한국통계학회논문집
2009, 16권, 2호, 249–264

배리어 옵션이 내재된 지수연동형 보험상품의 가격결정

신승희[a], 이항석[1,b]

[a]국민연금연구원, [b]성균관대학교 보험계리학과/수학과

요 약

지수연동형 보험상품(EIA: Equity-indexed annuities)은 주식시장의 수익률과 연계하여 보험상품의 수익률이 결정되며 주식시장의 수익률이 낮은 경우에도 최소보장 수익률이 제공되는 상품이다. EIA의 수익률은 주가 수익률에 일정 비율을 곱하고 이 값과 최소보장수익률과 비교하여 높은 값을 수익률로 정의한다. 여기서 주가수익률에 곱하는 일정비율을 참여율(Participation rate)이라고 부른다. 본 논문에서는 수익률을 결정하는 주가지수와 일정수준을 넘는 여부를 결정하는 주가지수를 다른 지수로 사용하는 Outside Barrier가 내재된 보험 상품을 제안하고자 한다. 특히 Outside Barrier 조건의 결정을 계약기간 전체가 아닌 계약기간의 일부분으로 선정한 것이 특징이다. 이러한 수익률 구조를 반영하는 가격 공식을 기댓값 계산을 통하여 유도하고 수치해석 기법을 이용하여 최소보장이율, Rebate, barrier 수준, 주가 변동성, 상관계수 및 관측기간 등의 변수가 참여율의 결정에 어떤 영향을 미치는지를 알아보고자 한다.

주요용어: 지수연동형 보험상품, 최소보장수익률, 참여율, 배리어 옵션.

1. 서론

지수연동형 보험상품(EIA: Equity-indexed annuities)은 주식시장의 수익률과 연계하여 보험상품의 수익률이 결정되며 주식시장의 수익률이 낮은 경우에도 최소보장 수익률이 제공되는 상품이다. 즉 주가지수 수익률의 일정 부분과 최소보장수익률(minimum guaranteed return) 중 큰 값이 EIA의 수익률이 된다. 주식시장에 바로 투자하거나 펀드 가입 등에 투자하는 경우에 투자 리스크가 크고 채권형 펀드 또는 정기예금 같은 상품에 투자할 경우 수익률이 낮은 단점을 보완하고자 EIA가 개발 되었다. EIA의 수익률은 주가 수익률에 일정 비율을 곱하고 이 값과 최소보장수익률과 비교하여 높은 값을 수익률로 정의한다. 여기서 주가수익률에 곱하는 일정비율을 참여율(Participation rate)라고 부른다.

EIA는 최소 보장 수익률이 만기에 투자자에게 주어지기 때문에 다른 금융 상품보다 복잡한 구조를 가지고 있다. 마치 파생상품의 하나인 옵션이 내재되어 있는 구조를 가지고 있기에 옵션가격 결정 이론이 상품의 개발과정에 필요하다. 이러한 상품의 가격결정에 관한 연구는 다음과 같다. Tiong (2000)는 블랙숄즈(Black-Scholes) 가정하에서 다양한 상품의 가격 공식을 유도하였으며 Lee (2003)는 Tiong (2000)의 경우보다 일반화된 상품의 가격 공식을 유도하였다. Jaimungal (2004)는 variance gamma 모형에서 접근을 시도하였고 Cho와 Lee (2007)은 variance gamma 모형과 블랙숄즈 모형에서 우리나라에서 판매된 상품의 가격을 비교하였다. 포괄적인 상품 설명을 위해서는 Streiff와 DiBiase (1999)가 입문서로 도움이 된다.

참여율과 최소보장수익률의 관계에 대하여 살펴보자. 참여율이 1보다 크거나 같으면 EIA가 주가지수보다 항상 수익률이 높아서 투자자들이 주식보다 EIA를 선호하게 되므로 참여율이 1보다 클 수 없

[1] 교신저자: (110-745) 서울시 종로구 명륜동 3가 53 성균관대학교 보험계리학과/수학과, 조교수.
E-mail: hangsuck@skku.edu

다. 또한 최소보장수익률은 정기예금이율보다 높으면 정기예금 상품보다 항상 우월하므로 시장에서 그런 상황이 존재하지 않으므로 최소보장수익률은 정기예금이율보다 낮게 되어 있다. 추가적으로 참여율을 높게 설계하면 최소보장수익률은 낮게 설정하여야하며 참여율이 낮으면 최소보장수익률을 높게 설정 할 수 있다. 따라서 투자자에게 매력적일 수 있는 적절한 참여율과 최소보장수익률을 결정하는 것이 상품개발시 유의해야 할 점이다.

참여율이 투자자에게 투자의사 결정시 중요한 요인이므로 참여율을 높일 수 있는 상품의 개발이 EIA를 판매하는 보험회사에게 중요한 상품개발의 지향점이 된다. 이러한 목적을 달성할 수 있는 방법의 하나로 계약기간 동안 주가가 일정 수준을 넘게 되면 특정한 수익률(Rebate)을 약속하고 그렇지 않으면 앞에서 언급한 주가수익율의 일정부분과 최소보장수익률의 큰 값을 제공하게 된다. 이런 유형의 EIA를 Barrier EIA라고 부른다. 본 논문에서는 주가지수와 일정수준을 넘는 여부를 결정하는 주가지수를 다른 지수를 사용하는 Outside Barrier가 내재된 보험 상품을 제안하고자 한다. 특히 Outside Barrier 조건의 결정을 계약기간 전체가 아닌 임의의 일부분으로 선정한 것이 특징이다. 이러한 수익률 구조를 반영하는 가격 공식을 유도하고 수치해석 기법을 이용하여 최소보장이율, Rebate, barrier 수준, 주가 변동성, 상관계수 및 관측기간 등의 변수가 참여율의 결정에 어떤 영향을 미치는지를 알아보고자 한다.

2. 제안된 EIA의 특성, 주가지수 모형, 위험중립측도

이 장에서는 제안된 EIA의 특징과 가격계산에 쓰이는 주가지수 모형에 대한 가정 및 위험중립측도에 대하여 논의한다. 또한 가격공식이 기댓값의 형태로 표현되므로 기댓값 계산을 용이하게 할 수 있는 Factorization formula에 대하여도 살펴본다.

전통적인 Barrier EIA는 발행일부터 만기일사이에 주가지수가 일정수준(Barrier) 이상을 한 번이라도 넘으면 수익률은 그 이후의 주가지수 수익률과는 관계없이 사전적으로 약정된 수익률 c(Rebate)로 결정되고 주어진 Barrier안에서 주가지수가 움직일 경우에는 참여율(α)에 비례해서 수익률이 결정되는 주가지수 연동형 상품이다. 이 상품의 수익률을 수식으로 나타내 보면 다음과 같다.

$$R_{ELA} = \begin{cases} \max\{\alpha R, g\}, & \text{if } \max\{S(\tau)\} \le B, \\ c, & \text{if } \max\{S(\tau)\} > B, \end{cases} \quad (\text{단, } 0 \le \tau \le T), \tag{2.1}$$

여기서 $R = \{S(T) - S(0)\}/S(0)$이다. 이러한 Barrier EIA는 주가지수 수준이 높아지면 만기에 EIA의 수익률이 약정된 수익률을 제공하므로 주식 시장이 좋은 경우에도 수익률이 낮을 수 있다. 참여율이 높지만 이러한 단점을 극복하기 위하여 Outside Barrier EIA가 제안되었다. 두 개의 주가지수를 고려하여 하나는 수익률을 결정하고 다른 하나는 Barrier 통과 여부를 결정하므로 Barrier를 결정하는 주가지수가 Barrier를 통과하지 않고 수익률을 결정하는 다른 주가지수가 높다면 높은 수익률이 제공되므로 Outside Barrier EIA가 Barrier EIA에 비하여 장점을 가지고 있다.

본 논문에서 제안하는 EIA는 두 개의 주가지수를 고려한다. 즉 Outside Barrier EIA이다. 하지만 기존의 Outside Barrier EIA와의 차이점은 Barrier 통과 여부를 결정하는 관측기간(Monitoring period)이 계약기간 전체가 아닌 일부로 설정할 수 있다. 상술하자면 제안된 EIA에서 고려하는 두 개의 주가지수중 하나는 수익률을 결정하는 주가지수(payoff asset)이고 다른 하나는 일정 수준을 넘는지 여부를 결정하는 주가지수(barrier asset)이다. 상품 특성은 발행일 이후의 특정 시점부터 만기일 이전의 특정 시점사이에 barrier asset의 가격이 일정수준(Barrier) 이상을 한 번이라도 넘으면 수익률은 그 이후의 대상 payoff asset 수익률과는 관계없이 사전적으로 약정된 수익률 c(Rebate)로 결정되고 주어진 Barrier안에서 주가지수(barrier asset)가 움직일 경우에는 참여율(α)에 비례해서 수익률이 결정되는 주

가지수 연동형 보험 상품이다. 수익률을 결정짓는 Payoff Asset은 S_1으로 표기하고 Barrier 통과 여부를 결정하는 Barrier Asset은 S_2로 표기하고자 한다. 제안된 이 상품의 수익률을 수식으로 나타내 보면 다음과 같다.

$$R_{ELA} = \begin{cases} \max\{\alpha R,\ g\}, & \text{if } \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B, \\ c, & \text{if } \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} > B, \end{cases} \tag{2.2}$$

여기서 $R = \{S_1(T) - S_1(0)\}/S_1(0)$이다. 식 (2.2)의 payoff는 Lee (2003)의 Barrier EIA의 일반적인 형태이다.

이제 가격 결정과정에 사용될 주가지수의 모형에 대하여 살펴보자. 두 개의 자산은 Geometric Brownian Motion을 따른다고 가정한다. $i = 1, 2$인 경우에 $S_i(0)$을 현재의 주가지수라 하면 τ시점의 주가지수는

$$S_i(\tau) = S_i(0)e^{X_i(\tau)} \tag{2.3}$$

이다. 이때, $X_i(\tau)$는 평균이 $\mu_i\tau$이고 분산이 $\sigma_i^2\tau$인 정규분포를 따른다. 또한 임의의 시점 s와 t에 대하여 확률변수 $X_i(t+s) - X_i(s)$는 $X_i(t)$와 같은 분포를 가지며 서로 독립이다. 한편 임의의 t에 대하여 공분산은 $\mathrm{Cov}(X_1(t), X_2(t)) = \rho\sigma_1\sigma_2 t$이다.

여기서 초기에 투자한 금액을 $F(0)$이라 하고 만기를 시점 T라 하면 투자자가 만기에 받는 금액은 다음과 같다.

$$F(0)(1 + R_{EIA}) = \begin{cases} F(0)\left\{1 + \max\left(\alpha\dfrac{S_1(T) - S_1(0)}{S_1(0)},\ g\right)\right\}, & \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B, \\ F(0)(1 + c), & \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} > B. \end{cases} \tag{2.4}$$

$F(\tau)$는 시점 τ에서 EIA의 가격이고, $S_1(\tau)$는 시점 0에서 투자한 금액 $F(0)$을 모두 주식에 투자했을 때 τ시점의 가격이 된다. 따라서 $S_1(0) = F(0)$이라 할 수 있다. 그리고 식 (2.4)는 다음과 표현이 가능하다.

$$F(0)(1 + R_{EIA}) = \begin{cases} F(0)(1 + g) + \alpha \max(S_1(T) - K,\ 0), & \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B, \\ F(0)(1 + c), & \max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} > B, \end{cases} \tag{2.5}$$

이때, $K = S_1(0)(1 + g/\alpha)$이다. 식 (2.5)는 Indicator function을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &[F(0)(1 + g) + \alpha \max(S_1(T) - K,\ 0)]I[\max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B] \\ &+ [F(0)(1 + c)](1 - I[\max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B]) \end{aligned} \tag{2.6}$$

또한 식 (2.6)는 다음과 같이 세 개 항의 합으로 전개할 수 있다.

$$S_1(0)(1 + c) \tag{2.7a}$$

$$+ S_1(0)(g - c)I[\max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B] \tag{2.7b}$$

$$+ \alpha \max(S_1(T) - K,\ 0)I[\max\{S_2(\tau),\ s \leq \tau \leq t\} \leq B]. \tag{2.7c}$$

이제 Gerber와 Shiu (1994, 1996)가 유도한 Factorization formula에 대하여 논의하자. 이차원 브라운 확률과정 $\{(X_1(\tau),\ X_2(\tau))'\}$의 drift vector는

$$(\mu_1,\ \mu_2) \tag{2.8a}$$

이고 diffusion matrix는

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.8b}$$

을 가정한다. 상수 h_1, h_2이고 함수 $g(\{(X_1(\tau), X_2(\tau))',\ 0 \le \tau \le T\})$에 대하여

$$\begin{aligned} &E\left[\exp(h_1X_1(T) + h_2X_2(T))g\left(\left\{(X_1(\tau), X_2(\tau))',\ 0 \le \tau \le T\right\}\right)\right] \\ &= E\left[\exp(h_1X_1(T) + h_2X_2(T))\right] \times E\left[\frac{\exp(h_1X_1(T) + h_2X_2(T))}{E\left[\exp(h_1X_1(T) + h_2X_2(T))\right]} g\left(\left\{(X_1(\tau), X_2(\tau))',\ 0 \le \tau \le T\right\}\right)\right] \\ &= E\left[\exp(h_1X_1(T) + h_2X_2(T))\right] \times E^{**}\left[g\left(\left\{(X_1(\tau), X_2(\tau))',\ 0 \le \tau \le T\right\}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

인데 표시 **에서 기댓값은 이차원 브라운 확률과정 $\{(X_1(\tau),\ X_2(\tau))'\}$의 drift vector는

$$(\mu_1, \mu_2) + (h_1, h_2)V = \left(\mu_1 + h_1\sigma_1^2 + h_2\rho\sigma_1\sigma_2,\ \mu_2 + h_1\rho\sigma_1\sigma_2 + h_2\sigma_2^2\right) \tag{2.10}$$

이고 diffusion matrix는 동일한 V에서 계산이 가능함을 보였다.

이 장의 마지막으로 위험중립측도(Risk neutral measure)에 대하여 논의하자. 위험중립측도는 할인된 기초자산 가격의 기댓값이 현재의 자산 가격과 일치하게 만드는 확률측도를 가격 계산에 사용한다는 점이다. 즉, 무위험이자율(continuously compounded interest rate)을 r이라 하면 위험중립측도는 임의의 양수 T에 대하여

$$e^{-rT}E^*[S_1(T)] = S_1(0) \tag{2.11a}$$

과

$$e^{-rT}E^*[S_2(T)] = S_2(0) \tag{2.11b}$$

을 만족하는 확률측도를 의미한다. 할인된 자산가격의 확률과정이 Martingale이 되게 만드는 확률측도를 파생상품의 가격계산에 사용할 수 있다. 위험중립측도에서 확률과정 $\{(X_1(\tau),\ X_2(\tau))'\}$의 drift vector는

$$(\mu_1,\ \mu_2) = \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right), \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right) \tag{2.11c}$$

이고 diffusion matrix는

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.11d}$$

이며 확률과정은 이차원 Brownian Motion을 따른다. 따라서 미래에 시점 T에서 투자가가 받는 기초자산의 가격에 연동하는 금액을 Y라고 하면 Y의 시점 0에서의 가격은

$$e^{-rT}E^*(Y) \tag{2.12}$$

가 되며 표시 *는 기댓값의 계산이 위험중립측도하에서 이루어지며 식 (2.11c)와 (2,11d)를 사용한다. 식 (2.12)는 자산가격결정이론(Fundamental Theorem of Asset Pricing)의 결과이다. 자세한 논의는 Gerber와 Shiu (1994, 1996)를 참고하라.

3. 제안된 EIA에 대한 가격공식 유도

이 장에서는 2장에서 제안한 상품의 만기에 투자자가 받게 될 금액을 나타내는 식 (2.7a)과 (2.7b) 및 (2.7c)의 시점 0에서 가격공식을 유도한다. 식 (2.7a)의 시점 0에서 가격은 다음과 같다.

$$e^{-rT}S_1(0)(1+c). \tag{3.1}$$

식 (2.7b)의 시점 0에서의 가격은 자산가격결정이론(Fundamental Theorem of Asset Pricing)을 적용하면 다음과 같다.

$$e^{-rT}S_1(0)(g-c)E^*[I\,[\max\{S_2(\tau),\ s\le\tau\le t\}\le B]\,] \tag{3.2}$$

이때, E^*는 기대값의 계산이 위험중립측도(risk-neutral measure)하에서 이루어지므로 이 새로운 확률측도는 $X_2(\tau)$의 평균을 $\mu_2\tau$대신 $(r-1/2\sigma_2^2)\tau$로 바꾸어 계산하면 된다. 여기서 주목할 점은 위험중립측도는 식 (2.11a), (2.11b), (2.11c) 및 (2.11d)의 특성을 갖는다. 이제 식 (3.2)의 기대값 부분을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E^*[I\,[\max\{S_2(\tau),\ s\le\tau\le t\}\le B]\,] &= \Pr{}^*\left(\max\left\{S_2(0)e^{X_2(\tau)},\ s\le\tau\le t\right\}\le B\right) \\ &= \Pr{}^*\left(M_2(s,t)\le m\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서 $m=\ln(B/S_2(0))$이며, $M_2(s,t)=\max\{X_2(\tau),\ s\le\tau\le t\}$라 정의한다. 따라서 식 (3.2)를 정리해 보면 다음과 같고, 이는 식 (2.7b)의 시점 0에서의 가격이다.

$$e^{-rT}S_1(0)(g-c)\Pr{}^*(M_2(s,t)\le m) \tag{3.4}$$

이때, $\Pr^*(M_2(s,t)\le m)$은 Lee (2004)에 있는 공식

$$\Pr(M(s,t)\le m)=\Phi_2\left(\frac{m-\mu t}{\sigma\sqrt{t}},\ \frac{m-\mu s}{\sigma\sqrt{s}};\ \sqrt{\frac{s}{t}}\right)-\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}m\right)\Phi_2\left(\frac{-m-\mu t}{\sigma\sqrt{t}},\ \frac{m+\mu s}{\sigma\sqrt{s}};\ -\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \tag{3.5}$$

를 이용하고 μ대신 $(r-1/2\sigma_2^2)$을 σ대신 σ_2을 대입하면, 식 (3.4)의 확률부분은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \Pr{}^*(M_2(s,t)\le m) &= \Phi_2\left(\frac{m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\ \frac{m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}};\ \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad -\exp\left(\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)}{\sigma_2^2}m\right)\times\Phi_2\left(\frac{-m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\ \frac{m+\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}};-\sqrt{\frac{s}{t}}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

가격공식의 마지막 항을 유도해 보자. 자산가격결정이론(Fundamental Theorem of Asset Pricing)을 적용하면 식 (2.7c)의 임의의 시점 0에서의 가격은 다음과 같다.

$$e^{-rT}\alpha E^*[\max(S_1(T)-K,0)I[\max\{S_2(\tau)\}\le B]] \tag{3.7}$$

이때, E^*는 기대값의 계산이 위험중립측도(risk-neutral probability measure) 하에서 이루어지므로 식 (2.11a), (2.11b), (2.11c) 및 (2.11d)를 이용할 수 있다. 식 (3.7)의 기대값은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} & E^*[\max(S_1(T)-K, 0)I[\max\{S_2(\tau)\} \le B]] \\ &= E^*[(S_1(T)-K)I[S_1(T)>K]I[\max\{S_2(\tau)\} \le B]] \\ &= E^*[S_1(T)I[\max\{S_2(\tau)\} \le B, S_1(T)>K]] - KE^*[I[\max\{S_2(\tau)\} \le B, S_1(T)>K)]]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

식 (3.8)에서 계산이 좀 더 수월한 두 번째 항의 값을 먼저 계산해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} KE^*[I[\max\{S_2(\tau)\} \le B, S_1(T)>K)]] &= K\Pr^*(\max\{S_2(\tau)\} \le B, S_1(T)>K) \\ &= K\Pr^*\left(\max\left\{S_2(0)e^{X_2(\tau)}\right\} \le B, S_1(0)e^{X_1(T)} > K\right) \\ &= K\Pr^*\left(M_2(s,t) \le m, X_1(T) > k\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

여기서 $m = \ln(B/S_2(0))$이고, $k = \ln(K/S_1(0))$라고 정의한다. 위험중립측도에서 식 (3.9)의 확률 $\Pr^*(M_2(s,t) \le m, X_1(T) > x)$는 Lee (2004)에서 증명된 확률공식

$$\begin{aligned} \Pr(M_2(s,t) \le m, X_1(T) > x) &= \Pr(M_2(s,t) \le m) - \Pr(M_2(s,t) \le m, X_1(T) \le x) \\ &= \Phi_2\left(\frac{m-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - \exp\left(\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}m\right)\Phi_2\left(\frac{-m-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - \Phi_3\left(\frac{x-\mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{m-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) + \exp\left(\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}m\right) \\ &\quad \times \Phi_3\left(\frac{x-\mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}} - \frac{2\rho m}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-m-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

에 (μ_1, μ_2)대신에 $(r-\sigma_1^2/2, r-\sigma_2^2/2)$을 대입하면, 식 (3.9)의 확률부분은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} & \Pr^*(M_2(s,t) \le m, X_1(T) > k) \\ &= \Phi_2\left(\frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - \exp\left(\frac{2\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)}{\sigma_2^2}m\right)\Phi_2\left(\frac{-m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - \Phi_3\left(\frac{k-\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$+\exp\left(\frac{2\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)}{\sigma_2^2}m\right)\times\Phi_3\left(\frac{k-\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}-\frac{2\rho m}{\sigma_2\sqrt{T}},\frac{-m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\frac{m+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}\right.$$
$$\left.;\rho\sqrt{\frac{t}{T}},-\rho\sqrt{\frac{s}{T}},-\sqrt{\frac{s}{t}}\right).$$

마지막으로 식 (3.8)의 첫 번째 항의 기대값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &E^*\left[S_1(T)I\left[\max\{S_2(\tau)\}\le B,\ S_1(T)>K\right]\right] \\ &= E^*\left[S_1(T)I\left[\max\left\{S_2(0)e^{X_2(\tau)}\right\}\le B,\ S_1(0)e^{X_2(T)}>K\right]\right] \\ &= E^*\left[S_1(T)I\left[M_2(s,t)\le m,\ X_1(T)>k\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

식 (3.12)는 Gerber와 Shiu (1996)의 Factorization formula를 적용하면 쉽게 계산된다. 즉, 이 공식를 적용하기 위해 우선 식 (3.12)에 $E^*[S_1(T)]$를 나누고 곱하여 주고 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$\begin{aligned} &E^*[S_1(T)]E^*\left[\frac{S_1(T)}{E^*[S_1(T)]}I\left[M_2(s,t)\le m,\ X_1(T)>k\right]\right] \\ &= E^*[S_1(T)]E^{**}[I[M_2(s,t)\le m,\ X_1(T)>k]] \\ &= E^*[S_1(T)]\Pr^{**}(M_2(s,t)\le m,\ X_1(T)>k), \end{aligned} \tag{3.13}$$

여기서 $m = \ln(B/S_2(0))$이고, $k = \ln(K/S_1(0))$이며, 표시 $**$는 식 (2.9)와 (2.10)을 적용한 것으로 $(X_1(\tau), X_2(\tau))'$가

$$(\mu_1^{**},\mu_2^{**}) = (\mu_1,\mu_2)+(1,0)V = \left(r+\frac{\sigma_1^2}{2},\ r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)$$

이고

$$V=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

인 이차원 Brownian Motion를 나타낸다. 식 (3.13)에 있는 확률은 식 (3.10)에서 언급한 확률공식에 (μ_1,μ_2)대신에 $(r+\sigma_1^2/2,\ r-\sigma_2^2/2+\rho\sigma_1\sigma_2)$를 대입하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\Pr^{**}(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k) \\ &=\Phi_2\left(\frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}};\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &-\exp\left(\frac{2\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sigma_2^2}m\right)\times\Phi_2\left(\frac{-m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\frac{m+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}};-\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$-\Phi_3\left(\frac{k-\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

$$+\exp\left(\frac{2\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sigma_2^2}m\right)\times\Phi_3\left(\frac{k-\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}-\frac{2\rho m}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{m+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}\right.$$

$$\left.;\rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right).$$

따라서 식 (3.14)를 이용하여 식 (3.7)을 정리해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &e^{-rT}\alpha E^*[\max(S_1(T)-K, 0)I[\max\{S_2(\tau)\}\le B]] \\ &= e^{-rT}\alpha E^*[S_1(T)]\Pr{}^{**}(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k) - e^{-rT}\alpha K\Pr{}^*(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k), \end{aligned} \tag{3.15}$$

여기서 식 (2.11a)를 이용하면

$$e^{-rT}E^*[S_1(T)] = S_1(0) \tag{3.16}$$

과 같으므로 식 (3.15)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha S_1(0)\Pr{}^{**}(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k) - e^{-rT}\alpha K\Pr{}^*(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k). \tag{3.17}$$

위에서 유도한 결과인 식 (3.1)과 (3.4)에 (3.6)을 대입한 것과 (3.17)을 종합하면 본 논문에서 제안한 상품의 시점 0에서의 가격은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &e^{-rT}S_1(0)(1+c) \\ &+ e^{-rT}S_1(0)(g-c)\Pr{}^*(M_2(s,t)\le m) \\ &+ \alpha S_1(0)\Pr{}^{**}(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k) - e^{-rT}\alpha K\Pr{}^*(M_2(s,t)\le m, X_1(T)>k) \\ &= e^{-rT}S_1(0)(1+c) \\ &\quad + e^{-rT}S_1(0)(g-c)\times\left\{\Phi_2\left(\frac{m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right. \\ &\quad \left. -\exp\left(\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)}{\sigma_2^2}m\right)\times\Phi_2\left(\frac{-m-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m+\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right\} \\ &\quad + \alpha S_1(0)\times\left\{\Phi_2\left(\frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right. \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$- \exp\left(\frac{2\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sigma_2^2} m\right) \times \Phi_2\left(\frac{-m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

$$- \Phi_3\left(\frac{k - \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

$$+ \exp\left(\frac{2\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sigma_2^2} m\right)$$

$$\times\Phi_3\left(\frac{k - \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}} - \frac{2\rho m}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{m + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)\Bigg)\Bigg\}$$

$$- e^{-rT}\alpha K \times \left\{\Phi_2\left(\frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right.$$

$$- \exp\left(\frac{2\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)}{\sigma_2^2} m\right)\Phi_2\left(\frac{-m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

$$- \Phi_3\left(\frac{k - \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

$$+ \exp\left(\frac{2\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)}{\sigma_2^2} m\right) \times\Phi_3\left(\frac{k - \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}} - \frac{2\rho m}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-m - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{m + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)s}{\sigma_2\sqrt{s}}\right.$$

$$\left.; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)\Bigg\}$$

시점 0에서 투자된 금액 $F(0)$과 제안된 상품의 시점 0에서의 가격은 상품 발행에 따른 비용 및 이익을 무시하는 경우에는 일치하여야 한다. 두 개의 금액이 일치하는 방정식을 통하여 적절한 참여율을 구할 수 있다. 다음 장에서는 여러 가지 요인들의 가정하에서 참여율이 방정식을 통하여 어떻게 구해지는지 살펴보고자 한다.

4. 최소보장이율과 Rebate 및 여러 가지 변수의 가정값과 참여율 관계

이 장에서는 3장에서 유도한 가격공식을 이용하여 시점 0에서 가격공식과 투자액이 일치하는 방정식을 풀어서 최소보장이율과 Rebate 및 여러 가지 다른 변수의 가정값과 참여율의 관계를 살펴보자. 즉 최소보장수익률이 달라질 때 참여율의 값을 계산해 보고 Rebate 수준과 참여율의 관계도 살펴본다. 또한 관측기간, 주가의 변동성, 이자율의 변화, 상관계수의 변화에 따라서 참여율이 어떻게 결정되는지도 살펴본다. 다른 조건이 동일하다면 참여율이 높으면 고객이 만기에 수익이 높아지기 때문에 시점 0의 가격이 높아지게 되므로 참여율과 가격은 역관계를 가지고 있다. 4장에서는 참여율의 계산에 초점을 맞추어서 논의를 전개한다. 변수를 해석할 때 참여율을 증가시키는 변수가 있다면 참여율과 가격의 역관계에 의하여 그 변수는 가격을 감소시키는 요인으로 해석이 가능하다.

수치계산을 위하여 일변수와 이변수 표준정규 분포함수의 계산은 Drezner (1978, 1994)의 알고리즘을 이용하고 삼변수 표준정규 분포함수의 계산은 이변수 표준정규 분포함수를 이용하여 수치적분의 방법인 Gaussian Quadrature를 적용한다. 비선형 방정식 해를 구하기 위하여 Method of False Position을 사용한다. 수치해석 기법은 Burden과 Faires (2005)를 참조하라. 사용한 프로그래밍 언어는 VBA(Visual Basic for Applications)이다. VBA는 엑셀(Microsoft Excel)에 내장되어 있어서 사용하기 편리하며 특히 자료 입력과 결과 출력 및 UI(User Interface)가 용이한 장점을 가지고 있다.

4.1. 참여율(α)의 방정식

최소보장이율(g)에 따라 참여율(α)을 얼마로 정해야 하는가 하는 문제를 살펴보도록 하자. 본 논문에서 제안된 상품의 시점 0에서의 가격은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F(0) = {} & e^{-rT} S_1(0)(1+c) \\ & + e^{-rT} S_1(0)(g-c)\Pr{}^*(M_2(s,t) \le m) \\ & + \alpha S_1(0)\Pr{}^{**}(M_2(s,t) \le m,\ X_1(T) > k) \\ & - e^{-rT} \alpha S_1(0)\left(1+\frac{g}{\alpha}\right)\Pr{}^*(M_2(s,t) \le m,\ X_1(T) > k) \end{aligned} \tag{4.1}$$

이때 $F(0) = S_1(0)$이므로 식 (4.1)의 양변을 $F(0)$으로 나누어 주고 1을 빼면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & e^{-rT}(1+c) \\ & + e^{-rT}(g-c)\Pr{}^*(M_2(s,t) \le m) \\ & + \alpha\Pr{}^{**}(M_2(s,t) \le m,\ X_1(T) > k) \\ & - e^{-rT}\alpha\left(1+\frac{g}{\alpha}\right)\Pr{}^*(M_2(s,t) \le m,\ X_1(T) > k) - 1 \\ & = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

이제 방정식 (4.2)의 해를 구하는 과정에 대해 살펴보자. 식 (4.2)는 비선형 방정식이므로 α값을 구하는 것은 간단한 식의 풀이로는 불가능하기 때문에 수치해석방법인 Method of False Position을 사용한다. 이 방법은 Bisection Method와 Secant Method의 혼합된 형태된 알고리즘이며 Bisection Method의 단점인 느린 계산 속도와 Secant Method의 단점인 불안정한 해찾기를 극복하기 위하여 개발된 알고리즘이다. Method of False Position은 Bisection Method에 비하여 계산 속도가 매우 빠르며 안정적으로 해를 구하는 장점이 있다. 또한 Newton Method와 달리 도함수를 구할 필요도 없다.

다음에 있는 여러 절에서 사용될 방정식 (4.2)의 기본적인 가정값은 표 1을 참조하라. 표 2에서 표 8까지의 여러 표는 표 1의 가정을 사용하지만 가정변수의 일부를 변경한 여러 가지 수준별 값을 사용

표 1: 기본 가정

	기본 가정
이자율 r	5%
만기 T	10년
barrier level B	3
Rebate c	70%
σ_1	0.3
σ_2	0.3
$S_1(0)$	1
$S_2(0)$	1
상관계수	0.4
s	1
t	2

표 2: 관측기간 확장에 따른 참여율

$[s,t]$	최소보장수익률(10년 만기)					
	10%	20%	30%	40%	50%	60%
[1,2]	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
[1,3]	0.7105	0.6417	0.5639	0.4741	0.3657	0.2147
[1,4]	0.7320	0.6603	0.5793	0.4860	0.3736	0.2164
[1,5]	0.7575	0.6821	0.5974	0.5000	0.3828	0.2183
[1,6]	0.7856	0.7062	0.6173	0.5154	0.3928	0.2200
[1,7]	0.8157	0.7320	0.6385	0.5316	0.4033	0.2215
[1,8]	0.8475	0.7592	0.6608	0.5487	0.4143	0.2228
[1,9]	0.8809	0.7876	0.6841	0.5664	0.4256	0.2238

표 3: 관측기간을 변경할 때 참여율

$[s,t]$	최소보장수익률(10년 만기)					
	10%	20%	30%	40%	50%	60%
[1,2]	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
[2,3]	0.7101	0.6413	0.5636	0.4739	0.3656	0.2147
[3,4]	0.7299	0.6584	0.5778	0.4850	0.3731	0.2168
[4,5]	0.7522	0.6778	0.5940	0.4976	0.3816	0.2193
[5,6]	0.7762	0.6984	0.6112	0.5112	0.3909	0.2221
[6,7]	0.8013	0.7201	0.6293	0.5254	0.4006	0.2252
[7,8]	0.8273	0.7426	0.6481	0.5402	0.4108	0.2286
[8,9]	0.8542	0.7658	0.6675	0.5555	0.4214	0.2321

하여 다양한 분석 결과를 제시한다. 지수연동형 보험 상품은 장기보험이므로 만기는 10년으로 설정한다. 만기가 10년이므로 10년 뒤에 투자한 금액을 받게 되므로 Rebate와 최소보장수익률도 10년 기준으로 설정하여야 한다. $S_2(0) = 1$이고 barrier level B = 3인 가정은 barrier asset이 초기 가격보다 3배가 되면 Rebate를 만기에 받게 됨을 의미한다. σ_1과 σ_2는 주가의 로그수익률의 표준편차를 의미하며 연(year) 기준으로 가정된 값들이다. 이자율은 무위험자산의 수익률을 뜻하며 연속 복리(Continuously compound interest rate) 방식에서 정의되며 연 기준의 이율이다. 따라서 시점 0에서 1을 투자하면 시점 T에서 $\exp(rT)$를 받게 된다.

표 4: Rebate 수준별 참여율

c	최소보장수익률(10년 만기)					
	10%	20%	30%	40%	50%	60%
70%	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
80%	0.6943	0.6275	0.5518	0.4644	0.3586	0.2111
90%	0.6931	0.6263	0.5506	0.4630	0.3570	0.2088
100%	0.6919	0.6251	0.5493	0.4617	0.3555	0.2066
110%	0.6906	0.6238	0.5480	0.4603	0.3540	0.2043
120%	0.6894	0.6226	0.5468	0.4590	0.3525	0.2021
130%	0.6882	0.6214	0.5455	0.4576	0.3509	0.1998
140%	0.6870	0.6202	0.5443	0.4563	0.3494	0.1974

4.2. 관측기간과 최소보장수익률의 수준별 참여율(α)의 결정

표 1의 가정에서 관측기간의 시점과 종점인 s와 t를 변경하여 최소보장수익률의 여러 수준별로 참여율을 계산한 결과는 표 2에 있다. 여기서 최소보장수익률을 크게 하면 참여율이 작아지며 관측기간이 길어지면 Rebate를 받게 될 가능성이 높아지므로 참여율이 높아진다. 최소보장수익률이 10년 기준으로 설정되었다. 최소보장수익률이 낮은 경우에는 관측기간을 확장할 때 참여율의 증가 폭이 크지만 최소보장수익률이 높은 경우에는 관측기간을 확장할 때 참여율의 증가폭이 비교적 크지 않다. 최소보장수익률이 60%인 경우에는 만기에 주가가 하락한 경우에도 원금과 원금의 60%를 추가로 받기 때문에 참여율이 0.2133에서 0.2183으로 낮은 것은 당연한 결과라고 볼 수 있다. 만약 무위험자산(5%)에 투자를 했다면 64.87%의 수익률이 달성되므로 EIA의 수익률이 비교적 좋음을 확인 할 수 있다. 가격과 참여율의 역관계를 통하여 관측기간이 늘어나면 가격이 하락함을 알 수 있다.

표 3은 표 2와 비슷하지만 $[s,t]$를 설정할 때 누적이 아닌 s와 t에 1씩 계속 커지게 설정한 점이 차이가 있다. 관측구간이 이동할 때 참여율이 계속 크게 됨을 알 수 있으며 최소보장수익률의 수준이 커질 때 참여율이 낮아지는 특징이 있다. 관측 구간이 시점 0에서 만기 방향으로 이동하면 주가가 성장하는 추세가 있으므로 Rebate를 받을 가능성이 높아지기 때문에 고객은 주가의 성장으로 수익을 얻지 못하게 되므로 참여율이 높아진다. 가격과 참여율의 역관계를 통하여 관측기간이 시점 0에서 만기 방향으로 이동하면 가격이 하락함을 알 수 있다. 또한 최소보장수익률은 가격을 증가시키는 요소임이 자명하다.

4.3. Rebate와 이자율 및 최소보장수익율의 수준별 참여율(α)의 결정

표 4는 표 1의 기본 가정에서 Rebate c와 최소보장수익률의 여러 수준별로 참여율을 계산한 결과이다. barrier asset이 관측기간 동안 barrier level을 넘으면 10년 만기에 Rebate를 받게 되는 특성이 있으므로 Rebate를 높이면 참여율이 낮아지는 것은 당연하다. 최소보장수익률의 여러 수준 별로 Rebate의 변화로 인하여 생기는 참여율의 감소하는 정도가 비슷하다. 가격과 참여율의 역관계를 통하여 Rebate가 증가하면 가격은 증가함을 알 수 있다.

한편 이자율의 변화에 참여율이 어떻게 달라질 수 있는지 살펴보자. 표 5를 참조하면 민감도를 확인 할 수 있다. 최소보장수익률이 10%인 경우에 이자율 5%일 때 참여율이 0.6955이고 이자율이 6%일 때 0.7733이 된다. 이자율 1%의 변화가 참여율에 영향을 많이 주고 있음을 알 수 있다. 다른 조건에서도 마찬가지로 이자율의 변화가 참여율에 영향이 크다. 따라서 상품을 판매할 때 이자율의 결정이 매우 중요한 요소이다. 가격과 참여율의 역관계를 통하여 이자율이 증가하면 가격은 감소함을 알 수 있다.

표 5: 이자율 가정이 다를 때 참여율

r	최소보장수익률(10년 만기)					
	10%	20%	30%	40%	50%	60%
5.0%	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
5.5%	0.7369	0.6781	0.6121	0.5371	0.4499	0.3429
6.0%	0.7733	0.7215	0.6637	0.5986	0.5246	0.4381
6.5%	0.8053	0.7597	0.7089	0.6521	0.5884	0.5157
7.0%	0.8336	0.7933	0.7486	0.6989	0.6436	0.5814
7.5%	0.8585	0.8230	0.7836	0.7400	0.6916	0.6379
8.0%	0.8805	0.8492	0.8145	0.7761	0.7338	0.6870
8.5%	0.8999	0.8724	0.8418	0.8080	0.7708	0.7299

표 6: barrier 수준이 다를 때 참여율

barrier	최소보장수익률(10년 만기)					
	10%	20%	30%	40%	50%	60%
1.50	0.7635	0.6833	0.5933	0.4898	0.3638	0.1748
1.75	0.7415	0.6669	0.5828	0.4860	0.3690	0.2017
2.00	0.7241	0.6528	0.5723	0.4796	0.3675	0.2099
2.25	0.7120	0.6427	0.5644	0.4741	0.3650	0.2125
2.50	0.7039	0.6360	0.5590	0.4702	0.3628	0.2133
2.75	0.6988	0.6316	0.5554	0.4675	0.3612	0.2134
3.00	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
3.25	0.6934	0.6270	0.5516	0.4646	0.3593	0.2131
3.50	0.6921	0.6258	0.5507	0.4638	0.3588	0.2130
3.75	0.6913	0.6251	0.5501	0.4634	0.3585	0.2129
4.00	0.6908	0.6247	0.5497	0.4631	0.3583	0.2128

4.4. barrier level과 주가변동성 및 최소보장수익율의 수준별 참여율(α)의 결정

barrier level이 참여율에 어떤 영향을 미치는지 살펴보자. 표 1의 기본 가정에서 barrier level을 1.5에서 4.0까지 0.25씩 증가시켜서 최소보장수익률의 여러 수준별로 참여율을 계산해 보면 표 6이 된다. 표 6을 참조하면 barrier level은 참여율을 감소시키는 요인이 되며 최소보장수익률이 높게 설정되었을 때 보다 낮게 설정 되었을 때 참여율이 감소하는 폭이 크게 됨을 확인 할 수 있다. 또한 가격과 참여율의 역관계를 통하여 barrier level이 증가하면 가격은 증가함을 알 수 있다.

이제 주가 변동성이 참여율에 미치는 영향을 분석해 보자. 표 1의 기본 가정에서 두 개의 주가 변동성을 0.2, 0.3, 0.4로 각각 변경해 보면 표 7에서 참여율의 계산 결과를 확인할 수 있다. payoff asset의 변동성의 증가는 참여율이 하락하게 한다. 반대로 barrier asset의 변동성의 증가는 참여율이 증가하게 한다. 하지만 payoff asset의 변동성이 barrier asset의 변동성에 비하여 상대적으로 참여율의 증감에 영향을 많이 주고 있다. 또한 가격과 참여율의 역관계를 통하여 payoff asset의 변동성이 가격의 증가 요인이며 barrier asset의 변동성은 가격의 감소 요인이 된다.

4.5. 상관계수와 barrier의 수준별 참여율(α)의 결정

이 절에서는 payoff asset과 barrier asset의 상관계수와 barrier의 여러 수준별로 참여율을 계산하여 두 변수의 특성을 분석해 보자. 표 1의 기본 가정에서 상관계수를 −0.5에서 0.5까지 0.1씩 증가시키며 barrier level을 1부터 4까지 0.5씩 증가시켜서 각 수준별로 참여율을 계산한다. 최소보장수익률이 30% 가정한다. 표 8을 참조하면 상관계수는 참여율을 증가시키며 barrier level도 참여율을 증가시킨다. 또

표 7: 주가 변동성이 다를 때 참여율

σ_1	σ_2	최소보장수익률(10년 만기)					
		10%	20%	30%	40%	50%	60%
0.2	0.2	0.8236	0.7664	0.6970	0.6112	0.5002	0.3314
	0.3	0.8282	0.7705	0.7004	0.6140	0.5021	0.3319
	0.4	0.8380	0.7790	0.7075	0.6194	0.5054	0.3311
0.3	0.2	0.6901	0.6241	0.5492	0.4627	0.3580	0.2127
	0.3	0.6955	0.6287	0.5531	0.4657	0.3601	0.2133
	0.4	0.7070	0.6385	0.5611	0.4717	0.3636	0.2130
0.4	0.2	0.5920	0.5243	0.4501	0.3675	0.2717	0.1470
	0.3	0.5979	0.5294	0.4543	0.3707	0.2738	0.1476
	0.4	0.6105	0.5399	0.4628	0.3769	0.2776	0.1477

표 8: barrier 수준별로 상관계수가 다른 경우 참여율(최소보장수익률이 30% 가정)

상관계수	barrier 수준)						
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
−0.5	0.2622	0.4602	0.5180	0.5385	0.5454	0.5478	0.5486
−0.4	0.2763	0.4700	0.5218	0.5397	0.5459	0.5479	0.5487
−0.3	0.2919	0.4807	0.5260	0.5412	0.5463	0.5481	0.5487
−0.2	0.3093	0.4926	0.5307	0.5429	0.5469	0.5483	0.5488
−0.1	0.3288	0.5056	0.5360	0.5448	0.5476	0.5486	0.5489
0.0	0.3505	0.5199	0.5419	0.5470	0.5484	0.5489	0.5490
0.1	0.3749	0.5356	0.5484	0.5495	0.5494	0.5492	0.5491
0.2	0.4026	0.5530	0.5556	0.5523	0.5505	0.5496	0.5493
0.3	0.4339	0.5722	0.5635	0.5555	0.5517	0.5501	0.5495
0.4	0.4696	0.5933	0.5723	0.5590	0.5531	0.5507	0.5497
0.5	0.5107	0.6168	0.5820	0.5630	0.5547	0.5513	0.5500

표 9: 요인별 참여율과 가격에 미치는 영향

요인	참여율	가격
관측기간(확장)	증가	감소
관측기간(이동)	증가	감소
최소보장수익률	감소	증가
Rebate	감소	증가
이자율	증가	감소
barrier level	감소	증가
payoff asset 주가변동성	감소	증가
barrier asset 주가변동성	증가	감소
상관계수	증가	감소

한 가격과 참여율의 역관계를 통하여 상관계수는 가격을 감소시키는 요인이며 barrier level도 가격을 감소시키는 요인이다.

5. 결론

본 논문에서는 수익률을 결정하는 주가지수와 일정수준을 넘는 여부를 결정하는 주가지수를 다른 지수로 사용하는 Outside Barrier가 내재된 보험 상품을 제안하였다. 특히 Outside Barrier 조건의 결정을 계약기간 전체가 아닌 계약기간의 일부분으로 선정한 것이 특징이다. 이러한 수익률 구조를 반영

하는 가격 공식을 기댓값 계산을 통하여 유도하였고 수치해석 기법을 이용하여 최소보장이율, Rebate, barrier 수준, 주가 변동성, 상관계수 및 관측기간 등의 변수가 참여율의 결정에 어떤 영향을 미치는지를 분석하였다. 표 2에서 8까지 종합하면 표 9로 요약할 수 있다.

마지막으로 본 연구와 연관된 향후 연구 과제를 제안해보고자 한다. 본 연구에서는 가격 공식을 유도하였지만 헷징에 대한 연구를 통하여 실질적인 업무와 연결되는 실용적인 연구가 필요하다. 물론 여기서 유도된 공식은 델타 헷징의 기초 정보를 제공하고 있다. 또한 주가모형을 Variance gamma같은 다른 모형으로 적용하여 비교해 보는 것도 의미가 있다.

감사의 글

논문의 구성과 내용에 다양한 측면에서 건설적인 조언을 해주신 익명의 심사위원께 감사드립니다.

참고 문헌

Burden, R. L. and Faires, J. D. (2005). *Numerical Analysis*, Thompson Brooks/Cole.

Cho, J. and Lee. H. (2007). Pricing an equity-linked security with non-guaranteed. principal, *The Korean Communications in Statistics*, **14**, 413–429.

Drezner, Z. (1978). Computation of the bivariate normal integral, *Mathematics of Computation*, **32**, 277–279.

Drezner, Z. (1994). Computation of the trivariate normal integral, *Mathematics of Computation*, **62**, 289–294.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1994). Options pricing by Esscher transforms, *Transactions of the Society of Actuaries*, **46**, 99–140, 141–191.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1996). Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing, *Insurance: Mathematics and Economics*, **18**, 183–218.

Jaimungal, S. (2004). Pricing and hedging equity-indexed annuities with variance-gamma deviates, *Working Paper*, Department of Statistics, University of Toronto.

Lee, H. (2003). Pricing equity-indexed annuities with path-dependent options, *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 677–690.

Lee, H. (2004). A joint distribution of two-dimensional Brownian motion with an application to an outside barrier option, *Journal of Korean Statistical Society*, **33**, 245–254.

Streiff, T. F. and Dibiase, C. A. (1999). *Equity Indexed Annuities*, Dearborn, Chicago.

Tiong, S. (2000). Valuing equity-indexed annuities, *North American Actuarial Journal*, **4**, 149–163.

2008년 11월 접수; 2008년 12월 채택

Pricing an Outside Barrier Equity-Indexed Annuity with Flexible Monitoring Period

Seung Hee Shin[a], Hangsuck Lee[1,b]

[a]National Pension Research Institute,
[b]Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan Univ.

Abstract

Equity-indexed annuities(EIAs) provide their customers with the greater of either the return linked to the underlying index or the minimum guaranteed return. Insurance companies have developed EIAs to attract customers reluctant to buy traditional fixed annuities because of low returns and also reluctant to buy mutual funds for fear of the high volatility in the stock market. This paper proposes a new type of EIA embedded with an outside barrier option with flexible monitoring period in order to increase its participation rate. It also derives an explicit pricing formula for this proposed product, and discusses numerical examples to show relationships among participation rate, barrier level, index volatility and correlation.

Keywords: Equity-indexed annuities, minimum guaranteed return, outside barrier option, participation rate.

[1] Corresponding author: Assistant Professor, Department of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University, 53 Myungnyun-Dong 3 ga, Jongno-Gu, Seoul 110-745, Korea. Email: hangsuck@skku.edu