대 한 조 선 학 회 논 문 집
제 46 권 제 2 호 2009 년 4 월

Journal of the Society of Naval Architects of Korea
Vol. 46, No. 2, pp. 155-164, April 2009
DOI: 10.3744/SNAK.2009.46.2.155

스펙트럴유한요소법을 적용한 점탄성층 샌드위치평판의 진동해석

이 성 주*, 송 지 훈†*, 홍 석 윤*

서울대학교 조선해양공학과*

Applications of Spectral Finite Element Method for Vibration Analysis of Sandwich Plate with Viscoelastic Core

Sung-Ju Lee*, Jee-Hun Song†* and Suk-Yoon Hong*

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University*

Abstract

In this paper, a spectral finite element method for a rectangular sandwich plate with viscoelastic core having the Levy-type boundary conditions has been plated. The sandwich plate consists of two isotropic and elastic face plates with a surfaced-bonded viscoelastic core. For the analysis, the in-plane and transverse energy in the face plates and only shear energy in the core are considered, respectively. To account for the frequency dependent complex shear modulus of the viscoelastic core, the Golla-Hughes-McTavish model is adopted. To evaluate the validity and accuracy of the proposed method, the frequency response function and dynamic responses of the sandwich plate with all edges simply supported subject to an impact load are calculated and compared with those calculated by a finite element method. Though these calculations, it is confirmed that the proposed method is very reliable and efficient one for vibration analysis of a rectangular sandwich plate with viscoelastic core having the Levy-type boundary conditions.

※Keywords: Spectral finite element method(스펙트럴유한요소법), Sandwich plate(샌드위치평판), Frequency response function(주파수응답함수), Dynamic response(동적응답)

0. 용어 정의

u_1, v_1	기반층의 x, y 방향 변위
u_3, v_3	구속층의 x, y 방향 변위
E_1, E_3	기반층과 구속층의 탄성계수
ν_1, ν_3	기반층과 구속층의 Poisson 비
η_1, η_3	기반층과 구속층의 구조감쇠계수
G_2	점탄성재료의 전단계수
L_x, L_y	샌드위치평판의 x, y 방향 길이
h_1, h_2, h_3	기반층과 점탄성층, 구속층의 두께
$k_n (= n\pi / L_y)$	y 방향 n 차 모드 파수

접수일: 2008 년 12 월 10 일, 승인일: 2009 년 3 월 23 일
†교신저자: jhs1227@snu.ac.kr, 02-880-7331

1. 서론

진동하는 구조물 사이에 점탄성재료를 삽입하는 방법은 점탄성층의 전단변형을 통해 진동에너지를 열에너지로 분산시켜 감쇠효과를 주는 소음·진동 저감기술 중의 하나이다. 선실의 안락감 및 승선감 향상이 중요시되고 있는 요즘 이러한 점탄성재료를 이용한 진동제어는 다양한 선박시스템으로 그 적용이 확대되고 있으며 특히, 소음·진동기술이 매우 중요한 크루즈선 및 해양구조물 등에서 주목 받는 핵심기술 중 하나라 할 수 있다.

점탄성층이 삽입된 구조물의 경우, 주파수에 따라 점탄성재료의 전단계수가 변하게 되고, 구조의 복잡성과 재질의 상이함으로 인해 동특성 해석이 매우 어려운 실정이다. 따라서 점탄성재료를 이용한 진동저감기술은 이론적으로나 실증적으로 많은 부분이 미개척 상태이며 계속해서 많은 연구가 이루어지고 있다.

본 논문에서는 이러한 점탄성 감쇠구조물의 동특성 해석에 대한 연구의 일환으로서 점탄성 감쇠구조물의 대표적인 요소인 샌드위치평판에 대해 다루었다. 샌드위치평판은 1950 년대부터 본격적인 연구가 시작되어 Rao and Nakra(1974)에 의해 등방성인 두 탄성판사이에 점탄성층이 삽입된 샌드위치평판 모델에 대한 굽힘 변위 운동방정식이 유도 되었고, Wang and Wereley(2003)에 의해 샌드위치평판의 굽힘 변위와 탄성층들의 축 방향 변위가 연성된 운동방정식이 유도되었으며 유한요소법과 Galerkin Assumed Mode Method 를 통해 샌드위치평판에 대한 동적 해석이 이루어져 왔다.

하지만 샌드위치평판에 대한 유한요소해석의 경우 점탄성 재료를 시간영역에서 모델링 하는 것이 매우 복잡하고, 요소분할의 한계로 인해 주파수가 높아질수록 오차가 커지게 되며 Galerkin Assumed Mode Method 를 적용 할 경우 단일 샌드위치평판에 대해서만 해석이 가능하다는 단점을 가지게 된다. 따라서 위와 같은 기존의 해석법들의 단점을 보안하고 개선하기 위해 본 연구에서는 스펙트럴유한요소법(SFEM, Spectral Finite Element Method)을 적용하여 샌드위치평판의 진동해석을 수행하였다. 스펙트럴유한요소법은 Doyle(1997)에 의해 기초적인 연구가 이루어져 왔으며, 구조물의 운동방정식으로부터 유도된 주파수 종속인 정확한 형상함수를 사용하여 동적 구조물의 응답특성을 구하는 해석 방법이다. 따라서 스펙트럴유한요소법은 구조물의 형상, 재질, 하중 조건의 불연속 점에서 최소의 요소 분할만으로 주파수 대역에 관계없이 정확한 결과를 얻을 수 있는 해석 방법이다.

따라서 본 연구에서는 이 스펙트럴유한요소법을 통해 샌드위치평판의 진동해석을 수행함에 있어 다음과 같은 연구 과정을 따랐다. (1) 샌드위치평판에 대한 연성 운동방정식과 경계조건을 Hamilton 의 원리로부터 유도하였고, (2) 다음으로 운동방정식과 경계조건을 이용하여 샌드위치평판에 대한 스펙트럴유한요소를 유도하였다. (3) 마지막으로 스펙트럴유한요소법에 의한 결과와 기존의 유한요소법을 이용한 해석결과를 비교하여 신뢰성을 검증하고, 이에 대해 논의하였다.

2. 샌드위치평판의 운동방정식 유도

본 연구의 해석대상인 샌드위치평판은 Fig.1 과 같이 탄성재질인 평판 사이에 점탄성층이 삽입된 3 단 구조를 갖는다.

이 샌드위치평판의 운동지배방정식을 유도하기 위

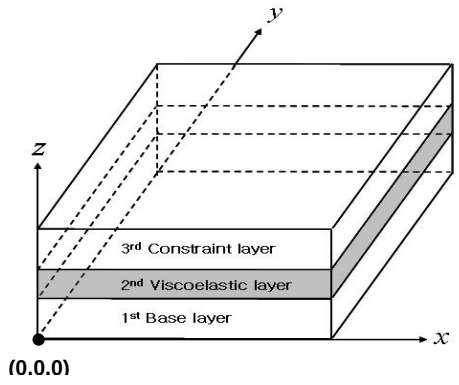


Fig. 1 Geometry of a rectangular sandwich plate with viscoelastic layer

해서 다음과 같은 가정을 통해 샌드위치평판의 운동에 대해 단순화 하였다.

(a) 샌드위치평판의 기반층과 구속층은 탄성이고, 등방성(isotropic) 재질의 판이며 Kirchhoff 평판이론을 적용한다.
(b) 가운데 삽입되는 점탄성층에서는 굽힘방향 전단변형만이 존재한다.
(c) 점탄성층과 기반층, 구속층은 층간의 미끄러짐 없이 함께 거동하며 따라서 모든 층에서의 굽힘방향 변위는 같다.

위 가정을 통해 샌드위치평판은 Fig. 2 와 같이 거동하게 된다.

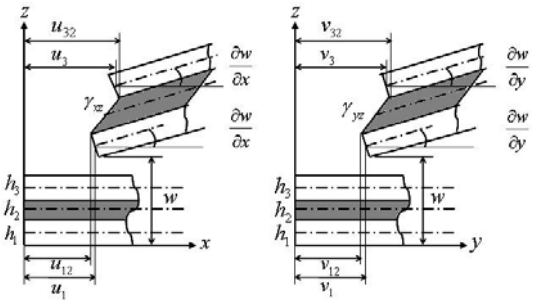


Fig. 2 Displacements of associated each layer

이 샌드위치평판의 탄성층의 변형률과 구성방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{i} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (i=1,3)\\
\varepsilon_{yy}^{i} &= \frac{\partial v_i}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (i=1,3)\\
\varepsilon_{xy}^{i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (i=1,3)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{i} &= \frac{E^i}{(1-\nu^{i2})}(\varepsilon_{xx}^{i} + \nu^i \varepsilon_{yy}^{i}) \qquad (i=1,3)\\
\sigma_{xx}^{i} &= \frac{E^i}{(1-\nu^{i2})}(\varepsilon_{xx}^{i} + \nu^i \varepsilon_{yy}^{i}) \qquad (i=1,3)\\
\sigma_{xy}^{i} &= 2G^i \varepsilon_{xy}^{i} \qquad (i=1,3)
\end{aligned} \tag{2}$$

여기서, 위 첨자 ^{i} 는 층 수를 의미하며, i=1 이면 첫번째층인 기반층을, i=3 이면 3 번째 층인 구속층을 나타낸다. 다음으로, 가운데 층인 점탄성층의 변형률과 구성방정식은 아래의 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\gamma_{xz} &= \frac{u_{32}-u_{12}}{h_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u_3-u_2}{h_2} + \frac{d}{h_2}\frac{\partial w}{\partial x}\\
\gamma_{yz} &= \frac{v_{32}-v_{12}}{h_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{v_3-v_2}{h_2} + \frac{d}{h_2}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\tau_{13} = G_2\gamma_{13} \qquad \tau_{23} = G_2\gamma_{23} \tag{4}$$

여기서, $d = h_2 + (h_1+h_3)/2$ 와 같다.

한편, 샌드위치평판에 대해 5 개의 변위 (u_1, v_1, u_3, v_3, w)를 고려하여 운동 에너지(T)와 위치 에너지(U)를 나타내면 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned}
T = {} & \frac{1}{2}\int_A (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_3 + \rho_3 h_3)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dA\\
& + \frac{1}{2}\int_A \left\{\sum_{i=1,3}\rho_i h_i\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2\right]\right\} dA
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
U = {} & \frac{1}{2}\int_V \left\{\sum_{i=1,3}\tau_{11}^i\varepsilon_{11}^i + \tau_{22}^i\varepsilon_{22}^i + 2\tau_{12}^i\varepsilon_{12}^i\right\} dV\\
& + \frac{1}{2}\int_V \{G_2\gamma_{13} + G_2\gamma_{23}\} dV
\end{aligned} \tag{6}$$

또한, 경계에서의 외부 힘에 의한 가상일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{1}{2}\int_A \left\{\sum_{i=1,3}\left(F_x^i u^i + F_y^i v^i\right) + Fw\right\} dA \tag{7}$$

여기서 F_x^i, F_y^i 는 i 번째 층 x, y 방향, F 는 z 방향 외부 힘을 나타낸다. 이제 앞에서 정리한, 각 층에서의 변형률과 구성방정식에 관한 (1-4)식을 (5-7)식에 대입한 후 아래 (8)식과 같은 Hamilton 의 원리를 통해 변분을 취하면 샌드위치평판의 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\delta\left\{\int_{t_1}^{t_2}(T+V-U)dt\right\}=0 \tag{8}$$

위와 같은 과정에 의해 유도된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho_1 h_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{E_1h_1}{1-\nu_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{E_1h_1}{(1+\nu_1)}\left(\frac{\nu_1}{1-\nu_1}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{E_1h_1}{2(1+\nu_1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{G_2}{h_2}\left(u_3-u_1+d\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{9}$$

$$\rho_1 h_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=\frac{E_1h_1}{1-\nu_1^{\,2}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\frac{E_1h_1}{(1+\nu_1)}\left(\frac{\nu_1}{1-\nu_1}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{E_1h_1}{2(1+\nu_1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{G_2}{h_2}\left(v_3-v_1+d\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{10}$$

$$\rho_3 h_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=\frac{E_3h_3}{1-\nu_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{E_3h_3}{(1+\nu_3)}\left(\frac{\nu_3}{1-\nu_3}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial y}+\frac{E_3h_3}{2(1+\nu_3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}-\frac{G_2}{h_2}\left(u_3-u_1+d\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{11}$$

$$\rho_3 h_3\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=\frac{E_3h_3}{1-\nu_3^{\,2}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\frac{E_3h_3}{(1+\nu_3)}\left(\frac{\nu_3}{1-\nu_3}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}+\frac{E_3h_3}{2(1+\nu_3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}-\frac{G_2}{h_2}\left(v_3-v_1+d\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{12}$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\sum_{i=1,3}D_i\nabla^4 w+\frac{G_2d^2}{h}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{G_2d}{h}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \tag{13}$$

여기서, $\rho h=\rho_1h_1+\rho_2h_2+\rho_3h_3$ 이다. 위와 같이 유도된 운동방정식은 샌드위치평판의 x, y 방향 경계에서 다음과 같은 경계조건을 가진다.

(a) $at\ x=0\ or\ x=L_x$

$$\frac{E_ih_i}{1-\nu_i^{\,2}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\nu_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)=0\ or\ u_i=0\quad (i=1,3) \tag{14}$$

$$\frac{E_ih_i}{2(1+\nu_i)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)=0\ or\ v_i=0\quad (i=1,3) \tag{15}$$

$$\sum_{i=1,3}-D_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0\ or\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{16}$$

$$\sum_{i=1,3}\left[-D_i\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y^2}\right)\right]or\ w=0 \tag{17}$$
$$+\frac{G_2d}{h_2}\left(u_3-u_1+d\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

(b) $at\ y=0\ or\ y=L_y$

$$\frac{E_ih_i}{1-\nu_i^{\,2}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}+\nu_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)=0\ or\ v_i=0\quad (i=1,3) \tag{18}$$

$$\frac{E_ih_i}{2(1+\nu_i)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)=0\ or\ u_i=0\quad (i=1,3) \tag{19}$$

$$\sum_{i=1,3}-D_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0\ or\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{20}$$

$$\sum_{i=1,3}\left[-D_i\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2\partial y}\right)\right]\ or\ w=0 \tag{21}$$
$$+\frac{G_2d}{h_2}\left(v_3-v_1+d\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0$$

3. 샌드위치평판에 대한 스펙트럴유한요소해석

샌드위치평판의 스펙트럴유한요소해석의 경우 Levy-type 경계조건이 전제된다. 따라서 본 연구에서는 y 방향으로 마주보는 두 변이 단순지지되어 있고, x 방향으로 임의의 경계조건을 갖는 샌드위치평판 모델에대해 스펙트럴유한요소를 유도하였다.

스펙트럴유한요소법의 첫 번째 단계로서 샌드위치평판의 조화운동을 가정, 엄밀해와 같은 주파수 종속 지수함수를 기저함수로 사용하여 다음과 같이 5 개의 변위해를 구성한다.

$$u_1(x,y,t)=U_1\exp(k_xx)\sum_{n=1}\sin(\frac{n\pi}{L_y}y)e^{i\omega t} \tag{22}$$

$$v_1(x,y,t)=V_1\exp(k_xx)\sum_{n=1}\cos(\frac{n\pi}{L_y}y)e^{i\omega t} \tag{23}$$

$$u_3(x,y,t)=U_3\exp(k_xx)\sum_{n=1}\sin(\frac{n\pi}{L_y}y)e^{i\omega t} \tag{24}$$

$$v_3(x,y,t) = V_3 \exp(k_x x)\sum_{n=1} \cos(\frac{n\pi}{L_y} y)e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$w(x,y,t) = W \exp(k_x x)\sum_{n=1} \sin(\frac{n\pi}{L_y} y)e^{i\omega t} \quad (26)$$

다음으로, 위와 같은 변위를 바탕으로 분산관계식을 유도하여 주파수 별로 하나의 요소안에서 발생하는 x 방향 파수(wave-number) k_x 를 계산해야 한다. 이를 위해 앞서 가정한 변위해 (22-26)식을 샌드위치평판의 5 개의 운동방정식 (9-13)에 대입하여 다음과 같이 하나의 행렬식으로 정리 한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 & \Phi_{15} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ \Phi_{31} & 0 & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ 0 & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서, 좌변 행렬의 성분 Φ_{ij}는 부록 (A-1)에 나타내었다. 위 (27)식을 살펴볼 때, 변위해의 계수들이 부정해를 갖지 않기 위해서는 좌변의 행렬 $[\Phi]$의 행렬식(determinant)이 0 이 되어야 한다. 따라서, 이 조건으로부터 다음과 같이 12 차 짝수 대수 방정식의 형태로서 분산관계식(dispersion relation)이 유도된다.

$$C_{12}k_x^{12} + C_{10}k_x^{10} + C_8 k_x^8 + C_6 k_x^6 + C_4 k_x^4 + C_2 k_x^2 + C_0 = 0 \quad (28)$$

여기서, 위 (28)식의 12 차 분산관계식은 수학적으로 일반해가 존재하지 않는다. 따라서, 본 연구에서는 MATLAB Software 의 roots 함수를 사용하여 수치적 방법을 통해 (28)식의 12개의 해를 구하였다. 또한, 본 연구에서는 점탄성층의 감쇠효과를 나타내는 점탄성재료의 전단계수 G_2를 McTavish and Hughes(1993)가 제안한 GHM 모델을 통하여 다음의 식과 같이 주파수영역에서 복소계수로 나타내어 계산에 반영하였다.

$$G^*(\omega) = G^\infty \left[1 + \sum_k^N \hat{\alpha}_k \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k{}^2} \right] \quad (29)$$

여기서 $s(=i\omega)$는 Laplace 영역에서의 독립변수를 의미하고, G^∞는 평형상태에서의 $G(t)$ 값을 나타낸다. 또한, $\{\hat{\alpha}_k, \hat{\omega}_k, \hat{\zeta}_k\}$는 GHM 파라미터로서 실험을 통한 curve-fitting 으로서 얻어지는 값이다. 다음으로, (28)식에서 구한 x 방향 12 개의 파수를 변위해 (22-26)식에 대입하여 주파수 종속인 기저함수를 완성한다. 한편, 스펙트럴유한요소법을 통해 올바른 해석을 수행하기 위해서는, 한 요소안에서 각 주파수에서 발생하는 12 개의 파수에 대응하여 12 개의 조건 식이 구성되어야 한다. 따라서 경계조건식에서 나타나는 기울기($\theta = \partial w / \partial x$)가 또 하나의 변위 자유도로 고려되며 이로 인해 주파수 영역에서 y 방향 임의의 하나의 모드에 대해 하나의 절점에서의 6 개의 변위 자유도는 다음의 식과 같이 구성된다.

$$u_1(x) = U_{1,1}e^{k_1 x} + U_{1,2}e^{k_2 x} + ... + U_{1,11}e^{k_{11} x} + U_{1,12}e^{k_{12} x} \quad (30)$$

$$v_1(x) = V_{1,1}e^{k_1 x} + V_{1,2}e^{k_2 x} + ... + V_{1,11}e^{k_{11} x} + V_{1,12}e^{k_{12} x} \quad (31)$$

$$u_3(x) = U_{3,1}e^{k_1 x} + U_{3,2}e^{k_2 x} + ... + U_{3,11}e^{k_{11} x} + U_{3,12}e^{k_{12} x} \quad (32)$$

$$v_3(x) = V_{3,1}e^{k_1 x} + V_{3,2}e^{k_2 x} + ... + V_{3,11}e^{k_{11} x} + V_{3,12}e^{k_{12} x} \quad (33)$$

$$w(x) = W_{,1}e^{k_1 x} + W_{,2}e^{k_2 x} + ... + W_{,11}e^{k_{11} x} + W_{,12}e^{k_{12} x} \quad (34)$$

$$\theta(x) = k_1 W_{,1}e^{k_1 x} + k_1 W_{,2}e^{k_2 x} + ... + k_{11} W_{11}e^{k_{11} x} + k_{12} W_{,12}e^{k_{12} x} \quad (35)$$

위 (30-35)식의 변위해를 완성하기 위해서는 각 변위해의 계수들을 구해야한다. 스펙트럴유한요소법을 통해 이 계수들을 계산하기 위해서는 스펙트럴요소행렬을 구성해야 한다. 이를 위해 먼저, 6 개 변위 계수들을 하나의 변위 계수를 통해 나타내어야 한다. 본 연구에서는 기반층과 구속층의 x 방향, y 방향 변위 계수들을 다음과 같이 z 방향 변위계수에 관하여 나타내었다.

$$U_1 = \Psi_1 W \quad V_1 = \Psi_2 W \quad U_3 = \Psi_3 W \quad V_3 = \Psi_4 W \quad (36)$$

여기서 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ 는 샌드위치평판의 5 개

의 운동방정식 (9-13)식 중 임의의 4 개의 식을 통해 변위계수들의 관계를 정리하여 구할 수 있으며 그 값들은 부록 (A-2)에 나타내었다. 따라서 $x=0$, $x=l$ 의 절점을 갖는 샌드위치평판 요소에 대해 (30-35)식과 (36)식을 통해 주파수영역에서 6 개의 변위 자유도를 다음과 같이 하나의 행렬식의 형태로서 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_1 & \Psi_1 & \cdots & \Psi_1 & \Psi_1 & \Psi_1 \\ \Psi_2 & \Psi_2 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_2 & \Psi_2 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_3 & \Psi_3 & \cdots & \Psi_3 & \Psi_3 & \Psi_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_4 e^{k_1 l} & \Psi_4 e^{k_2 l} & \Psi_4 e^{k_3 l} & \cdots & \Psi_4 e^{k_{10} l} & \Psi_4 e^{k_{11} l} & \Psi_4 e^{k_{12} l} \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} & e^{k_3 l} & \cdots & e^{k_{10} l} & e^{k_{11} l} & e^{k_{12} l} \\ k_1 e^{k_1 l} & k_2 e^{k_2 l} & k_3 e^{k_3 l} & \cdots & k_{10} e^{k_{10} l} & k_{11} e^{k_{11} l} & k_{12} e^{k_{12} l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{,1} \\ W_{,2} \\ W_{,3} \\ \vdots \\ W_{,10} \\ W_{,11} \\ W_{,12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ v_3^2 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

$$[H(\omega)]_e [W_{,m}]_e = \left[d(\omega) \right]_e \quad (m=1,2,..,12) \tag{37}$$

여기서, 변위 자유도의 위첨자는 절점번호를 나타내고 u, v 의 아래첨자는 층수를 의미한다. 다음으로, Hamilton 의 원리로부터 유도한 샌드위치평판의 경계조건식 (14-17)식에 (30-35)식을 대입하고, (36)식의 관계를 고려하면, 샌드위치평판의 요소의 힘 경계조건식 또한 다음과 같이 하나의 행렬식의 형태로서 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & \cdots & Q_{1,10} & Q_{1,11} & Q_{1,12} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \cdots & Q_{2,10} & Q_{2,11} & Q_{2,12} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & \cdots & Q_{3,10} & Q_{3,11} & Q_{3,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{10,1} & Q_{10,2} & Q_{10,3} & \cdots & Q_{10,10} & Q_{10,11} & Q_{10,12} \\ Q_{11,1} & Q_{11,2} & Q_{11,3} & \cdots & Q_{11,10} & Q_{11,11} & Q_{11,12} \\ Q_{12,1} & Q_{12,2} & Q_{12,3} & \cdots & Q_{12,10} & Q_{12,11} & Q_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{,1} \\ W_{,2} \\ W_{,3} \\ \vdots \\ W_{,10} \\ W_{,11} \\ W_{,12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x}^1 \\ N_{1xy}^1 \\ N_{3x}^1 \\ \vdots \\ N_{3xy}^3 \\ V^2 \\ M^2 \end{bmatrix}$$

$$[Q(\omega)]_e [W_{,m}]_e = \left[F(\omega) \right]_e \quad (m=1,2,..,12) \tag{38}$$

여기서, 힘 경계조건 요소 행렬성분 $Q_{i,j}$는 부록 (A-3)에 나타내었다. 위에서 정리한 (37)식과 (38)식을 다음의 식과 같이 결합하여 스펙트럴유한요소행렬 $[S(\omega)]_e$ 을 계산한다.

$$[F]_e = [Q(\omega)]_e [H(\omega)]_e^{-1} [d]_e = [S(\omega)]_e [d]_e \tag{39}$$

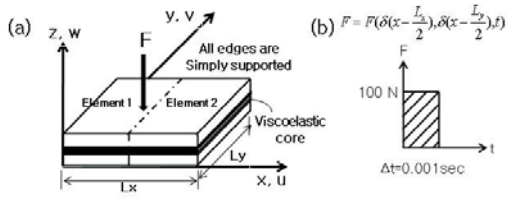
다음으로 기존의 유한요소법의 요소결합 방식과 같은 과정으로 스펙트럴요소행렬에대해 요소결합하여 전체 스펙트럴행렬을 구성한다. 그리고 경계조건을 적용한 후, 아래의 식과 같은 과정을 통해 각 y 방향 모드와 주파수에 대응하는 변위들을 구할 수 있으며 y 방향 각 모드에 대한 변위 값을 모두 합해 주면 각 주파수에 해당하는 변위 값을 구할 수 있다.

$$[F] = [\tilde{S}(\omega)][d] \Rightarrow [d] = [\tilde{S}(\omega)]^{-1} [F] \tag{40}$$

여기서 $[\tilde{S}(\omega)]$는 경계조건이 적용된 전체 스펙트럴행렬이다. 그리고, 마지막으로 (40)식으로부터 계산한 주파수영역에서의 변위 $[d]$ 에 대해 푸리에역변환을 수행하여 시간영역에서 나타내면, 샌드위치평판의 동적응답을 구할 수 있으며 이를 통해 점탄성층의 감쇠효과를 확인 할 수 있다.

4. 해석 결과 및 고찰

본 연구에서 스펙트럴유한요소법을 사용하여 해석을 수행한 샌드위치평판 모델의 제원 및 가진조건은 다음의 그림과 같다.



$L_x = L_y = 1.0\ m$

$h_1 = 10mm$ $\quad h_2 = 1\ mm$ $\quad h_3 = 2\,mm$

$E_1 = E_3 = 1.95\times10^{11}\ N/m^2$ $\quad \nu_1 = \nu_3 = 0.28$

$\rho_1 = \rho_3 = 2700\ kg/m^3$ $\quad \rho_2 = 1000\ kg/m^3$

$\eta_1 = \eta_3 = 0.01$ $\quad G^{\infty} = 1.0\times10^5\ N/m^2$

$\hat{\alpha}_k = \{1.59\ \ 6.6\ \ 32.0\}$ $\quad \hat{\zeta}_k = \{348.8\ \ 56.4\ \ 1.0\}$

$\hat{\omega}_k = \{1.0\times10^4\ \ 2.0\times10^4\ \ 0.5\times10^4\}$

Fig. 3 (a) Specification of sandwich plate model; (b) Specification of exciting force

해석대상 샌드위치평판은 위의 Fig. 3 (a)와 같이 네변이 모두 단순지지된 경계조건을 가지며 탄성층의 경우 철의 물성치를 사용하였다. 또한, 점탄성층의 경우 0~500 Hz 주파수대역에서 GHM 파라미터들이 공개되어있는 점탄성재료(McTavish and Hughes 1993)를 사용하였다. 가진조건의 경우 Fig. 3 (b)와 같이 충격형태의 힘이 샌드위치평판 중앙에 가진되었으며 스펙트럴 유한요소법의 특성상 가진이 이루어지는 중앙에서 한번의 요소분할이 이루어져 Fig. 3 (a)와 같이 두 개의 요소로서 스펙트럴유한요소해석이 수행되었다.

위와 같은 해석의 결과로서 먼저, 가진힘에 대해 푸리에변환을 수행하여 얻은 주파수 대역의 힘 성분 $F(\omega)$과 이에 대응하는 변위와의 응답을 주파수응답함수(FRF)로서 나타내었다. 해석 샌드위치평판 모델의 경우, z 방향으로 가진이 이루어졌으므로 이 주파수 힘 성분에 대한 직접적인 주파수응답을 살펴보기 위해 굽힘방향 변위(w)와의 비를 다음과 같이 나타내었다.

$$FRF(x,\omega) = \log_{10}\left(\frac{w(x,\omega)}{F(\omega)}\right) \tag{41}$$

Fig. 4 에는 스펙트럴유한요소법을 사용하여 해석 대상 샌드위치평판 모델의 가진점에서 계산된 주파수응답함수를 Yeh and Chen(2003)가 제안한 유한요소법을 통해 계산된 결과들과 함께 조시하였다.

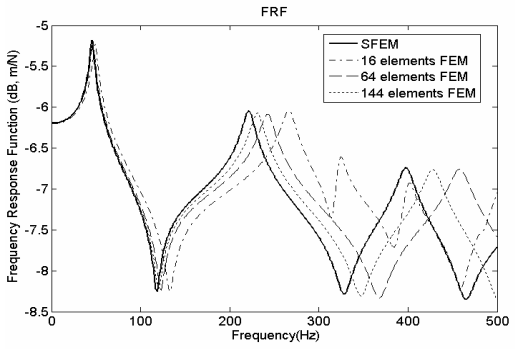


Fig. 4 Comparison of the frequency response functions obtained by SFEM and FEM

Fig. 4 를 살펴 보면, 먼저 유한요소법에 의한 결과의 경우 요소수가 증가할수록 스펙트럴유한요소해석결과로 수렴해가는 것을 알 수 있다. 또한, 상대적으로 많은 요소로도 고주파영역에서 부정확한 결과를 보이는 유한요소해석결과와는 달리, 스펙트럴유한요소해석은 최소의 요소만으로 빠른 해석시간 안에 신뢰도 높은 결과를 주는 것을 확인할 수 있다.

다음으로, 가진점에서의 동적응답을 계산하였다. 이 동적응답은 주파수 변위성분들에 대해 역푸리에변환을 수행하면 구할 수 있으며 굽힘변위(w)의 감쇠에 대해 살펴보았다. 또한, 점탄성층의 감쇠효과를 살펴보기 위해 다음의 그림과 같이 해석 샌드위치평판과 동일한 두께를 가지며 기반층과 같은 물성치를 가지는 일반 탄성판의 동적응답해석 결과와 함께 나타내었다.

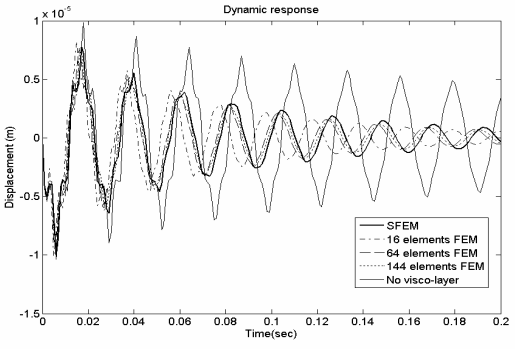


Fig. 5 Dynamic responses of the sandwich plate with a visco-elastic layer

위의 Fig. 5 를 통해 먼저, 점탄성층이 삽입된 샌드위치평판의 감쇠가 일반 탄성평판의 경우보다 빠르게 진행되는 것을 볼 수 있으며 이로부터 점탄성층의 감쇠효과를 확인 할 수 있다. 또한, 위의 주파수응답함수해석결과에서 논의한 바와 같이 유한요소법의 결과가 요소 수가 증가함에 따라 스펙트럴유한요소법의 결과로 수렴해 가는 것을 볼 수 있다.

마지막으로, 점탄성층의 두께에 따른 감쇠효과

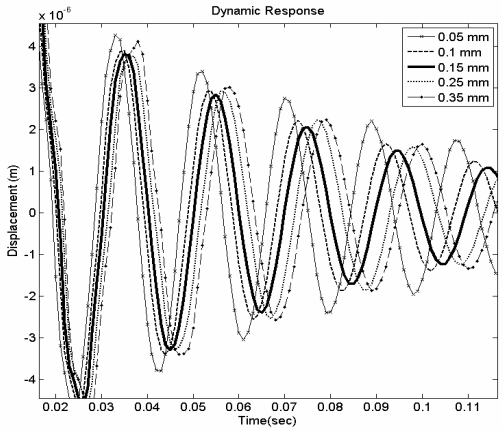


Fig. 6 Comparison of dynamic responses of the sandwich plate with various visco-elastic layer thickness

를 살펴 보기 위해 해석 샌드위치평판의 점탄성층의 두께를 변화시켜가며 동적응답을 살펴 보았는데, 그 결과는 Fig. 6 과 같다.

Fig. 6 을 살펴보면, 샌드위치평판의 점탄성층의 경우 두께가 점차 두꺼워짐에 따라 감쇠 효과가 증가하다 특정한 두께에서 최대 효과를 가지게 되며 이 보다 더 두꺼운 두께에서는 감쇠 효과가 감소 하는 것을 확인 할 수 있다. 이는 곧, 특정한 기반층과 구속층에 삽입되는 점탄성층의 경우 감쇠효과가 최대가 되는 최적의 두께를 가진다는 것이다. 이는 Yu and Huang(2001)의 원형 샌드위치평판의 연구에서도 제시된 바 있다. 그러나 본 연구에서는 점탄성재료의 선형점탄성특성을 가정하였기 때문에 비선형적인 특성이 나타날 수 있는 실제 점탄성재료의 현상과 다를 수 있다. 따라서, 이러한 해석 결과의 신뢰성을 검증하기 위해서는 실험적인 방법으로의 연구가 이루어져야 할 것이다.

5. 결론

본 연구에서는 스펙트럴유한요소법을 사용하여 두 탄성층사이에 점탄성층이 삽입된 Levy-type 경계조건을 갖는 직사각형 샌드위치평판의 진동해석을 수행해보았다. 또한, 스펙트럴 유한요소해석에 의한 결과들을 유한요소해석 결과와 비교, 고찰해 봄으로서 점탄성층이 삽입된 Levy-type 경계조건을 갖는 직사각형 샌드위치 평판의 진동해석시 스펙트럴유한요소해석이 가지는 다음과 같은 장점들을 확인 할 수 있었다. (1) 스펙트럴유한요소법은 주파수종속인 형상함수로부터 변위해가 구성되어 최소의 요소수만으로 엄밀해와 유사한 정밀도를 가지는 결과를 제공해 준다. (2) 또한, 스펙트럴유한요소법은 주파수영역에서 직접적인 해석이 이루어지기 때문에 주파수 영역에서 점탄성층의 감쇠특성을 나타내는GHM 모델과 결합하여 점탄성층의 특성을 효과적으로 반영할 수 있었다. (3) 마지막으로, 스펙트럴 유한요소법을 통해 빠르고 정확한 해석을 수행할 수 있으므로 특정 샌드위치평판에 대해 최대의 감쇠효과를 주는 점탄성층의 두께를 찾는 최적화 설계에 대한 가능성을 제공하였다. 따라서 본 연구로부터 스펙트럴유한요소법은 점탄성층이 삽입된 Levy-type 경계조건을 갖는 직사각형 샌드위치 평판의 동적해석에 있어서 기존에 이루어졌던 일반적인 유한요소해석의 단점을 극복한 효율적인 해석방법임을 확인 할 수 있었다.

참 고 문 헌

- Doyle, J.F., 1997, Wave Propagation in Structures, Second Edition, Springer, New York.
- McTavish, D.J. and Hughes, P.C., 1993, “Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures,” Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 103-110.
- Rao, Y.V.K.S and Nakra, B.C., 1974, “Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 34, No. 3, pp. 309-326.

- Wang, G. and Wereley, N.M., 2003, " Analysis of Sandwich Plates with Viscoelastic Damping Using Two-Dimensional Plate Modes," AIAA JOURNAL, Vol. 41, pp. 924-932.
- Yeh, J.Y. and Chen, L.W., 2003, " Vibration of a sandwich plate with a constrained layer and electrorhelogical fluid core," Composite Structures, Vol. 65, pp. 251-258.
- Yu, S.C. and Huang, S.C., 2001, " Vibration of a three-layered viscoelastic sandwich circular plate," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, pp. 2215-2236.

후 기

이 연구는 ASERC(첨단조선공학연구센터)와, RIMSE(해양시스템공학연구소)의 지원으로 수행되었습니다.

< 이 성 주 > < 송 지 훈> < 홍 석 윤>

부록

(A-1)

$$\Phi_{11}=2G_2\left(-1+\nu_1^2\right)+h_1\left(E_1\left(2k_x^2+k_n^2\left(-1+\nu_1\right)\right)+2\left(-1+\nu_1^2\right)\omega^2\rho_1\right)$$
$$\Phi_{12}=-E_1h_1k_xk_n(1+\nu_1)$$
$$\Phi_{13}=-2G_2(-1+\nu_1^2)$$
$$\Phi_{15}=-dG_2k_x(-1+\nu_1^2)$$
$$\Phi_{21}=-E_1h_1k_xk_n(1+\nu_1)$$
$$\Phi_{22}=-2G_2(-1+\nu_1^2)+h_1\left(E_1\left(2k_n^2+k_x^2\left(-1+\nu_1\right)\right)-2(-1+\nu_1^2)\omega^2\rho_1\right)$$
$$\Phi_{24}=2G_2(-1+\nu_1^2)$$
$$\Phi_{25}=dG_2k_n(-1+\nu_1^2)$$
$$\Phi_{31}=-2G_2(-1+\nu_3^2)$$
$$\Phi_{33}=2G_2(-1+\nu_3^2)+h_3\left(E_3\left(2k_x^2+k_n^2\left(-1+\nu_3\right)\right)+2\left(-1+\nu_3^2\right)\omega^2\rho_3\right)$$
$$\Phi_{34}=-E_3h_3k_xk_n\left(1+\nu_3\right)$$
$$\Phi_{35}=dG_2k_x\left(-1+\nu_3^2\right)$$
$$\Phi_{42}=2G_2(-1+\nu_3^2)$$
$$\Phi_{43}=-E_3h_3k_xk_n(1+\nu_3)$$
$$\Phi_{44}=-2G_2(-1+\nu_3^2)+h_3\left(E_3\left(2k_n^2+k_x^2\left(-1+\nu_3\right)\right)-2\left(-1+\nu_3^2\right)\omega^2\rho_3\right)$$
$$\Phi_{45}=-dG_2k_n(-1+\nu_3^2)$$
$$\Phi_{51}=2dG_2h_2k_x$$
$$\Phi_{52}=-2dG_2h_2k_nk_x$$
$$\Phi_{53}=-2dG_2h_2$$
$$\Phi_{54}=2dG_2h_2k_n$$
$$\Phi_{55}=d^2G_2\left(k_n^2-k_x^2\right)+4h_2\left(-\left(D_1+D_3\right)\left(k_n^2-k_x^2\right)^2+\omega^2\left(h_1\rho_1+\rho_2+h_3\rho_3\right)\right)$$

(A-2)

$$\Psi_1=\frac{\begin{pmatrix}\Phi_{15}\left(\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(-\Phi_{25}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{24}\Phi_{35}\Phi_{43}+\Phi_{25}\Phi_{33}\Phi_{44}-\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{45}\right)\\+\Phi_{13}\left(\Phi_{25}\Phi_{34}\Phi_{42}-\Phi_{24}\Phi_{34}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{35}\Phi_{44}-\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{45}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Phi_{13}\left(-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{42}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{31}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{43}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{21}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\end{pmatrix}}$$

$$\Psi_2=\frac{\begin{pmatrix}\Phi_{15}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{43}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{21}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{25}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{24}\Phi_{35}\Phi_{43}-\Phi_{25}\Phi_{33}\Phi_{44}+\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{45}\right)\\+\Phi_{13}\left(\Phi_{25}\Phi_{31}\Phi_{44}-\Phi_{21}\Phi_{35}\Phi_{44}-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{45}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{45}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Phi_{13}\left(-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{42}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{31}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{43}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{21}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\end{pmatrix}}$$

$$\Psi_3=\frac{\begin{pmatrix}\Phi_{15}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{42}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{42}-\Phi_{21}\Phi_{31}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(\Phi_{25}\Phi_{31}\Phi_{44}-\Phi_{21}\Phi_{35}\Phi_{44}-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{45}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{45}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{25}\Phi_{34}\Phi_{42}-\Phi_{24}\Phi_{35}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{35}\Phi_{44}-\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{45}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Phi_{13}\left(-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{42}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{31}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{43}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{21}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\end{pmatrix}}$$

$$\Psi_4=\frac{\begin{pmatrix}\Phi_{33}\left(\Phi_{15}\Phi_{21}\Phi_{42}-\Phi_{11}\Phi_{25}\Phi_{42}-\Phi_{12}\Phi_{21}\Phi_{45}+\Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{45}\right)\\+\Phi_{43}\left(\Phi_{15}\Phi_{22}\Phi_{31}-\Phi_{12}\Phi_{25}\Phi_{31}+\Phi_{12}\Phi_{21}\Phi_{35}-\Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{35}\right)\\+\Phi_{13}\left(\Phi_{25}\Phi_{31}\Phi_{42}-\Phi_{21}\Phi_{35}\Phi_{42}-\Phi_{22}\Phi_{31}\Phi_{45}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Phi_{13}\left(-\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{42}+\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{31}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{12}\left(\Phi_{24}\Phi_{31}\Phi_{43}-\Phi_{21}\Phi_{34}\Phi_{43}+\Phi_{21}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\\+\Phi_{11}\left(\Phi_{24}\Phi_{33}\Phi_{42}+\Phi_{22}\Phi_{34}\Phi_{43}-\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\right)\end{pmatrix}}$$

(A-3)

$$Q_{1,m}=\frac{E_1h_1\left(-k_{x,m}\Psi_{1,m}+k_n\nu_1\Psi_{2,m}\right)\sin\left(k_ny\right)}{\left(-1+\nu_1^2\right)}$$

$$Q_{2,m}=\frac{E_1h_1\left(k_n\Psi_{1,m}+k_{x,m}\Psi_{2,m}\right)\cos\left(k_ny\right)}{2\left(1+\nu_1\right)}$$

$$Q_{3,m}=\frac{E_3h_3\left(-k_{x,m}\Psi_{3,m}+k_n\nu_3\Psi_{4,m}\right)\sin\left(k_ny\right)}{\left(-1+\nu_3^2\right)}$$

$$Q_{4,m}=\frac{E_3h_3\left(k_n\Psi_{3,m}+k_{x,m}\Psi_{4,m}\right)\cos\left(k_ny\right)}{2\left(1+\nu_3\right)}$$

$$Q_{5,m}=\left(D_1\left(k_{x,m}^2-\nu_1k_n^2\right)+D_3\left(k_{x,m}^2-\nu_3k_n^2\right)\right)\sin\left(k_ny\right)$$

$$Q_{6,m}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2dG_2\left(-\Psi_{1,m}+\Psi_{3,m}\right)+d^2G_2k_{x,m}\\+4k_{x,m}\left(D_1\left(k_{x,m}^2+k_n^2\left(-2+\nu_1\right)\right)+D_3\left(k_{x,m}^2+k_n^2\left(-2+\nu_3\right)\right)\right)\end{pmatrix}\sin\left(k_ny\right)$$

$$Q_{7,m}=\frac{E_1h_1\left(-k_{x,m}\Psi_{1,m}+k_n\nu_1\Psi_{2,m}\right)\sin\left(k_ny\right)}{\left(-1+\nu_1^2\right)}e^{k_{x,m}l}$$

$$Q_{8,m}=\frac{E_1h_1\left(k_n\Psi_{1,m}+k_{x,m}\Psi_{2,m}\right)\cos\left(k_ny\right)}{2\left(1+\nu_1\right)}e^{k_{x,m}l}$$

$$Q_{9,m}=\frac{E_3h_3\left(-k_{x,m}\Psi_{3,m}+k_n\nu_3\Psi_{4,m}\right)\sin\left(k_ny\right)}{\left(-1+\nu_3^2\right)}e^{k_{x,m}l}$$

$$Q_{10,m}=\frac{E_3h_3\left(k_n\Psi_{3,m}+k_{x,m}\Psi_{4,m}\right)\cos\left(k_ny\right)}{2\left(1+\nu_3\right)}e^{k_{x,m}l}$$

$$Q_{11,m}=\left(D_1\left(k_{x,m}^2-\nu_1k_n^2\right)+D_3\left(k_{x,m}^2-\nu_3k_n^2\right)\right)\sin\left(k_ny\right)e^{k_{x,m}l}$$

$$Q_{12,m}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2dG_2\left(-\Psi_{1,m}+\Psi_{3,m}\right)+d^2G_2k_{x,m}\\+4k_{x,m}\left(D_1\left(k_{x,m}^2+k_n^2\left(-2+\nu_1\right)\right)+D_3\left(k_{x,m}^2+k_n^2\left(-2+\nu_3\right)\right)\right)\end{pmatrix}\sin\left(k_ny\right)e^{k_{x,m}l}$$