

Hermite 유동함수법에 의한 정사각형 공동 내부의 자연대류 유동계산

김진환¹

COMPUTATIONS OF NATURAL CONVECTION FLOW WITHIN A SQUARE CAVITY BY HERMITE STREAM FUNCTION METHOD

J.W. Kim¹

This paper is a continuation of a recent development on the Hermite-based divergence-free element method and deals with a non-isothermal fluid flow driven by the buoyancy force in a square cavity with temperature difference across the two sides. Two Hermite functions are considered for numerical computations in this paper. One is a cubic function and the other is a quartic function. The degrees-of-freedom of the cubic Hermite function are stream function and its first and second derivatives for the velocity field, and temperature and its first derivatives for the temperature field. The degrees-of-freedom of the quartic Hermite function include two second derivatives and one cross derivative of the stream function in addition to the degrees-of-freedom of the cubic stream function. This paper presents a brief review on the Hermite based divergence-free basis functions and its finite element formulations for the buoyancy driven flow. The present algorithm does not employ any upwinding or a stabilization term. However, numerical values and contour graphs for major flow variables showed good agreements with those by De Vahl Davis[6].

Key Words : 자연대류(Natural Convection), 무발산 요소(Divergence-free Element), 벡터 포텐셜(Vector Potential), 회전기저함수(Solenoidal Basis Function), 비회전 기저 함수(Irrotational Basis Function)

1. 서론

Navier-Stokes 방정식에서 밀도의 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있으나, 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 회전(solenoidal)이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있다. 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 오히려 더 어렵게 하고 있음은 잘 알려져 있다. 따라서 이 구속조건을 만족시키는 요소(무발산 요소)의 기저함수를 찾는 시도는 오래 전부터 있었으나 별다른

성과는 없었으며, Griffiths[1]이후, 무발산 요소에 대한 연구는 찾아보기가 어렵다. 아마도 세 가지 요소가 Navier-Stokes 방정식의 풀이를 어렵게 하고 있는 것으로 보인다.

- (1) 압력은 속도와 연성되지만, 시간 변화에 따른 압력식의 부재
- (2) 연속방정식이 구속 조건일 경우, 이를 만족시키기 어려움
- (3) 대류항의 비선형성

우리는 Helmholtz 정리로부터 모든 벡터는 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational)성분으로 직교 분리될 수 있음을 안다[2]. 따라서 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 다음과 같이 회전 성분과 비회전 성분으로 분리할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \tag{1}$$

접수일: 2009년 9월 16일, 수정일: 2009년 12월 9일,
 게재확정일: 2009년 12월 11일.
 1 정회원, 동의대학교 기계공학과
 E-mail: kimjw@deu.ac.kr

$$\nabla p = \pi^f(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^f \quad (2)$$

여기서, \underline{f}^s 는 중력항 \underline{f} 의 비보존적 혹은 회전 성분을, \underline{f}^f 는 \underline{f} 의 보존적 혹은 비회전 성분을 의미하며, π^s 와 π^f 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 투사 연산자(projection operator)이다. 만일 속도 \underline{u} 가 회전 성분으로 구성된다면, 벡터 포텐셜 $\underline{\psi}$ 가 존재하여 다음의 관계가 성립한다.

$$\underline{u} = \nabla \times \underline{\psi} \quad (3)$$

즉, 이와 같은 풀이법이 있다면, 구속 조건 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ 을 자동적으로 만족시켜서 연속 방정식은 더 이상 필요하지 않게 된다. 최근 Holdeman[3]은 이를 위하여 Hermite 함수의 사용을 제안하였으며, 이를 이용하면 Navier-Stokes 방정식의 풀이에 있어서 제 (1)항과 (2)항은 해결될 수 있음을 이미 살펴 보았다[4, 5]. 본 연구에서 사용한 Hermite 함수는 3차 및 4차 함수로 4 절점 사변형 요소에 모두 각각 12개와 24개의 자유도를 가진다. 따라서 우리는 이 요소들을 편의상 "S3412"와 "S4424"로 부르기로 한다.

새로이 제안된 유동 계산법은 종종 잘 알려진 benchmark 문제인 De Vahl Davis[6]의 정사각형 공동 내의 자연 대류 유동 해석을 통하여 검증되는 관계로 본 연구도 이 문제에 대한 해를 살펴보고자 한다. 더욱이 유동 계산의 한 주요 응용은 열 설계(thermal design)분야이며, 이는 원자로 냉각, 태양열 집열기, 결정 성장 그리고 최근의 각종 전자 장비들이 소형화됨에 따른 효율적인 설계 등, 많은 응용 분야가 있으나, 이의 해결은 그리 쉽지가 않다[7].

먼저 제 2장에서는 Hermite 유동함수법의 이해를 돕기 위하여 3차 유동함수에 대한 간단한 설명을 보인다. 제 3장에는 자연 대류 유동에 대한 문제 정의와 무차원 방정식을 정의하고, 제 4장에는 자연 대류 유동 방정식과 온도 방정식에 대하여 Hermite 유동 함수법의 적용을 보이고, 제 5장에는 유동 함수법의 수치 계산 결과를 보이고 결론은 제 6장에 보이기로 한다. S3412에 대한 회전 보간 함수는 참고문헌 [4]를 참조하기 바라며, S4424에 대한 회전 보간 함수는 본 논문의 부록을 참조하기 바란다.

2. 사변형 요소에 대한 무발산 보간 함수

2.1 비회전(irrotational) 보간 함수

$\phi^e(x,y)$ 를 사변형 요소 내의 임의 함수 $\phi(x,y)$ 의 근사 값이라 하고 Hermite 3차 함수에 의하여 보간된다고 하자.

(ξ,η) -좌표계를 가지는 기준 요소에 대한 Hermite 3차 함수는 다음과 같다[8].

$$g_{00i} = (1/8)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2) \quad (4)$$

$$g_{10i} = (-1/8)\xi_i(1 - \xi^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (5)$$

$$g_{01i} = (-1/8)\eta_i(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (6)$$

여기서, 아래 첨자 i 는 요소의 절점 번호를 나타내며, ξ_i 와 η_i 는 해당되는 절점 좌표 값인 ± 1 을 가진다. 3차 Hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 x 및 y 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의 절점 i 에 대한 자유도를 $(\Phi_i, \partial\Phi_i/\partial x, \partial\Phi_i/\partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 함수 $\phi^e(x,y)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Phi_i g_{0i} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (7)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (8)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (9)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (10)$$

비회전 물리적 성분(압력, 온도 등)들의 기울기($\nabla p, \nabla T$)들은 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 기울기 보간 함수 $\mathbf{G}_i(x,y)$ 로부터 얻을 수 있다. 즉,

$$\nabla \phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{G}_i(x,y) \underline{\Phi}_i^e \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{G}_i(x,y)$ 는 아래와 같다.

$$\mathbf{G}_i(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

2.2 회전(solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x,y)$ 를 요소 내에서 유동 함수라면 $\psi^e(x,y)$ 는 벡터 포텐셜(유동함수)의 기저 함수 \underline{s}_i 및 요소의 자유도 $\underline{\Psi}_i^e$ 에 의하여 아래와 같이 보간된다.

$$\psi^e(x,y) = \sum_{i=1}^n \underline{s}_i(x,y) \underline{\Psi}_i^e \tag{13}$$

여기서

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, U_i, V_i)^T \tag{14}$$

이다. 이를 Hermite 3차 함수에 대한 자유도와 비교하면

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial y, -\partial\Psi_i/\partial x)^T \tag{15}$$

이므로, $\underline{s}_i(x,y)$ 는 \underline{g}_i 를 재배열하여 다음과 같이 둔다.

$$\underline{s}_i = (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \tag{16}$$

속도 벡터 $\underline{u}^e(x,y)$ 는 유동함수 $\psi^e(x,y)$ 에 curl을 적용하여 구하므로, 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(x,y) &= \nabla \times \psi^e(x,y) \hat{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \end{aligned} \tag{17}$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $\mathbf{S}_i(x,y)$, $i = 1, \dots, 4$ 라 하면, 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_i(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

3. 문제 정의와 무차원 방정식

비압축성 유체의 밀도는 비압축성이라는 가정에 의하여 압력에는 독립이지만, 온도 차이에 따른 밀도 변화는 존재한다. 이 밀도 변화가 작다면 밀도의 차이는 온도 변화에 따른 부력을 유발한다고 볼 수 있으며, 이를 Boussinesque 근사라 한다. 즉, 밀도 ρ 는 전체적으로 일정하지만 y 방향 운동량 방

정식의 체적력 항의 밀도 ρ 는 $-\rho\beta(T-T_0)$ 로 바뀌어진다. 여기서 β 는 체적팽창계수로 $-(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)$ 로 정의된다. 이와 같이 자연대류 방정식에서는 운동량 방정식이 부력 항에 의하여 에너지 방정식과 서로 연성되어지며, 아래는 이 문제에 대한 물리적 지배 방정식들이다[9].

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - (1/\rho)\nabla P + \nu \nabla^2 \underline{u} \\ &\quad - \underline{g}\beta(T-T_0) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\underline{u} \cdot \nabla)T + \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \tag{21}$$

여기서, \underline{u} , P , T , T_0 , ν , α , \underline{g} 들은 각각 속도 벡터, 압력, 온도, 기준 온도, 동점성 계수, 열확산(thermal diffusivity) 계수, 중력 가속도 벡터이다. 무차원 방정식을 유도하기 위하여 길이, 속도, 시간 그리고 온도에 대한 기준(reference) 값을 L_0 , V_0 , t_0 그리고 T_0 라 두면 아래와 같이 정의할 수 있다[10].

$$L_0 = H \text{ (Fig. 1 참조)} \tag{22}$$

$$V_0 = \alpha/L_0 \tag{23}$$

$$t_0 = L_0^2/\alpha \tag{24}$$

$$T_0 = (T_1 + T_2)/2 \tag{25}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 > 0 \tag{26}$$

두 개의 주요한 무차원 변수 즉, Rayleigh 수(Ra)와 Prandtl 수(Pr)는 아래와 같이 정의된다.

$$Ra = \frac{H^3 g \beta \Delta T}{\nu \alpha} \tag{27}$$

$$Pr = \nu/\alpha \tag{28}$$

무차원화된 속도 성분들을 u^* , v^* , 시간 t^* , 압력 p^* , 온도 θ 그리고 무차원 x, y 좌표값들 x^* , y^* 이라 두면, 위의 정의를 이용하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$u^* = u/V_0, v^* = v/V_0, t^* = t/t_0 \quad (29)$$

$$p^* = P/(\rho V_0^2) \quad (30)$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_2 - T_1) \quad (31)$$

$$x^* = x/L_0, y^* = y/L_0, \quad (32)$$

위의 식 (29-32)를 식 (19-21)에 대입하여 정리하고 위치자*를 없애면 다음과 같은 무차원 방정식을 얻을 수 있다. 연속 방정식은 식 (19)와 동일하고, 운동량 방정식과 에너지 방정식은 다음과 같다[11].

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \nabla p + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u} - \text{Pr} Ra \theta \hat{g} \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = -\underline{u} \cdot \nabla \theta + \nabla^2 \theta \quad (34)$$

Fig. 1에는 영역과 경계 조건들을 보여준다. 현재의 경계 조건은 Hermite 3차 함수를 사용할 경우의 것이고, Hermite 4차 함수를 사용한다면 아래와 같이 물리적으로 영향은 미치지 않으나 수치적으로 필요한 별도의 조건들을 추가하여야 한다.

$$u_{,x} = u_{,y} = v_{,y} = \theta_{,y} = 0, \quad x = 0, 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (35)$$

$$u_{,x} = v_{,x} = v_{,y} = 0, \quad y = 0, 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (36)$$

4. 자연대류 방정식의 유한요소 정식화

식 (33)은 회전함수 공간으로, 식 (34)는 비회전 함수 공간으로 투사한 후, 회전함수 중에서 가중 함수 v 를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 q 를 취하여, 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} \right) &= -(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) - \text{Pr} (\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u}) \\ &+ \text{Pr} \oint_{\partial \Omega} \underline{v} \hat{n} \cdot \nabla \underline{u} d\Gamma - \text{Pr} Ra (\underline{v}, \hat{g}, \theta) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\left(q, \frac{\partial}{\partial t} \theta \right) = -(q, \underline{u} \cdot \nabla \theta) - (\nabla q, \nabla \theta) \quad (38)$$

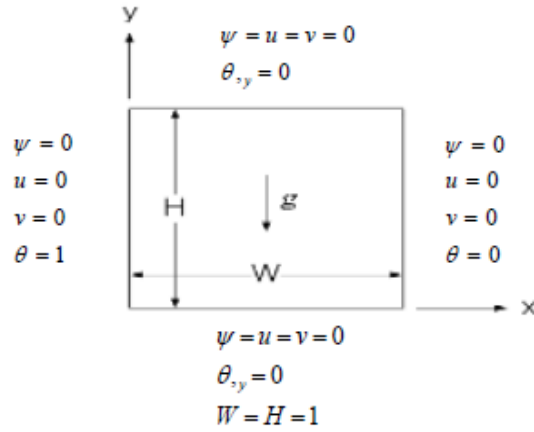


Fig. 1 Boundary conditions for the natural convection flow in a cavity

압력 항은 회전 성분이 아닌 관계로 식 (37)에는 나타나지 않는다. 영역 Ω 를 겹치지 않는 소 영역들 혹은 요소들로 분할하면, 식 (37, 38)은 각각의 요소에 적용되며, 정의된 요소의 기저함수(basis function)들을 이용하여 적절한 요소 연립방정식을 구성할 수 있다.

현재의 문제는 경계 상에 ψ, u, v 의 값들이 주어졌으므로 식 (37)의 경계 적분은 수행할 필요가 없다.

요소 내에서 속도 벡터 \underline{u} 와 온도 θ 는 근사적으로 다음과 같이 된다.

$$\underline{u} \approx \underline{u}^h = \sum_i \underline{S}_i U_i \quad (39)$$

$$\theta \approx \theta^h = \sum_i q_i \Theta_i \quad (40)$$

여기서 \underline{S}_i 는 절점 i 에 대한 회전 보간 함수, q_i 는 절점 i 에 대한 온도(포텐셜) 보간 함수, \underline{S}_i 와 Θ_i 는 요소

절점 i 에 대한 속도 및 온도 자유도이며, Hermite 3차 유동함수의 경우에는 다음과 같다.

$$\underline{S}_i = [\psi_i, u_i, v_i]^T \quad (41)$$

$$\Theta_i = [\theta_i, \theta_{i,x}, \theta_{i,y}]^T \quad (42)$$

Hermite 4차 유동함수의 경우, 요소 절점 i 에 대한 속도의 자유도는

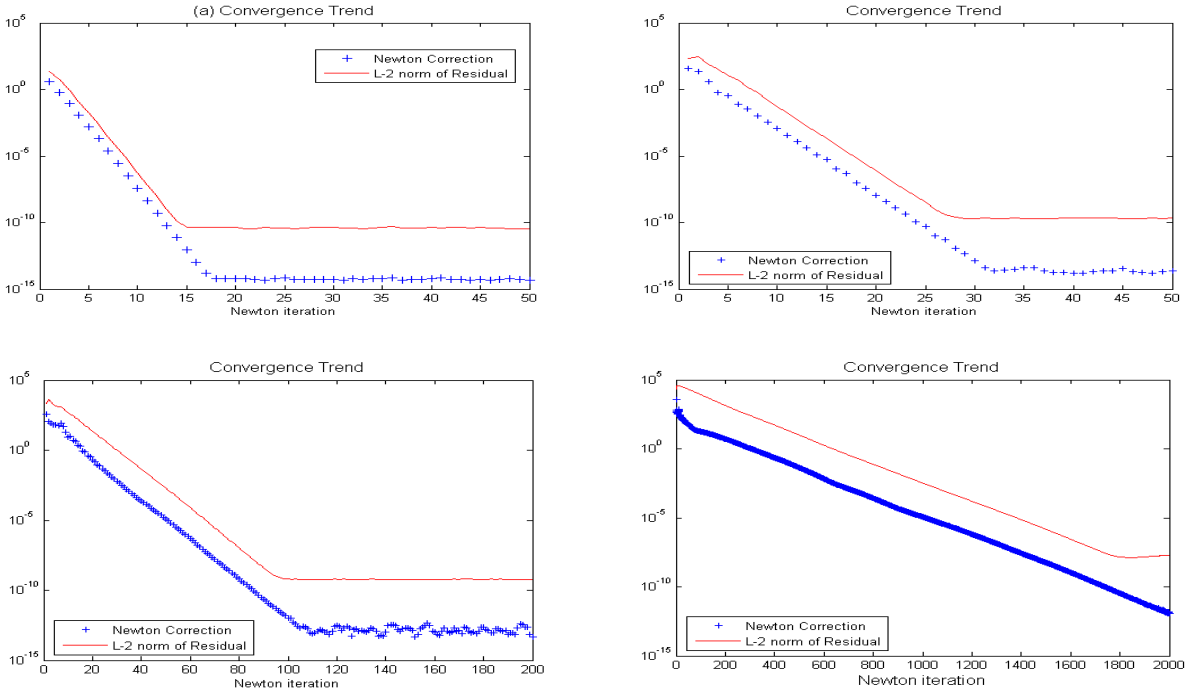


Fig. 2 Convergence trend by S3412: (a) Ra=10³, (b) Ra=10⁴, (c) Ra=10⁵, (d) Ra=10⁶

$$\underline{\Psi}_i = [\psi_i, u_i, v_i, \psi_{i,xx}, \psi_{i,xy}, \psi_{i,yy}]^T \quad (43)$$

이며, 온도의 자유도는 식 (42)와 같이 둔다. 즉, 온도는 비회전 성분으로 대체적으로 완만한 변화를 보이므로 계산상의 효율성을 위하여 속도의 보간 차수보다 한 단계 낮게 두기로 한다. 여기서, 속도와 유동 함수 간에 아래의 관계가 성립한다.

$$u_{i,x} = \psi_{i,xy}, \quad u_{i,y} = \psi_{i,yy}, \quad v_{i,x} = -\psi_{i,xx}, \quad v_{i,y} = -\psi_{i,xy} \quad (44)$$

회전 보간 함수 $\mathbf{S}_i(x,y)$ 와 비회전 보간 함수 $\mathbf{G}_i(x,y)$ 는 전술한 식 (18)과 식 (12)를 사용하며, 식 (37, 38)은 비선형 방정식인 관계로 Newton 반복 풀이법을 적용하기로 한다. 따라서 요소의 선형 대수 방정식을

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \underline{\Psi} \\ \Delta \underline{\Theta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

으로 하면, 위 식의 각 항들은 아래와 같다.

$$A_{11}(i,j) = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i \left(u \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) + \text{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (46)$$

$$A_{12}(i,j) = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \begin{pmatrix} \hat{g}_x \\ \hat{g}_y \end{pmatrix} g_j d\Omega_e \quad (47)$$

$$A_{22}(i,j) = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_j d\Omega_e \quad (48)$$

$$\underline{R}_1(i) = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \left(u \frac{\partial}{\partial x} (u) + v \frac{\partial}{\partial y} (u) \right) + \text{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial y} v \right) + \text{Pr} Ra \mathbf{S}_i^T \begin{pmatrix} \hat{g}_x \\ \hat{g}_y \end{pmatrix} \theta d\Omega_e \quad (49)$$

$$\underline{R}_2(i) = \int_{\Omega_e} g_i^T \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \mathbf{G}_i^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} / \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (50)$$

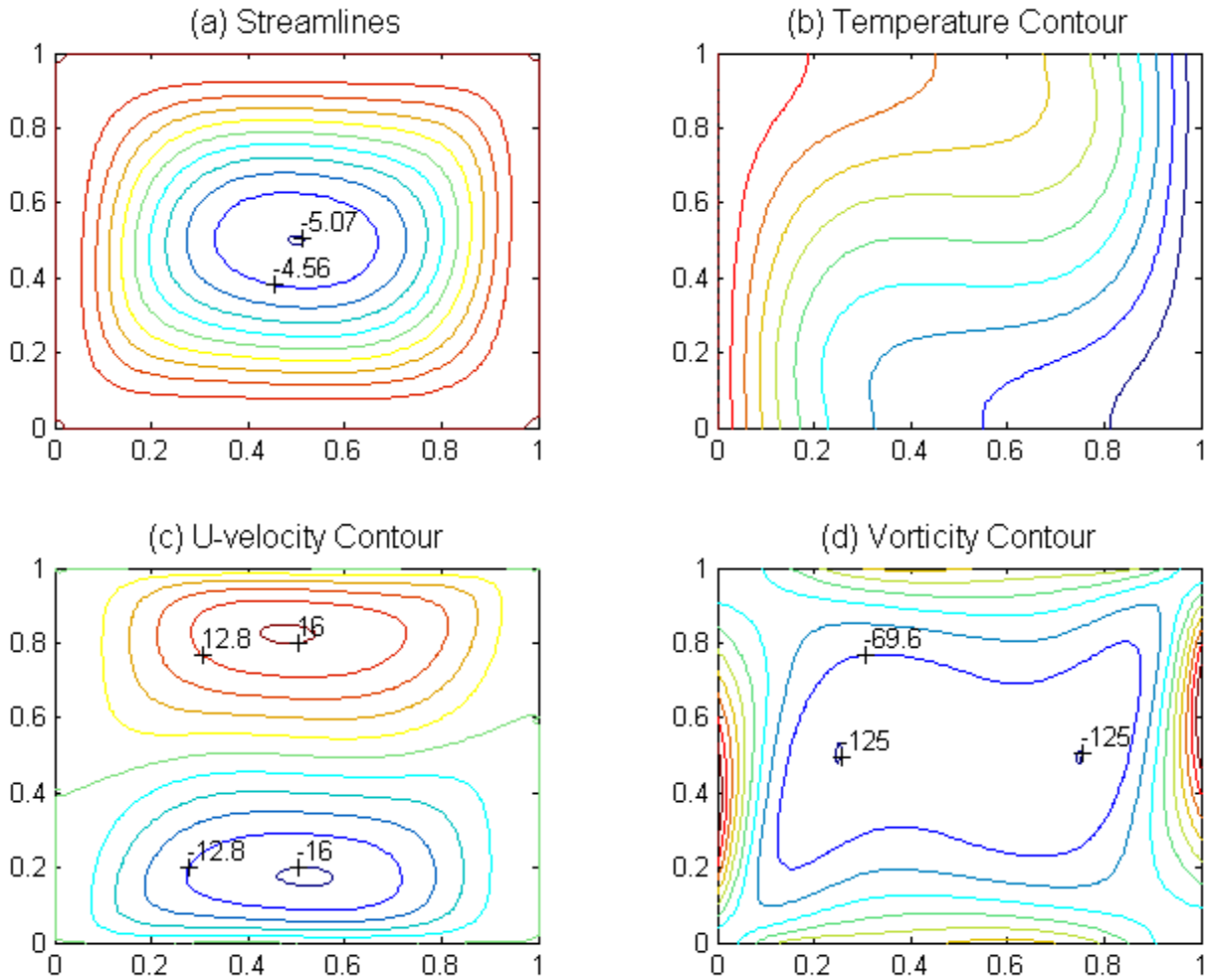


Fig. 3 Contour plots at $Ra = 10^4$ by S3412 with contour levels of (a) $-5.071, (0.5071)0$, (b) $0(0.1)1$, (c) $-16.00(3.200)16.00$, (d) $-124.8(55.17)426.9$

5. 수치 계산 결과 및 고찰

De Vahl Davis[6]의 논문을 일반적으로 benchmark 해로 간주하는 관계로 본 연구도 Rayleigh 수를 $10^3 \sim 10^6$ 으로 하고, Prandtl 수는 0.71로 하여 De Vahl Davis가 제시한 결과들과 비교하여 보기로 한다. Hermite 3차 유동 함수법은 절점 당 6개의 자유도를 가지고 또 Hermite 4차 유동 함수법은 절점 당 12개의 자유도를 가지므로, 계산량의 감소를 위하여 다음과 같이 한다. 첫 번째는 Hermite 4차 유동함수를 이용할 경우, 온도에 대한 보간은 Hermite 3차 함수를 이용하여 절점 당 9개(속도장 6개, 온도장 3개)의 자유도를 취하도록 한다. 두 번

째는 속도 방정식과 온도 방정식을 분리하여 풀기로 한다. 따라서 식 (45)를 아래와 같이 분리한다.

$$A_{22}\Delta\Theta = -\underline{R}_2 \quad (51)$$

$$A_{11}\Delta\Psi = -\underline{R}_1 - A_{12}\Delta\Theta \quad (52)$$

이 연구에서 사용된 모든 계산은 MatLab v.7.0.1에서 제공되는 ILU 예조건화에 의한 GMRES를 이용하여 풀이하였고, 사용된 컴퓨터의 사양은 2 Mbyte RAM과 3.2 GHz의 속도를 가진 펜티엄급 PC이다.

Newton 반복법의 직접 적용은 Rayleigh 수가 커질수록 해

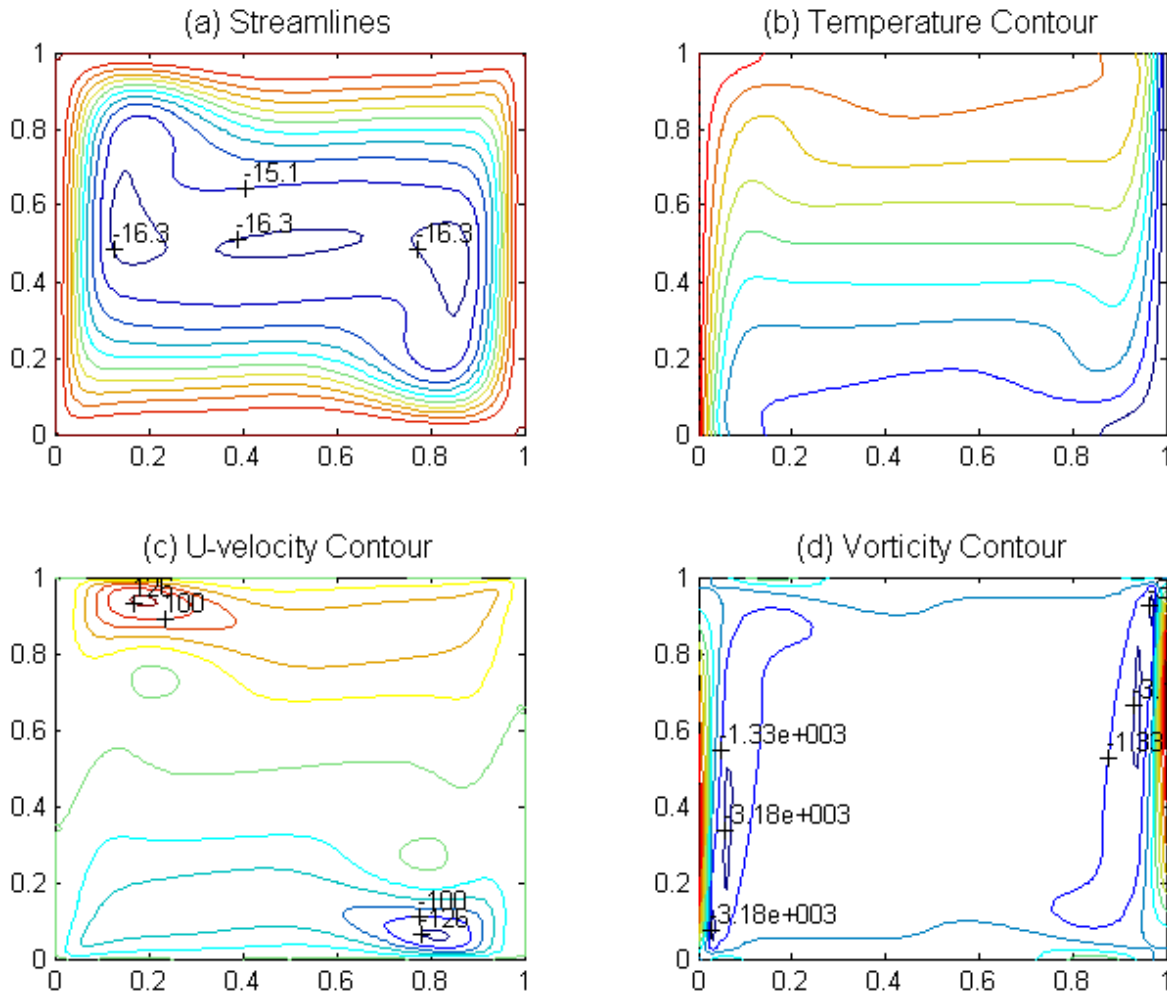


Fig. 4 Contour plots at $Ra = 10^6$ by S3412 with contour levels of (a) -16.34, -15.07(1.675)0, (b) 0(0.1)1, (c) -125.5(25.10)125.5, (d) -3178(1847.1)15293

의 수렴성에 문제를 야기하므로 다음과 같이 하향 이완 (relaxation) 계수 γ 를 도입하기로 하였다.

즉, $Q = [\psi, \theta]^T$ 라 하면, 아래와 같은 해의 개선 과정을 수행하게 된다.

$$Q' = Q^n + \Delta Q \tag{53}$$

$$Q^{n+1} = (1-\gamma)Q' + \gamma Q^n \tag{54}$$

이 방법은 결국 Reddy 등[12, p.166]에서 설명하는 Picard 방법을 Newton 반복법에 적용한 것이다. 그 이유는 극심한 비선형성이 존재한다면, 우변에는 잔여(residual)를 두어 풀이

해야 적절한 수렴성을 얻을 수 있으리라고 생각하기 때문이다. 그러나 별도의 조사에서는 Picard 방법의 직접 적용도 이 문제에 대하여 적절히 수렴하는 것으로 파악되었다.

S3412와 S4424에 의한 계산에는 32×32 개의 균일 요소를 사용하였다. $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ 그리고 10^6 에 대한 하향 이완 계수는 S3412의 경우, 0.9, 0.7, 0.3, 0.02를 적용하였고, S4424의 경우, 1.0, 0.7, 0.3, 0.02의 값들을 적용하였다. 최적의 γ 값은 알 수 없지만, 현재의 계산에서는 대체로 잘 수렴하는 것으로 보인다. 현재 계산에서 일회의 반복에 약 40초(S3412의 경우)와 4분(S4424의 경우)의 cpu 시간이 소요되는 것으로 나타났다. 이 점이 유동 계산에서 유한 요소법의 사용을 저해하는 한 요인이 되고 있다. 각 경우에 대하여 수렴 특성을 보

기위하여 $|\Delta Q|_{\max}$ 의 값과 잔여 벡터의 $\|R\|_2$ 의 값을 매 Newton 반복에 대하여, S3412의 경우, Fig. 2에 도시하였다. $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ 그리고 10^6 의 경우, 잔여값이 포화값으로 수렴하는 반복 회수는 각각 15, 30, 100 그리고 1800으로 나타났다. S4424의 경우, 현재의 논문에서는 나타나지 않았으나, 비슷한 반복 횟수를 보인다. 대체적으로 각각의 Ra 수에 대하여, 최대 수정 값과 잔여 값은 포화 값으로 단조 수렴함을 잘 보여준다.

Table 1에는 $|\psi|_{\max}, |\psi|_{mid}, U_{\max}, V_{\max}, Nu_0, Nu_{1/2}$ 그리고 \overline{Nu} 를 benchmark 해들과의 비교를 보여준다. 이 표에 나타난 변수들에 대한 설명은 다음과 같다.

- $|\psi|_{mid}$: 중앙 점($(x,y)=(0.5,0.5)$)에서의 유동 함수값
- U_{\max} : 중심 수직축($x=0.5$)에서 수평 방향 속도의 최대값으로 괄호 안의 값은 y 좌표 값
- V_{\max} : 중심 수평축($y=0.5$)에서 수직 방향 속도의 최대값으로 괄호 안의 값은 x 좌표값

Nu_0 : 좌측 벽면($x=0$)에서의 Nusselt 수
 $Nu_{1/2}$: 중심 수직면($x=0.5$)에서의 Nusselt 수
 \overline{Nu} : 공동 전체의 평균 Nusselt 수
 공동내의 임의 점에서 수평 방향으로의 Nusselt 수 Nu_x 는 다음과 같이 정의된다.

$$Nu_x = \int_0^1 (uT - \partial T / \partial x) dy \tag{55}$$

여기서 경계에서는 $u = 0$ 이다. 따라서 평균 Nusselt 수 \overline{Nu} 는 다음과 같다.

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_x dx \tag{56}$$

따라서, 식 (55)의 계산에는 속도는 회전 보간 함수, 그리

Table 1 Summary and comparison of some results

Ra		$\psi_{\max}(x,y)$	$ \psi _{mid}$	$U_{\max}(y)$	$V_{\max}(x)$	Nu_0	$Nu_{1/2}$	\overline{Nu}
10^3	Ref.[6]	1.174 (0.5, 0.5)	1.174	3.649 (0.813)	3.697 (0.178)	1.117	1.118	1.118
	S4424	1.1746 (0.5, 0.5)	1.1746	3.6494 (0.8125)	3.6974 (0.1781)	1.1176	1.1178	1.1178
	S3412	1.1762 (0.5, 0.5)	1.1762	3.6543 (0.8141)	3.7027 (0.1781)	1.1181	1.1181	1.1181
10^4	Ref.[6]	5.071 (0.5, 0.5)	5.071	16.178 (0.823)	19.617 (0.119)	2.238	2.243	2.243
	S4424	5.0737 (0.5, 0.5)	5.0737	16.1833 (0.8234)	19.6282 (0.1187)	2.2442	2.2448	2.2448
	S3412	5.0766 (0.5, 0.5)	5.0766	16.1975 (0.8234)	19.6550 (0.1187)	2.2453	2.2459	2.2459
10^5	Ref.[6]	9.612 (0.285, 0.601)	9.111	34.73 (0.855)	68.59 (0.066)	4.509	4.519	4.519
	S4424	9.6156 (0.28, 0.60)	9.1155	34.7407 (0.8547)	68.6348 (0.0656)	4.5156	4.5216	4.5216
	S3412	9.6197 (0.28, 0.60)	9.1192	34.7696 (0.8547)	68.6235 (0.0641)	4.5178	4.5240	4.5239
10^6	Ref.[6]	16.750 (0.151, 0.547)	16.32	64.63 (0.850)	219.36 (0.0379)	8.817	8.799	8.800
	S4424	16.8106 (0.15, 0.55)	16.3863	64.8443 (0.8500)	220.5527 (0.0375)	8.8008	8.8252	8.8245
	S3412	16.8177 (0.15, 0.55)	16.3912	64.9329 (0.8500)	218.9715 (0.0375)	8.7967	8.8241	8.8232

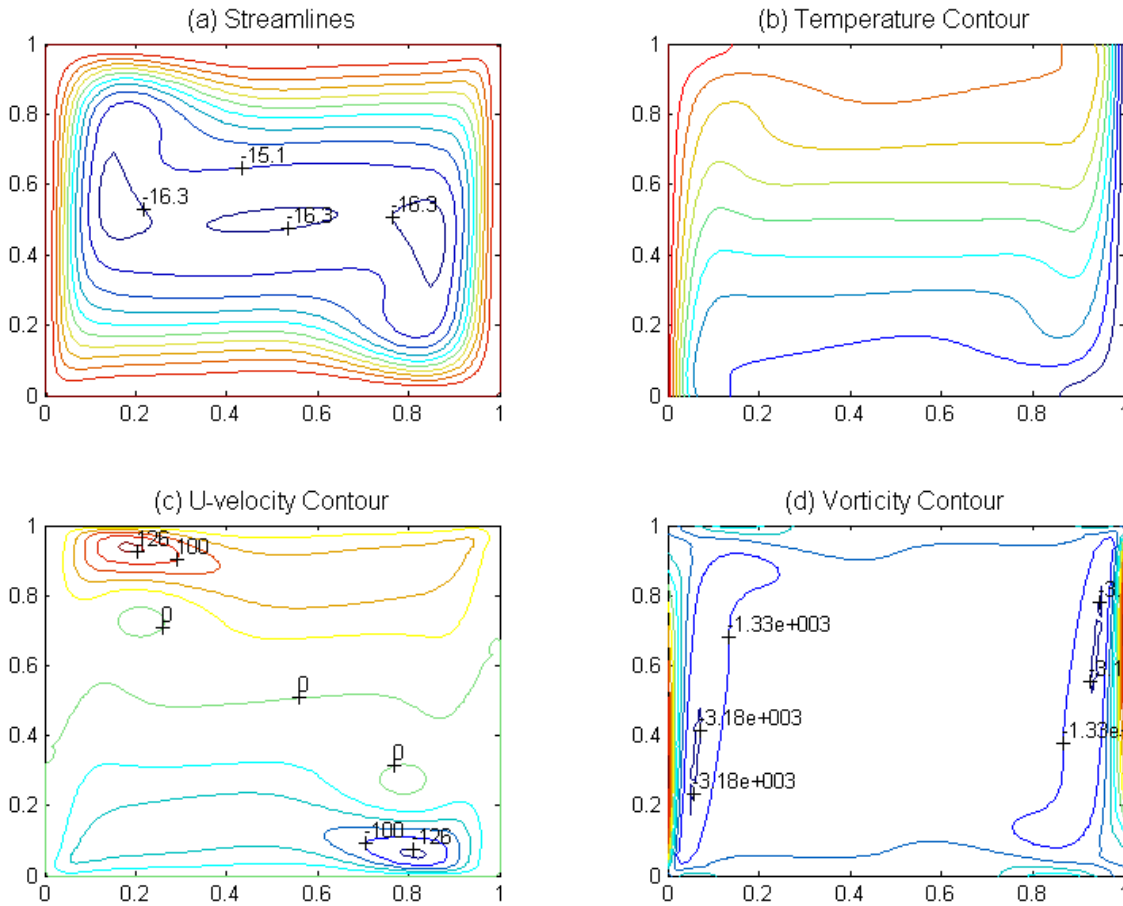


Fig. 5 Contour plots at $Ra = 10^6$ by S4424 with contour levels of (a) -16.34, -15.07(1.675)0, (b) 0(0.1)1, (c) -125.5(25.10)125.5, (d) - 3178(1847.1)15293

고 온도는 비회전 보간 함수를 이용하여 y -방향으로 각 요소의 좌측 경계면을 적분하여 그 값을 합친다. Nu_0 은 맨 좌측 요소 열에 대하여 수행한 값이고, $Nu_{1/2}$ 은 중간 열에 속한 요소들에 대하여 수행한 값이다. \overline{Nu} 는 각 열의 좌측 경계면과 맨 우측 요소 열의 우측 경계면에 대한 적분을 수행하여 합친 후, (x -방향의 요소 수 + 1)로 나눈 값으로 하였다.

Table 1의 값들을 살펴보면, S4424의 값들이 S3412의 값들에 비하여 $Ra=10^6$ 의 Nu_0 와 $Nu_{1/2}$ 경우를 제외하고는 참고 문헌[6]의 값에 약간이라도 더 근접하고 있음을 알 수 있다. 사전 조사에서는 16 x 16 요소에 의한 S4424의 해를 살펴본 있는데, 이 경우에도 32 x 32 요소에 의한 S3412의 해보다 대체로 참고문헌[6]의 값에 약간이라도 더 근접하고 있었다. 속도장에 대한 자유도 수는 S3412(32 x 32 요소)의 경우는 $33 \times 33 \times 3 = 3267$ 이며, S4424(16 x 16 요소)의 경우는 $17 \times 17 \times 6$

$=1734$ 임을 고려하면, Hermite 4차 유동함수법(S4424)이 실제로는 더 효율적인 것으로 보인다.

Fig. 3과 4에는 S3412에 의한 유선, 온도, 수평 방향 속도 성분 및 와도에 대한 등고선도를 $Ra=10^4$ 과 10^6 에 대하여 각각 나타내었고, Fig. 5에는 S4424에 의한 유동 변수들에 대한 등고선도를 $Ra=10^6$ 에 대하여 나타내었다. S3412와 S4424에 의한 현재의 예측은 De Vahl Davis[6]가 제시한 결과들과 대체로 잘 일치하고 있는 것으로 보인다. $Ra=10^6$ 의 경우, 유선에 대한 등고선 값은 [-16.34, -15.07(1.675)0]으로 하였다.

4. 결 론

이 연구는 Holdeman[3]이 제안한 Hermite 유동 함수법의 응용을 살펴보기 위하여, 단순 유동 계산 뿐 아니라 비 등온(non-isothermal) 유동인 정사각형 내부의 자연대류 유동에 대

한 계산을 수행하여 보았다. 수행 결과, 적절한 수렴 특성과 유동 변수들에 대한 만족스러운 해상도를 얻을 수 있었으며, 잘 알려진 benchmark 해의 예측과 유사한 해들을 제시할 수 있었다.

Hermite 유동함수로부터 유도된 속도 기저 함수의 특성상, 타 방법에 비해 많은 수의 자유도를 구성하게 되어 계산량이 타 방법들에 비하여 증가하게 되는데, 이의 해결을 위해 본 연구에서는 속도 방정식과 온도 방정식으로 분리한 풀이를 시도하였고 또 해의 개선 과정에서 하향 이완 계수를 사용하여 적절한 수렴성을 얻을 수 있었다. 그리고 Hermite 3차 유동 함수법 외에도 4차 유동 함수법을 적용하여 살펴보았으며, 고차 함수의 적용도 긍정적으로 나타났다.

더욱이 현재 제안한 알고리즘은 대류항에 대한 풍상 차분이나 안정화 기법을 사용하지 않았으며, 이 점은 새롭게 평가되어야 할 것으로 보인다.

부 록 : Hermite 4차 회전 보간 함수(S4424)

Gopalacharyulu[13]는 판(plate) 요소에 대하여 Hermite 4차 함수를 제안하였으며, 이를 이용하여 우리는 유동 함수(벡터 포텐셜)의 기저 함수 $\underline{s}_i(q, r)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$\underline{s}_i(q, r) = (s_{1i} \ s_{2i} \ s_{3i} \ s_{4i} \ s_{5i} \ s_{6i})^T$ 라 하면,

$$\begin{aligned} s_{1i} &= (1/64)(1+qq_i)^2(1+rr_i)^2 \\ &\times ((1+qq_i)(2-rr_i)(8-9qq_i+3r^2) \\ &+ (1+rr_i)(2-qq_i)(8-9rr_i+3r^2) \\ &- 4(2-rr_i)(2-qq_i)) \end{aligned} \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned} s_{2i} &= (-1/64)r_i(1+qq_i)^2(1+rr_i)^3 \\ &\times (2-qq_i)(1-rr_i)(5-3rr_i) \end{aligned} \quad (A-2)$$

$$\begin{aligned} s_{3i} &= (-1/64)q_i(1+qq_i)^3(1+rr_i)^2 \\ &\times (2-rr_i)(1-qq_i)(5-3qq_i) \end{aligned} \quad (A-3)$$

$$\begin{aligned} s_{4i} &= (1/64)(1+qq_i)^3(1+rr_i)^2(1-qq_i)^2(2-rr_i) \end{aligned} \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned} s_{5i} &= (1/16)(1+qq_i)^2(1+rr_i)^2(1-qq_i)(1-rr_i) \end{aligned} \quad (A-5)$$

$$\begin{aligned} s_{6i} &= (1/64)(1+qq_i)^2(1+rr_i)^3(1-rr_i)^2(2-qq_i) \end{aligned} \quad (A-6)$$

여기서 q_i 및 r_i 는 절점 i 에서의 좌표 값으로 ± 1 이며, 이 함수와 관련된 6개의 자유도는 $\psi, u, v, \psi_{,xx}, \psi_{,xy}, \psi_{,yy}$ 이다. 이 기저 함수, $\underline{s}_i(q, r)$ 에 Curl을 취하면 다음의 회전 보간 함수, S4424를 얻는다.

$$\mathcal{S}_i(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{s}_i}{\partial y} & -\frac{\partial \underline{s}_i}{\partial x} \end{pmatrix} = (\underline{S}_{1i} \ \underline{S}_{2i}) \quad (A-7)$$

라 두면,

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1i}(1) &= (3/64)r_i(1+qq_i)^2(1-r^2) \\ &\times ((1+qq_i)(8-9qq_i+3q^2) + (2-qq_i)(1-5r^2)) \end{aligned} \quad (A-8)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1i}(2) &= (-1/64)(1+qq_i)^2(1+rr_i)^2 \\ &\times (2-qq_i)(7-26rr_i+15r^2) \end{aligned} \quad (A-9)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1i}(3) &= (3/64)q_i r_i (1+qq_i)^3(1-r^2) \\ &\times (1-qq_i)(5-3qq_i) \end{aligned} \quad (A-10)$$

$$\underline{S}_{1i}(4) = (3/64)r_i(1+qq_i)^3(1-r^2)(1-qq_i)^2 \quad (A-11)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1i}(5) &= (1/16)q_i(1+qq_i)^2(1+rr_i) \\ &\times (1-qq_i)(1-3rr_i) \end{aligned} \quad (A-12)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1i}(6) &= (1/64)r_i(1+qq_i)^2(1+rr_i)^2 \\ &\times (1-rr_i)(1-5rr_i)(2-qq_i) \end{aligned} \quad (A-13)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(1) &= (-3/64)q_i(1+rr_i)^2(1-q^2) \\ &\times ((1+rr_i)(8-9rr_i+3r^2) + (2-rr_i)(1-5q^2)) \end{aligned} \quad (A-14)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(2) &= (3/64)q_i r_i (1+rr_i)^2(1+q^2) \\ &\times (1-rr_i)(5-3rr_i) \end{aligned} \quad (A-15)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(3) &= (-1/64)(1+rr_i)^2(1+qq_i)^2 \\ &\times (2-rr_i)(7-26qq_i+15q^2) \end{aligned} \quad (A-16)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(4) &= (-1/64)q_i(1+rr_i)^2(1+qq_i)^2 \\ &\times (1-qq_i)(1-5qq_i)(2-rr_i) \end{aligned} \quad (A-17)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(5) &= (-1/16)r_i(1+rr_i)^2(1+qq_i) \\ &\times (1-rr_i)(1-3qq_i) \end{aligned} \quad (A-18)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{2i}(6) &= (-3/64)q_i(1+rr_i)^3(1-q^2)(1-rr_i)^2 \end{aligned} \quad (A-19)$$

참고문헌

- [1] 1981, Griffiths, D.F., "An Approximately Divergence-free 9-Node Velocity Element (with variationa) for Incompressible flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.1, pp.347-364.
- [2] 1977, Pozrikidis, C., *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press.
- [3] 2002, Holdeman, J.T., "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," *USNCTAM14 Conference*, Blacksburg, VA.
- [4] 2007, 김진환, "Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 계산," *한국전산유체공학회지*, 제12권, 제1호, pp.35-42.
- [5] 2008, 김진환, "이차원 비압축성 유동 계산을 위한 Hermite 겹 3차 유동함수법," *한국전산유체공학회지*, 제13권, 제4호, pp.13-23.
- [6] 1983, De Vahl Davis, G., "Natural Convection of Air in A Square Cavity: A Bench mark Numerical Solution," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.3, pp.249-264.
- [7] 2002, Christon, M.A., Gresho, P.M. and Sutton, S.B., "Computational Predictability of Time-dependent Natural Convection Flows in Enclosures(including a benchmark solution)," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.40, pp.953-980.
- [8] 1982, Lapidus, L. and Pinder, G.F., *Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering*, John Wiley & Sons, Inc.
- [9] 1984, Bejan, A., *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc.
- [10] 1991, Le Quere, P., "Accurate Solutions to the Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number," *Computers & Fluids*, Vol.20, pp.29-41.
- [11] 2002, Shu, C. and Wee, K.H.A., "Numerical Simulation of Natural Convection in A Square Cavity by SIMPLE-generalized Differential Quadrature Method," *Computers & Fluids*, Vol.31, pp.209-226.
- [12] 1994, Reddy, J.N. and Gartling, D.K., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Inc.
- [13] 1973, Gopalacharyulu, S., "A Higher Order Conforming Rectangular Plate Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.6, pp.305-308.