

## 3차원 Floquet 안정성 분석을 위한 가상 경계법의 적용

윤 동 혁,<sup>1</sup> 양 경 수<sup>\*2</sup>

### APPLICATION OF AN IMMERSSED BOUNDARY METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL FLOQUET STABILITY ANALYSIS

D.-H. Yoon<sup>1</sup> and K.-S. Yang<sup>\*2</sup>

*An immersed boundary method(IBM, Kim et al.(2001)) for simulating flows over complex geometries is applied to computation of three-dimensional Floquet stability of a periodic wake. Floquet stability analysis is employed to extract different modes of three-dimensional instability. To verify the present method, a fully-resolved Floquet stability calculation for flow past a circular cylinder is considered. There are two different instability modes with long(mode A) and short (mode B) spanwise wavelengths for the periodic wake of a circular cylinder. The critical Reynolds number and the most unstable spanwise wavelengths of modes A and B are computed using the present method, and compared with other authors' results currently available.*

**Key Words :** 가상경계법(Immersed Boundary Method), 안정성 Floquet (Floquet Stability), 와흘림(Vortex Shedding)

#### 1. 서 론

유동이 실린더형 장애물을 지나는 경우, 실린더 위쪽과 아래쪽에서 주기적인 와흘림 현상이 발생한다. 이러한 2차원 와흘림 현상에 의해 실린더가 받는 항력과 와흘림에 의한 주기적인 하중의 진동수 등은 공학적인 설계에서 매우 중요하기 때문에 지난 수 십년 동안 많은 연구[1-3]가 진행되어져 왔다. 뿐만 아니라 유동의 특성을 결정하는 Reynolds 수가 증가하게 되면, 실린더 후류에서 전단층의 유동 불안정성에 의한 3차원 유동 천이가 발생하는데, 이때 항력계수, 양력계수, Strouhal수 등이 급변하기 때문에 3차원으로서의 유동 천이와 와류 구조에 대한 연구도 많은 연구자들의 관심을 받고 있다[4-14].

원형 실린더를 지나는 유동은 Hopf bifurcation에 의해 정상 상태에서 주기적인 와흘림이 발생하는 유동으로 천이된다[4]. 이러한 천이가 발생하는 임계 Re수( $Re_c$ )는 실험 및 수치적인

안정성 계산에 의해 약 46으로 알려져 있으며[4], 이를 primary instability라고 한다.  $Re_c$ 이상의 Re에서 유동은 실린더 위쪽과 아래쪽에서 2차원의 주기적인 와흘림을 이루게 된다. 이때 Re수를 더 증가시키게 되면, 유동은 3차원 유동으로의 천이 과정을 거치게 되는데,  $Re_c$ 에서 발생하는 이러한 현상을 secondary instability라고 한다. 원형 실린더를 지나는 유동에서 후류에서 발생하는 와흘림의 3차원 천이 현상은 Williamson[5]에 의해 처음 물리적으로 설명되어졌다. 그는 실험적 방법을 통해 mode A와 mode B로 불리는 2종류의 유동 불안정성 모드를 관측하였다.  $Re \approx 194$ 에서 발생하는 mode A 유동 불안정성은 횡방향으로 실린더 직경의 3배에서 4배의 파장을 가지며, 횡방향으로 생성되는 와류의 변이로 특징지어진다. 반면  $Re \approx 260$ 에서 발생하는 mode B 유동 불안정성은 횡방향으로 실린더 직경의 짧은 파장을 가지며, 유동방향으로 형성되는 와류와 관련되어 진다[6].

횡방향으로 주기적인 패턴을 가지는 2개의 3차원 유동 불안정 모드는 원형 실린더를 지나는 유동에서 많은 실험적 연구를 통해 확인되어 졌다[5-9]. mode A와 mode B의 유동 불안정성에서 Re에 따른 횡방향의 파장의 변화, 3차원 유동방향 와류의 강도 등에 대하여 실험적 연구[9]가 수행되었으며, 최근에는 직접수치모사(DNS)를 통해 이러한 유동 불안정성과

접수일: 2009년 8월 26일, 수정일: 2009년 11월 20일,

게재확정일: 2009년 11월 27일.

1 학생회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학과

\* Corresponding author, E-mail: ksyang@inha.ac.kr

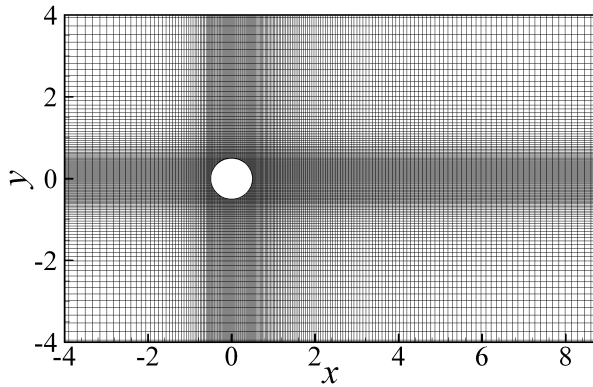


Fig. 1 Grid system

3차원 와류 구조가 관측된 바 있다[10-14].

실린더를 지나는 유동에서 2차원 주기적인 와흐림을 이루는 유동이 3차원 유동으로 천이가 발생하는 2차 불안정성은 실린더 표면의 거칠기, 입구 유동의 난류, 실린더 가로막음비, 실린더 끝부분의 효과 등에 의해 영향을 받기 때문에 실험적으로 측정하기가 매우 어렵다[4]. 기존 실험 결과[6]에 의하면 2차 불안정성이 발생하는 임계  $Re(Rec2)$ 는  $140 \leq Rec2 \leq 194$ 의 범위에서 관측된 바 있으나, 직접 수치모사를 통한 3차원 수치해석 결과[13,14]에서는 약 200의 결과를 얻은 바 있다. 그 후 원형 실린더를 지나는 유동에서 3차원으로 천이하는 유동 현상에 대한 이해를 위해 선형 안정성 분석을 통한 연구가 Barkley and Henderson[4]에 의해 수행되었는데, 그들은 수치해석 방법을 통해 2차원의 주기적인 기본유동(base flow)을 계산하고, Floquet 안정성 이론을 이용하여 선형화된 교란(perturbation) 방정식의 고유값(eigenvalue)을 계산함으로써 3차원으로 천이하는 mode A의 임계  $Re$ 가  $188.5 \pm 1$  이고 임계 횡방향 파장이  $3.96 \pm 0.02$ 의 결과를 얻었다. 뿐만 아니라 높은  $Re$ 에서 발생하며 짧은 파장을 가지는 mode B의 유동 불안정성을 관측하였으며, 임계  $Re$ 와 임계 횡방향 파장이 각각  $259 \pm 2$ ,  $0.822 \pm 0.007$ 이 되는 결과를 얻은 바 있다.

주기적인 2차원 기본 유동에서 3차원으로 천이되는 Floquet 불안정성에 대한 연구 방법은 대부분 선형화된 교란 방정식의 고유값을 계산하는 방법으로 이루어져 왔다. 그러나 최근 Robichaux 등[15]은 선형화된 교란 방정식에서 운동에너지의 시간에 따른 거동을 통해 Floquet 불안정성에 대한 새로운 해석 방법을 제시하고, 정방형 실린더를 지나는 유동에 적용하였으며, 그 후 Blackburn and Lopez[16]는 선형화된 교란 방정식의 고유값을 통해 계산된 Floquet multiplier의 값과 운동에너지의 시간에 따른 거동으로 얻은 값이 동일함을 보인 바 있다.

본 연구에서는 주기적인 2차원 유동에서 3차원으로 천이하

는 Floquet 불안정성을 해석하는 방법으로 복잡한 형상을 직교좌표계에서 손쉽게 구현 가능한 가상경계법[17]을 Floquet 안정성 해석에 도입하고 그 타당성을 검토하고자 한다. 가상경계법을 Floquet 불안정성 분석에 적용하게 되면, 복잡한 형상의 장애물을 지나는 비정상 2차원 유동에서 3차원 유동 천이의 3차원적 구조와 횡방향으로의 파장, 임계  $Re$ 를 손쉽게 파악할 수 있게 될 것이다. 검증 방법으로 Floquet 안정성 분석에 대해 많은 연구가 진행되어온 원형 실린더를 지나는 유동에 대해 가상경계법을 적용하고 임계  $Re$ , 유동 불안정성의 횡방향 파장, 3차원 와류 구조에 대해 고찰하였다.

## 2. 기본 유동(Base Flow)

### 2.1 지배방정식과 수치해석 기법

가상 경계법[17]이 적용된 비압축성 3차원 유동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$ 는 속도벡터,  $p$ 는 압력,  $q$ 는 질량 원천 흡입,  $\mathbf{f}$ 는 운동량 부가를 각각 나타낸다.

위 방정식에서 2차원( $w=0$ ,  $\partial/\partial z=0$ ) 기본 유동의 계산을 위해 Fractional step 기법[18]이 적용되었다. 각 방정식은 유한체적법(Finite Volume Method)으로 차분되었고, 비균일 엇갈린 격자계(non-uniform staggered grid)를 사용하였다. 시간 차분은 운동량 방정식에서 대류항에 대하여 3차 정확도의 Runge-Kutta 방법으로 explicit하게 적분하였고, 점성항은 Crank-Nicolson 방법으로 implicit하게 적분이 수행되었다.

경계조건은 입구와 출구에서 각각 Dirichlet 조건과 대류경계조건이 사용되었으며, 계산영역 윗면과 아랫면에서 slip조건을 사용하였다. 물체 표면에서는 no-slip조건을 적용하였다. 계산 영역은 유동방향, 수직방향으로  $-33.5h \leq x \leq 36.5h$ ,  $-50h \leq y \leq 50h$ 를 사용하였다. 사용된 격자수는 격자 세분화 연구를 통해 결정하였으며,  $x, y$ 방향으로  $480 \times 352$ 의 격자계(Fig. 1)를 사용하였다.

### 2.2 2차원 기본유동

2차원 주기적인 유동에서 3차원 유동으로의 천이현상은 Floquet 안정성 분석을 통해 이루어질 수 있으며, 이를 위해 2차원의 주기적인 기본 유동 계산이 선행되어야 한다. 본 연구에서는 원형 실린더를 지나는 유동에서  $Re \leq 300$ 의 범위에서 2차원 수치모사를 수행하여 주기적인 기본 유동을 계산하였다. Fig. 2에서  $Re$ 에 따른 평균 항력계수( $\overline{C_D}$ )와 양력계수  $\overline{C_L}$

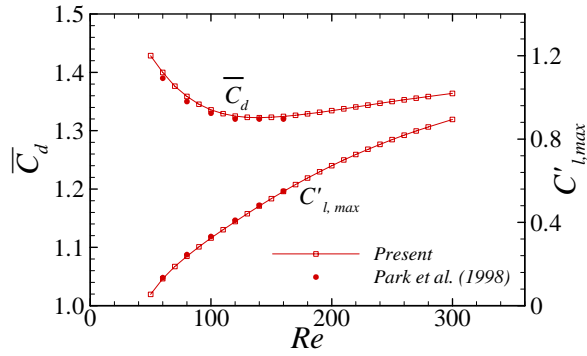


Fig. 2 Variation of mean drag coefficient and maximum magnitude of lift coefficient with Reynolds number

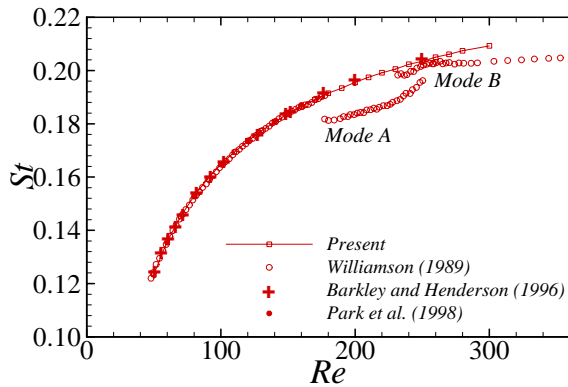


Fig. 3 Variation of Strouhal number with Reynolds number

동의 최대값( $C'_{l,max}$ )을 나타내었으며, Fig. 3은 Strouhal 수의 변화를 보여준다. 기존 연구 결과[3,4,7]와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 기존 실험결과[7]를 보면 mode A와 mode B가 발생하는 임계 Re 영역에서 와хло림 진동수가 급변하고 있음을 관측할 수 있다. 2차원적으로 계산된 모든 기본 유동들은 주기적인 상태이며, 한 와хло림 주기(T)에 대해 균일한 시간 간격으로 32개의 유동장을 저장한 후, Fourier 보간을 통해 교란 방정식에서 필요한 기본 유동장으로 사용하였다.

### 3. Floquet 안정성 분석

#### 3.1 지배방정식과 수치해석 기법

주기적인 와хло림이 발생하는 실린더형 장애물을 지나는 유동에서 3차원에서의 유동 천이는 Floquet 안정성 분석을 통해 이해할 수 있다. 여기서 유동장의 순간 속도는 주기 T를 가지는 2차원 기본 유동(base flow,  $\mathbf{U}(x,y,t) = \mathbf{U}(x,y,t+T)$ )과 3차원 교란속도(perturbation velocity,  $\mathbf{u}'$ )로 구성된다.

$$\mathbf{u}(x,y,z,t) = \mathbf{U}(x,y,t) + \mathbf{u}'(x,y,z,t) \quad (3)$$

위 식과 Navier-Stokes 방정식을 통해 아래 식과 같은 선형화된 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}' \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{u}') - \nabla p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (5)$$

위 방정식에 대한 경계조건은 식 (2)의 경계조건과 기본유동의 경계조건으로부터 얻어지며, 입구에서는  $\mathbf{u}'=0$ , 출구에서는 대류경계조건이 되며, 계산영역 윗면과 아랫면에서는 각각 slip 경계조건으로 기본 유동의 경계조건과 동일하게 된다.

식 (4)와 (5)의 교란 방정식은 횡방향으로 homogeneous한 특성을 이용하면 좀 더 간단히 표현 가능하다. 즉 Fourier 적분을 통해 perturbation 속도와 압력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \end{bmatrix} (x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} (x,y,\beta,t) e^{i\beta z} d\beta \quad (6)$$

여기서  $\beta = 2\pi/\lambda_z$ 이며,  $\lambda_z$ 는 유동 교란의 횡방향 파장을 의미한다. 위 식을 식 (4,5)에 대입하면 각각의  $\beta$ 에 따른 2차원 방정식으로 된다. 또한 교란 속도와 압력은 각각 다음과 같은 형태가 된다[4].

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x,y,z,t) &= (\hat{u} \cos\beta z, \hat{v} \cos\beta z, \hat{w} \sin\beta z) \\ p'(x,y,z,t) &= \hat{p} \cos\beta z \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 방정식 (4,5)가 선형이기 때문에 각각의 모드  $|\beta|$ 에 대한 위의 각 방정식은 독립적이게 된다. 변형된 교란 방정식은 Fourier 계수로 이루어지며, 식 (4)와 (5)의 gradient 연산자  $\nabla$ 를  $\nabla_{\beta} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, i\beta)$ 로 교체함으로써 얻어진다. 선형 연산자  $\mathbf{L}$ 을 교란 방정식의 우변으로 정의하면 교란 방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}})$ 는 주기 T를 가지는 함수이며, 식 (8)의 해는  $\tilde{\mathbf{u}}(x,y,z,t) \exp(\sigma t)$  형태의 함수로 이루어진다[4]. 여기서  $\tilde{\mathbf{u}}(x,y,z,t)$  또한 주기 T를 가지는 함수이며, 이를 연산자  $\mathbf{L}$ 의 Floquet mode라고 한다[4].  $\sigma$ 는 Floquet 지수이고 Floquet 안정성 분석에서는  $\mu \equiv \exp(\sigma T)$ 로 정의되는 Floquet multiplier를 통해 안정성을 판별하게 된다. Floquet multiplier는  $\mathbf{L}$ 의 고유값을 통해 구하게 되며,  $|\mu| < 1$ 인 경우, 유동 교란은 지수적으로(exponentially) 감소하고, 유동장은 안정화 상태이며,  $|\mu| > 1$  유동 교란은 지수적으로 증가하고, 유동장은 불안정

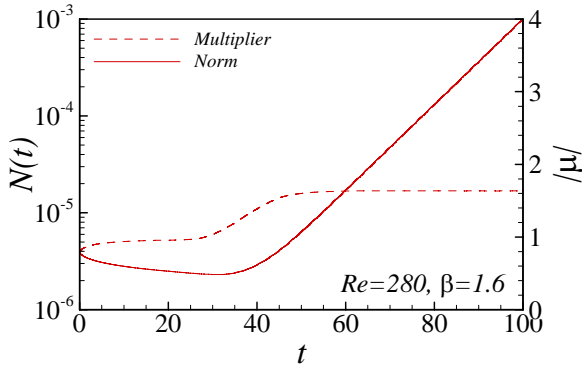


Fig. 4 Growth of the norm and the Floquet multiplier

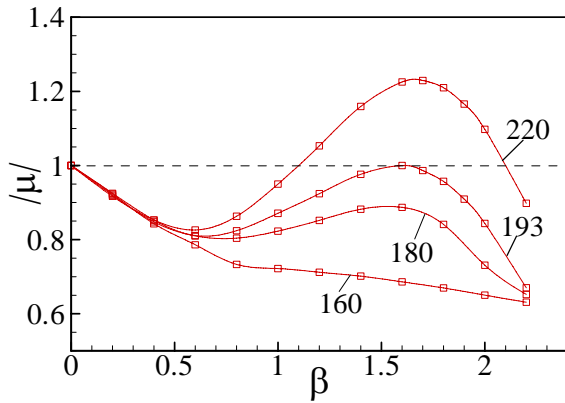


Fig. 5 Variation of Floquet multipliers with spanwise wavenumber near mode A instability

한 상태가 된다.

Robichaux 등[15]은 다음과 같이 교란 속도의 운동에너지를 통해 Floquet multiplier를 구하고 실린더형 장애물의 안정성을 분석한 바 있다. 이 방법은 Blackburn and Lopez[16]에 의해 검증된 바 있으며 Floquet multiplier를 구하기 위해 사용된 식은 아래와 같다.

$$|\mu_{\max}| \approx N(t+T)/N(t) \quad (9)$$

$$N(t) = \sqrt{\int_{\Omega} [\hat{u}(\mathbf{x}, t)^2 + \hat{v}(\mathbf{x}, t)^2 + \hat{w}(\mathbf{x}, t)^2] d\Omega} \quad (10)$$

이 방법에서는 식 (8)의 고유값을 직접 계산할 필요없이 교란 방정식에서 운동에너지의 시간에 따른 거동을 통해 안정성을 판별하게 된다.

본 연구에서는 Robichaux 등[15]의 방법에 가상경계법을 적용하여 복잡한 형상의 장애물을 지나는 주기적인 유동에서 3차원 유동으로 천이가 발생하는 유동현상을 좀 더 쉽게 해석

할 수 있는 방법을 제시하고, 그 타당성 검증을 목표로 한다. 가상경계법이 적용된 교란 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla_{\beta} \cdot \hat{\mathbf{u}} - q = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla_{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{u}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\hat{\mathbf{u}}) - \nabla_{\beta} \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla_{\beta}^2 \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \quad (12)$$

위 지배 방정식은 기본유동의 수치해석 기법과 동일하게 유한 체적법을 사용하여 차분되었으며, 시간 적분은 대류항에 대하여 3차 정확도의 RK방법으로 적분하였고 점성항은 Crank-Nicolson 방법으로 implicit하게 적분이 수행되었다. 연속 방정식과 운동량 방정식을 분리하기 위해 Fractional step 기법 [18]이 사용되었으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{u}}^k - \hat{\mathbf{u}}^{k-1}}{\Delta t} &= \alpha_k L_D(\hat{\mathbf{u}}^k) + \alpha_k L_D(\hat{\mathbf{u}}^{k-1}) - 2\alpha_k \nabla_{\beta} \hat{p}^{k-1} \\ &\quad - \gamma_k L_C(\hat{\mathbf{u}}^{k-1}) - \zeta_k L_C(\hat{\mathbf{u}}^{k-2}) + \mathbf{f}^k \end{aligned} \quad (13)$$

$$\nabla_{\beta}^2 \psi^k = \frac{1}{2\alpha_k \Delta t} (\nabla_{\beta} \cdot \hat{\mathbf{u}}^k - q^k) \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^k = \hat{\mathbf{u}}^{k-1} - 2\alpha_k \Delta t \nabla_{\beta} \psi^k \quad (15)$$

$$\hat{p}^k = \hat{p}^{k-1} + \psi^k - \frac{\alpha_k \Delta t}{Re} \nabla_{\beta}^2 \psi^k \quad (16)$$

여기서  $L_D(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{Re} \nabla_{\beta}^2 \hat{\mathbf{u}}$ ,  $L_C(\hat{\mathbf{u}}) = \nabla_{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{u}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\hat{\mathbf{u}})$

이며,  $\hat{\mathbf{u}}$ 와  $\psi$ 는 각각 중간 단계 속도와 pseudo-pressure이다. 또한 k는 RK3의 substep의 index이며,  $\alpha_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\zeta_k$ 는 RK3의 계수( $\alpha_1 = 4/15$ ,  $\gamma_1 = 8/15$ ,  $\zeta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1/15$ ,  $\gamma_2 = 5/12$ ,  $\zeta_2 = -17/60$ ,  $\alpha_3 = 1/6$ ,  $\gamma_3 = 3/4$ ,  $\zeta_3 = -5/12$ )이다. 식 (11)과 (12)에서 운동량 부가  $\mathbf{f}$ 와 질량 원천/흡입  $q$ 에 대한 기법은 Kim 등[17]의 방법이 적용되었다.

### 3.2 원형 실린더를 지나는 유동의 Floquet 안정성 분석

Fig. 4는 원형 실린더를 지나는 유동에서 기본 유동의 Re가 280이고, 횡방향 파동수( $\beta$ )가 1.6인 경우, 식 (9)와 (10)으로 정의되는 교란 속도의 운동에너지와 Floquet multiplier를 나타내었다. 교란 속도의 초기조건으로 난수(random number)를 사용하였으며, 구조가 없는 난수들은 무차원 시간이 40 정도까지 점차 감소하다 그 후 지수적으로(exponentially) 증가하고 있음을 볼 수 있다. Floquet multiplier( $|\mu|$ )는 무차원 시간이 50에서 일정한 값으로 수렴하는 것을 관측할 수 있다.

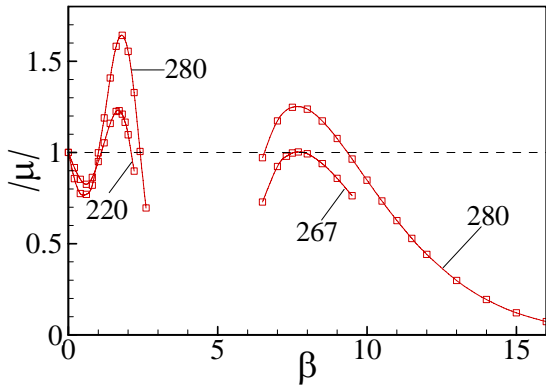


Fig. 6 Variation of Floquet multipliers with spanwise wavenumber near mode B instability

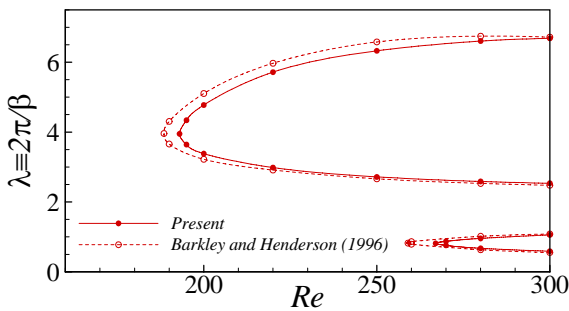


Fig. 7 Stability diagram for flow past a circular cylinder

실린더형 장애물을 지나는 유동에서 주기적인 2차원 기본 유동이 3차원으로 천이하는 Floquet 안정성 분석은 각각의 횡방향 파동수에 따른 Floquet multiplier를 계산함으로써 판별할 수 있다. Fig. 5는 2차원 주기적인 유동에서 3차원 교란이 처음 발생하는 mode A의 임계 Re수 근처에서 횡방향 파동수에 따라 Floquet multiplier의 분포를 나타낸 그림이다.  $|\mu|=1$ 인 직선은 교란 방정식의 중립 안정한(neutral stability) 상태에 해당한다. Floquet 이론에 의하면  $\beta=0$ 인 경우, 항상 중립 안정한(neutral stable) 상태를 이루며[19] 음의  $\beta$ 와 대칭 상태를 이루기 때문에 양의 파동수만을 나타내었다.  $Re=180$ 의 경우, 전 영역의  $\beta$  범위에서 Floquet multiplier는 1 보다 작은 결과를 보이며 안정한 상태를 이루지만,  $Re \approx 193$ 까지 증가하게 되면  $|\mu|>1$ 의 결과를 보이며, 불안정한 상태가 된다. 2차원 주기적인 유동이 3차원으로 천이되는 mode A의 임계 Re수( $Re_c$ )는 193이며, 이때 횡방향 임계 파동수( $\beta_2$ )는 1.59로 측정되었다. 이에 해당하는 임계 횡방향 파장(spanwise wavelength,  $\lambda_2 = 2\pi/\beta_2$ )은 3.952의 결과를 얻었다. Barkley and Henderson[4]의 연구에서 선형화된 식 (8)의 고유값을 통해

Floquet multiplier를 구하고, 이를 통해 계산된 임계 Re와 임계 파동수를  $Re_c=188.5 \pm 1$ ,  $\beta_2 = 1.585$ 의 결과를 얻었는데, 이는 본 연구 결과와 잘 일치하고 있다.

Fig. 6은 높은 Re수에서 발생하는 유동 천이 현상인 mode B의 임계 Re수( $Re'_c$ ) 근처에서 각각의 파동수에 따른 Floquet multiplier의 변화를 보여준다. mode B가 발생하기 전인  $Re \approx 220$ 에서는 낮은 파동수 대역에서 mode A만이 관측되지만,  $Re \approx 267$  근처에서  $|\mu|>1$ 인 mode B가 높은 파동수에서 발생한다. mode B가 발생하는 임계  $Re(Re'_c)$ 는 267이며, 임계 파동수( $\beta'_2$ )는 7.7로 관측되었다. 이는 임계 횡방향 파장  $\lambda'_2 = 0.816$ 에 해당한다.

기존 실험[6]에 의하면 mode B가 발생하는 임계 Re수는 260으로 알려져 있으며, Barkley and Henderson[4]에 의한 Floquet 안정성 계산에서도  $259 \pm 2$ 로 측정된 바 있다. Barkley and Henderson[4]의 결과에서 임계 횡방향 파동수는 7.65로 측정되었으며, 이에 해당하는 횡방향 파장은  $\lambda'_2 = 0.822$ 이다. 본 연구에서 가상경계법을 통해 계산된 mode B의 임계 Re수와 임계 횡방향 파장과 잘 일치하고 있음을 확인하였다.

Fig. 7은 원형 실린더를 지나는 유동의 안정성 선도(stability diagram)를 Barkley and Henderson[4]의 결과와 함께 나타내었다. mode A와 mode B가 발생하는 임계 Re수와 임계 횡방향 파장이 잘 일치하고 있다. 뿐만 아니라 각 Re수에서 불안정한 파장 대역(band)이 잘 일치하는 결과를 보여주고 있다.

### 3.3 Floquet mode의 유동구조

Floquet 유동 불안정성이 발생하는 경우 유동의 3차원 구조는 Floquet mode를 계산함으로써 이해할 수 있다. 식 (8)에서 연산자  $L$ 의 Floquet mode  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ 와 이에 해당하는 와도(vorticity)는 다음과 같은 형태가 된다[4].

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = (\hat{u} \cos \beta z, \hat{v} \cos \beta z, \hat{w} \sin \beta z) \quad (17)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(x, y, z, t) = (\hat{\omega}_x \sin \beta z, \hat{\omega}_y \sin \beta z, \hat{\omega}_z \cos \beta z) \quad (18)$$

원형 실린더를 지나는 2차원 기본유동의 경우, 주기 T를 가지는 주기적인 유동이며, 실린더 중심을 기준으로 실린더 위쪽과 아래 쪽에서 동일한 형태의 와홀림이 발생한다. 즉 유동 후류의 중심선( $y=0$ )에 대하여, T/2의 시간 간격으로 아래 식과 같은 RT대칭(reflection-translation symmetry)인 형태가 된다.

$$U(x, y, t) = U(x, -y, t + T/2) \quad (19)$$

$$V(x, y, t) = -V(x, -y, t + T/2) \quad (20)$$

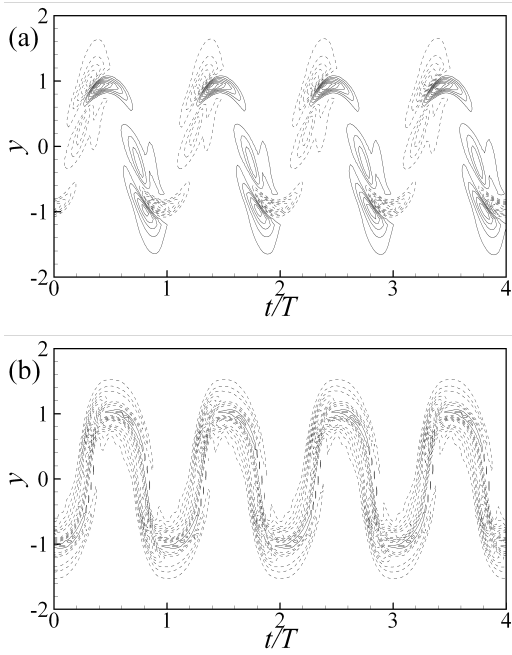


Fig. 8 Contours of  $\hat{\omega}_x$  in the  $y-t$  plane,  $x=2.5$ ; (a)  $\beta=1.59$ ,  $Re=195$  (Mode A), (b)  $\beta=7.7$ ,  $Re=268$  (Mode B)

Barkley and Henderson[4]은 mode A와 mode B에서도 다음 식과 같은 RT 대칭인 현상을 지적한 바 있다.

$$\text{Mode A: } \begin{cases} \tilde{u}(x, y, z, t) = \tilde{u}(x, -y, z, t + T/2) \\ \tilde{v}(x, y, z, t) = -\tilde{v}(x, -y, z, t + T/2) \\ \tilde{w}(x, y, z, t) = \tilde{w}(x, -y, z, t + T/2) \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{Mode B: } \begin{cases} \tilde{u}(x, y, z, t) = -\tilde{u}(x, -y, z, t + T/2) \\ \tilde{v}(x, y, z, t) = \tilde{v}(x, -y, z, t + T/2) \\ \tilde{w}(x, y, z, t) = -\tilde{w}(x, -y, z, t + T/2) \end{cases} \quad (22)$$

이에 대한 와도의 경우, 아래와 같은 RT대칭을 이루게 된다.

$$\text{Mode A: } \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = -\tilde{\omega}_x(x, -y, z, t + T/2) \quad (23)$$

$$\text{Mode B: } \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = \tilde{\omega}_x(x, -y, z, t + T/2) \quad (24)$$

위와 같이 mode A와 mode B가 서로 다른 RT 대칭을 이루는 것은 실험적 연구[8,9]와 수치해석적 연구[10]에서도 관측된바 있다.

각각의 서로 다른 mode에서 발생하는 대칭 현상을 관측하기 위해  $x=2.5$ 의 위치에서 가장 불안정한 파동수 근처에서 시간에 따른 유동 방향 와도 성분(식 (18))의  $\hat{\omega}_x$ 의 변화를 Fig.

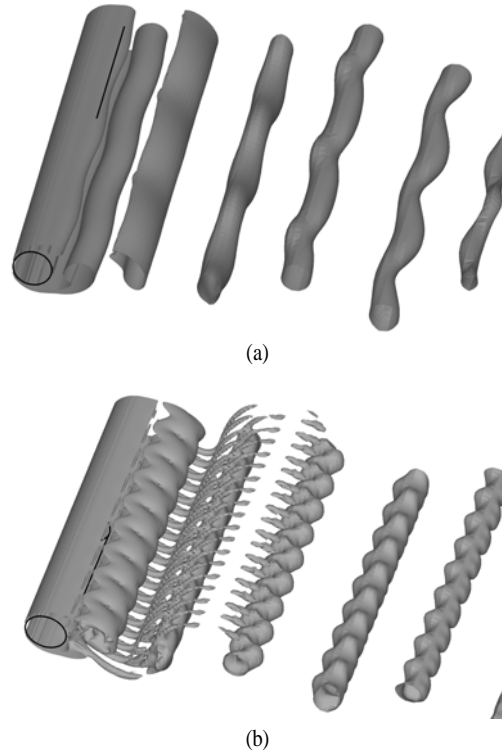


Fig. 9 Q contours[20] of Floquet modes; (a)  $\beta=1.59$ ,  $Re=195$  (Mode A) (b)  $\beta=7.7$ ,  $Re=280$  (Mode B)

8에 나타내었다. Fig. 8에서 시간(time)은 주기  $T$ 로 무차원 되었으며, 주기적인 와홀림에 의한 주기적인 교란을 볼 수 있다. Fig. 8(a)는  $Re=195$ 이고, 횡방향 파동수가 1.59인 경우이며, mode A를 나타낸다.  $T/2$  시간 마다 식 (21)과 같은 대칭적 구조를 확인할 수 있다. Fig. 8(b)는  $Re=268$ 이고, 횡방향 파동수가 7.7인 경우이며, mode B에 해당한다. mode B의 경우 후류 중심선을 기준으로 위쪽과 아래쪽에서 동일한 부호를 가지며, 서로 연결된 양상을 보인다. mode B의 경우에도 식 (22)의 대칭성을 잘 만족하고 있다.

Fig. 9는 3차원 유동이 처음 발생하는 mode A의 유동 구조를 파악하기 위해 기본 유동과 교란 유동의 중첩( $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ )을 통해 구현된 유동장에서 3차원 와류구조를 나타내었다. 각각의 교란유동의 속도는 가장 불안정한 파동수에서 계산된 속도를 사용하였다. Fig. 9(a)는  $Re=195$ 이고 횡방향 파동수가 1.59인 경우로 mode A에 해당하며, 실린더에서 와홀림된 와류가 횡방향으로 변형되는 특징을 볼 수 있다. Fig. 9(b)는  $Re=280$ 이고 횡방향 파동수가 7.7인 경우로 mode B에 해당하며, 횡방향으로 짧은 파장을 가지고 유동 방향으로 생성되는 와류를 관측할 수 있다. 이는 기존 연구 결과[6]와 잘 일치하고 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 실린더형 장애물을 지나는 유동에서 발생하는 2차원 주기적인 유동이 3차원으로 천이하는 Floquet 안정성을 측정하기 위해 가상경계법을 도입하고 타당성을 검증하였다. 가상경계법은 복잡한 형상을 지나는 유동을 직교좌표계에서 손쉽게 구현 가능한 장점이 있다. 따라서 가상경계법을 Floquet 안정성 분석에 적용하면 복잡한 형상의 장애물을 지나는 유동에서 3차원 천이가 발생하는 임계  $Re$ , 횡방향의 파동수를 손쉽게 측정하고, 유동 구조를 파악할 수 있다. 본 연구에서는 기존에 많은 연구가 진행되어진 원형 실린더를 지나는 유동에서 가상경계법을 적용한 Floquet 안정성 분석을 수행하고, 그 결과를 기존 연구와 비교하여 가상경계법 적용의 타당성을 검증하였다.

원형 실린더를 지나는 유동에서 가상경계법을 통해 Floquet 안정성 분석 결과 기존 연구 결과와 동일하게 mode A와 mode B의 유동 불안정성을 관측하였다. mode A와 mode B의 유동 불안정성 모드에서 임계  $Re$ 는 각각 193과 267로 측정되었으며, 횡방향 파동수는 각각 1.59, 7.7로 기존 연구결과[4,6]와 잘 일치하고 있어, 가상경계법을 이용한 Floquet 분석에서 타당성을 확보하였다.

## 후 기

본 연구는 수중운동체 특화연구센터의 지원에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- [1] 1995, Henderson, R.D., "Details of the drag curve near the onset of vortex shedding," *Phys. Fluids*, Vol.7, pp.2102-2104.
- [2] 1994, Norberg, C., "An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio," *J. Fluid Mech.*, Vol.258, pp.287-316.
- [3] 1998, Park, J., Kwon, K. and Choi, H., "Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160," *KSME Int. J.*, Vol.12, pp.1200-1205.
- [4] 1996, Barkley, D. and Henderson, R.D., "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol.322, pp.215-241.
- [5] 1988, Williamson, C.H.K., "The existence of two stages in the transition to three dimensionality of a cylinder wake," *Phys. Fluids*, Vol.31, pp.3165-3168.
- [6] 1996, Williamson, C.H.K., "Vortex dynamics in the cylinder wake," *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, Vol.28, pp.477-539.
- [7] 1989, Williamson, C.H.K., "Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.* Vol.206, pp.579-627.
- [8] 1995, Williamson, D.R., Mansy, H. and Abouel-Fotouh, A., "Three-dimensional subharmonic waves during transition in the near-wake region of a cylinder," *Phys. Fluids A*, Vol.8, pp.1476-1485.
- [9] 1996, Brede, M., Eckelmann, H. and Rockwell, D., "On secondary vortices in the cylinder wake," *Phys. Fluids A*, Vol.8, pp.2117-2124.
- [10] 1995, Mittal, R. and Balachandan, S., "Generation of streamwise vortical structures in bluff body wakes," *Phys. Rev. Lett.*, Vol.75, pp.1300-1303.
- [11] 1997, Henderson, R.D., "Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition," *J. Fluid Mech.*, Vol.352, pp.65-112.
- [12] 1995, Zhang, H., Fey, U. and Noack, B.R., "On the transition of the cylinder wake," *Phys. Fluid*, Vol.7, pp.779-794.
- [13] 1992, Karniadakis, G.E. and Triantafyllou, G.S., "Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects," *J. Fluid Mech.*, Vol.238, pp.1-30.
- [14] 1992, Tomboulides, A.G., Triantafyllou, G.S. and Karniadakis, G.E., "A new mechanism of period doubling in free shear flows," *Phys. Fluids A*, Vol.4, pp.1329-1332.
- [15] 1999, Robichaux, J., Balachandar, S. and Vanka, S.P., "Three-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder," *Phys. Fluid*, Vol.11, pp.560-578.
- [16] 2003, Blackburn, H.M. and Lopez, J.M., "On three-dimensional quasiperiodic Floquet instabilities of two-dimensional bluff body wakes," *Phys. Fluids*, Vol.15, pp.L57-L60.
- [17] 2001, Kim, J., Kim, D. and Choi, H., "An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol.171, pp.132-150.
- [18] 1985, Kim, J. and Moin, P., "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations," *J. Comput. Phys.*, Vol.59, pp.308-323.
- [19] 1990, Iooss, G. and Joseph, D.D., *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 2nd ed.
- [20] 1995, Jeong, J. and Hussain, F., "On the identification of a vortex," *J. Fluid Mech.*, Vol.285, pp.69-94.