상의 해석 결과가 유효함을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 기존의 호밍유도법칙으로 널리 사용되는 상수 항법이득을 갖는 비례항법유도법칙이 속력 변화가 있는 경우에도 엄밀한 의미에서 최적해임을 보였다. 해석결과로부터 정지표적에 대해 항법상수가 3인 경우 유도항력에 접근속력이 가중된 성능지수를 최소화하는 최적해임이 확인되었다. 이로부터 일반적으로 널리 사용되는 비례항법유도법칙을 속력 변화가 있는 문제에 적용할 경우에도 경계조건인 표적 요격을 보장한다는 사실을 뒷받침하게 되었다.

참고문헌

- 1) P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, AIAA Inc., 4th Ed. 2002.
- 2) A. E. Bryson, Jr., Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Co., 1975.
- 3) E. Kleindler, "Optimality of Proportional Navigation", *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, June 1973, pp. 878-880.
- 4) 조항주, "PNG의 항법상수와 이와 관련된 최적제어 문제", 한국자동제어학회논문집, 1992. 10, pp. 578-583.
- 5) E. J. Ohlmeyer, "Control of Terminal Engagement Geometry Using Generalized Vector Explicit Guidance", *Proceedings of the American Control Conference and Exhibit*, Denver, Colorado, June 2003, pp. 396-401.
- 6) H. Cho, C. K. Ryoo, and M. J. Tahk, "Closed-Form Optimal Guidance Law for Missiles of Time-Varying Velocity", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 5, Sep.-Oct. 1996, pp. 1017-1022.
- 7) 전인수, 이진익, "비선형 운동방정식에 근거한 비례항법유도의 최적성에 관한 해석", 한국항공우주학회지, 제37권 제4호, 2009, pp. 367-371.