

## 안정동력학에 의한 가변수요 통행배정모형\*

박 구 현\*\*

### A Variable Demand Traffic Assignment Model Based on Stable Dynamics\*

Koohyun Park\*\*

#### ■ Abstract ■

This study developed a variable demand traffic assignment model by stable dynamics. Stable dynamics, suggested by Nesterov and de Palma[19], is a new model which describes and provides a stable state of congestion in urban transportation networks. In comparison with the user equilibrium model, which is based on the arc travel time function in analyzing transportation networks, stable dynamics requires few parameters and is coincident with intuitions and observations on congestion. It is therefore expected to be a useful analysis tool for transportation planners.

In this study, we generalize the stable dynamics into the model with variable demands. We suggest a three stage optimization model. In the first stage, we introduce critical travel times and dummy links and determine variable demands and link flows by applying an optimization problem to an extended network with the dummy links. Then we determine link travel times and path flows in the following stages. We present a numerical example of the application of the model to a given network.

Keyword : Traffic Assignment, Stable Dynamics, Variable Demand, Elastic Demand, Wardrop Principle, User Equilibrium, Critical Travel Time, Congestion, Transportation Network

논문접수일 : 2008년 07월 31일    논문게재확정일 : 2009년 01월 28일

논문수정일(1차 : 2008년 12월 08일)

\* 이 논문은 2007학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

\*\* 홍익대학교 정보산업공학과

## 1. 서 론

### 1.1 이용자균형에서의 링크통행시간

교통망에 대한 효과적인 분석 및 설계를 위한 교통상황의 표현수단으로 대부분의 모형에서는 링크비용함수를 이용한다. 링크비용함수는 통행량에 대한 함수로서 보통 링크통행시간으로 정의되며, 증가함수(또는 비감소함수)를 가정한다. 수요가 기종점별로 주어졌을 때 균형통행은 보통 Wardrop 원칙[21]에 의해서 표현된다. 즉, 어떤 기종점에 대해 이를 연결하는 어떤 경로에 통행이 할당되었다면, 그 경로는 최단경로가 된다는 것이다.

링크비용함수에 기초한 균형통행에는 이용자균형(user equilibrium)과 시스템균형(system equilibrium)이 있으며, 이용자균형이란 어떠한 운전자도 현재 경로보다 더 유리한 다른 경로를 발견할 수 없는 상태를 말한다. 모든 링크비용함수가 연속이면 이용자균형은 Wardrop 균형과 일치하게 된다[2, 11]. 이에 비해 시스템균형이란 전체 링크통행시간의 합이 최소가 되도록 중앙센터에서 모든 통행자의 경로를 결정한 상태를 의미한다.

이용자균형 모형에서 링크통행시간 함수로 가정 널리 적용되고 있는 BPR식은 아래와 같다.

$$t_j = \bar{t}_j \left( 1 + A \left( \frac{f_j}{f_j^B} \right)^B \right) \quad (1-1)$$

여기서  $\bar{t}_j$ 은 링크  $j$ 에서의 최소통행시간이고,  $f_j$ 는 링크  $j$ 에서의 최대통행량(용량)을 의미하며, 파라미터에 대해서는 미국 BPR(Bureau of Public Roads)에서  $A = 0.15$ ,  $B = 4.0$ 를 권고하고 있다. 그러나 실제 링크통행시간 함수를 적용할 때는 위에서 언급한 바와 같이 주어진 식의 파라미터를 보정하는 과정을 거친다. 즉, 신뢰할 만한 방법으로 자료를 측정할 후 이에 맞게 링크통행시간 함수의 파라미터(여기서는 A, B) 값을 다시 조정한다.

링크 통행시간 함수에 기초한 이용자 균형 모형의 결과는 도시 교통망에서 관찰되는 보통의 직관과 일치하지 않는 점들이 있다. 첫째, 직관에 의하면 어떤 기간 동안 링크통행량이 많다는 것은 통행이 빠르게 움직이고 있다는 것을 의미한다. 즉 통행의 링크통행시간이 크지 않다는 것을 의미한다. 둘째, 어떤 링크가 혼잡하다면 통행량은 줄어들고 링크통행시간은 매우 커진다. 그러나 이러한 관찰과는 달리 이용자균형 모형에서의 링크통행시간 함수는 통행량이 커지면(링크 용량에 도달하면), 링크통행시간이 큰 값(느린 움직임)을 가지며, 역으로 링크통행시간이 큰 값이라면 통행량은 링크 용량에 가까운 큰 값이 되어야 한다. 이와 같이 관찰과 링크통행시간 함수의 결과와의 차이를 생각해 볼 때 이용자균형 모형에서 링크통행시간 함수는 인위적인 가정이라고 생각된다[17, 18]. 이에 대해 이용자균형 모형에서는 대체로 2가지 방법으로 이러한 문제 해결에 접근한다. 첫째, 링크비용함수를 적용할 때 실제적인 측정을 통해 주어진 비용함수의 파라미터를 보정(calibration)하는 과정을 거치는 방법이 있다. 두 번째 접근방법으로는 링크비용함수를 해당 링크만이 아니라 모든 링크의 통행량 함수로 정의하는 방법이다. 이때 서로 다른 두 링크통행량의 상호영향이 대칭적인가의 여부는 균형해 존재에 매우 중요하다[10].

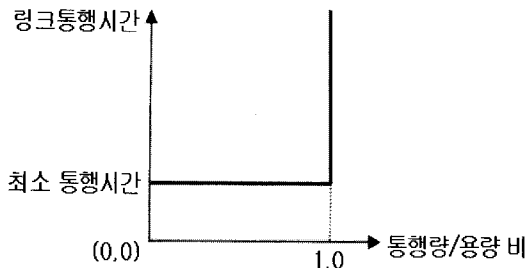
### 1.2 안정동력학에서의 링크통행시간과 안정 동력학 가설

안정동력학에서는 링크비용함수를 인위적인 함수로 간주하기 때문에 이를 요구하지 않는다. 대신 안정동력학 모형에서 링크통행시간 결정은 완전히 새로운 가정에 기초하며 그것은 링크의 혼잡여부에 따라 달라진다. 먼저, 혼잡하지 않는 링크에서의 링크통행시간은 주어진 최대 주행속도를 따라 이동한다고 가정하여 최소 링크통행시간이 된다. 혼잡한 링크에서의 링크통행시간은 최소 링크통행시간 이상의 값을 갖으며, 이는 링크별로 결정되지 않고 교

통망 전체를 통해 혼잡한 모든 링크들을 고려하여 모형에 의해 결정된다. 혼잡의 여부는 링크별로 통행할 수 있는 통행량의 한계 즉 링크 용량까지 통행할 때를 의미한다. 이러한 용량을 링크의 최대통행량이라고 부른다. 이와 같이 간단한 파라미터(링크별 최소통행시간과 최대통행량)와 단순한 가정으로부터 세우진 안정동력학 모형은 Nesterov와 de Palma[19]가 모형을 제안한 이래 Wardrop 원칙을 만족하는 균형 통행은 물론 여러 종류의 통행배정 문제들에 대한 해답을 제공해 주고 있다[2, 3, 12]. 따라서 안정동력학 모형은 교통망 설계자에게 매우 유용한 분석 도구가 될 수 있다고 생각한다.

구체적으로 안정 동력학에서는(통행량/용량) < 1.0 일 때는 통행시간 = 최소통행시간이 되고, (통행량/용량) = 1.0일 때는 통행시간은 최소통행시간 이상의 어느 값이 될 것이라고 가정한다. 따라서 안정 동력학 모형에서의 링크통행시간의 그래프는 [그림 1]과 같다. 이는 정확히 말해서 함수가 아니다. (통행량/용량) = 1.0일 때 링크통행시간은 최소통행시간 이상의 무수히 많은 값을 취할 수 있기 때문이다. 그러나 실제 혼잡상황 즉, (통행량/용량) = 1.0 이 될 때, 링크통행시간은 해당 링크의 통행량에 의해서 결정되지 않고, 전체 교통망의 혼잡상황을 반영하는 모형에 의해 결정된다. 가장 대표적인 모형은 Nesterov and de Palma[19]의 모형 (15) 및 모형 (16)으로 이는 각각 블록계획모형 및 선형계획모형이다.

안정 동력학 모형은 '주어진 통행수요가 계속 유지되고 동적인 통행 상태가 시간이 지나면서 안정



[그림 1] 안정동력학에서의 링크통행시간 그래프

상태로 수렴하게 된다면, 안정상태에 대한 통행 상황은 안정 동력학 모형에 의해 표현될 것이다'는 것을 전제하고 있다. 만일 이러한 전제가 사실이라면 안정 동력학 모형은 이론적이고 기본적인 분석모형이 될 것이다. 왜냐하면 링크 통행시간이 링크 통행량 함수의 어떠한 파라미터도 포함하고 있지 않기 때문이다. 그러나 안정 동력학 전제에 대한 실증적 검증 또는 증명과는 별도로 안정 동력학 모형 자체가 혼잡을 근사적으로 표현할 수 있는 유용한 모형임을 보이는 연구가 수행될 수 있다. 이와 같은 의도에서 안정 동력학 모형에 기초하여 다차종을 고려하는 통행배정 연구[2], 개인 자동차로 역까지 가서 주차하고 전철이나 버스를 타고 출퇴근하는 모형(park-and-ride model)연구[12], 비효율적인 링크를 발견하는 브라이스 역설 발견모형 연구[3] 및 가변수요를 갖는 통행배정 연구(본 연구)가 수행되었다고 할 수 있다.

### 1.3 이용자균형 모형에서의 가변수요 통행배정

이용자균형 관점에서의 가변수요 통행배정에 대한 관련 연구를 살펴보고 안정동력학 모형에의 적용 가능성을 검토하고자 한다.

이용자균형 관점에서의 가변수요 통행배정은 대부분 고정수요 통행배정을 기초로 하고 있으며, 고정수요 통행배정 모형은 다음의 최적화 문제형태로 표현할 수 있다[7].

$$\text{Minimize} \quad \text{모든 링크에서의 링크통행시간의 합} \tag{1-2a}$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{aligned} &\text{기종점을 연결하는 경로통행량의 합} \\ &= \text{기종점간 수요(기종점별)} \end{aligned} \tag{1-2b}$$

여기서 결정변수는 링크통행량이고 링크통행시간은 링크통행량의 함수이다. 그리고 이에 대한 KKT 최적 필요조건은 다음의 Wardrop 제 1원칙으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{통행량이 양수인 경로의 경로통행시간} \\ & = \text{최단경로 통행시간(기종점별)} \quad (1-3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{통행량이 0인 경로의 경로통행시간} \\ & \geq \text{최단경로 통행시간 (기종점별)} \quad (1-3b) \end{aligned}$$

이용자균형 관점에서의 가변수요 통행배정 모형은 고정수요 모형에 비해 기종점별로 2가지 함수를 추가로 가정한다. 첫째, 기종점간 경로통행시간에 대한 수요함수를 도입하고, 두 번째는 그 수요함수의 역함수가 존재한다고 가정한다. 그러면 역함수는 기종점간 수요에 대한 경로통행시간 함수가 된다. 가변수요 통행배정 문제를 모형화하기 위해 다음의 몇 가지 표현을 정의한다.

$$\begin{aligned} f_j &= \text{링크 } j \text{의 링크통행량} \\ c_j(\cdot) &= \text{링크 } j \text{의 링크통행량에 대한 평균 링크} \\ & \quad \text{통행시간 함수} \\ F_p^k &= k \text{번째 기종점을 연결하는 경로 } p \text{의 경로} \\ & \quad \text{통행량} \\ C^k &= k \text{번째 기종점의 최단경로의 평균 경로} \\ & \quad \text{통행시간} \\ d^k(\cdot) &= \text{평균 경로통행시간에 대한 수요 함수} \\ \omega^k(\cdot) &= d^k(C^k) \text{의 역함수, 가변수요 } d^k \text{에 대한} \\ & \quad \text{평균 경로통행시간 함수} \end{aligned}$$

위의 표현에서 ‘평균’은 통행량에 대한 평균시간을 의미한다. 이제 이용자균형 관점에서의 가변수요 통행배정을 최적화 문제로 표현하면 다음과 같다[13].

Minimize

$$\sum_{\text{링크 } j} \int_0^{f_j} c_j(z) dz - \sum_{\text{기종점}(k)} \int_0^{d^k} \omega^k(y) dy \quad (1-4a)$$

Subject to

$$\sum_{\substack{k \text{번째 기종점의} \\ \text{경로 } p}} F_p^k = d^k, F_p^k \geq 0, (\text{기종점 } k \text{ 별}) \quad (1-4b)$$

$$f_j = \sum_{\text{기종점 } k} \sum_{\text{경로 } p} \delta_{jp} F_p^k \cdot (\text{링크 } j \text{ 별}) \quad (1-4c)$$

여기서  $\delta_{jp}$ 는 링크  $j$ 가 경로  $p$ 에 포함되면 1, 아니면 0인 값이다. 모형 (1-4)에 대한 KKT 최적 필요 조건은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{통행량이 양수인 경로의 평균 경로통행시간} \\ & = C^{*k} (\text{기종점 } k \text{ 별}) \quad (1-5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{통행량이 0인 경로의 평균 경로통행시간} \\ & \geq C^{*k} (\text{기종점 } k \text{ 별}) \quad (1-5b) \end{aligned}$$

$$\omega^k(d^{*k}) = C^{*k} (\text{기종점 } k \text{ 별}) \quad (1-5c)$$

여기서 마지막 조건식의 좌변은 균형 수요일 때 수요함수의 역함수( $\omega^k$ )에 의해 결정되는 평균 경로통행시간이다. 만일 가변수요 통행배정 모형에서 수요가 일정하다면 수요 함수  $d^k(\cdot)$ 가 상수 값을 갖기 때문에 식 (1-4a)의 두 번째 항은 0이 되고, 조건 (1-5c)도 의미가 없는 조건이 되어, 모형 (1-2) 및 조건 (1-3)으로 돌아가게 된다.

1980년까지의 가변수요 통행배정 연구를 리뷰하는 논문[13, 14]에서 Gartner는 가변수요 통행배정 문제의 분석틀과 알고리즘적 접근방법을 경우별로 일목요연하게 제시하고 있다. 특히 모형 (1-4)을 기초로 하는 3가지 모형을 제시하고 있다: (i) 종점에서 기점으로 되돌아오는 링크를 원 네트워크에 추가로 도입하여 최소비용 순환문제로 모형화하거나 (ii) 통행량 범람에 대비한 비용 0의 링크를 도입하여 모형화하거나 (iii) 기종점을 직접 연결하는 링크를 도입하고 초과수요에 의해 모형화하는 방법을 제시하고 있다. 각 모형의 해법에 대해서는 Frank-Wolfe 알고리즘을 예로 소개하고 있다. 또한 이용자-최적 균형모형인 (1-4)와 최적조건인 (1-5)에서 ‘평균(average)’을 ‘한계(marginal)’로 대체한 시스템-최적 균형모형과 이에 대한 최적조건도 소개하고 있다.

링크통행시간이 해당 링크의 통행량뿐 아니라 다른 링크통행량의 함수인 경우, Dafermos[10]가 함수의 Jacobian의 비대칭성에 대해서도 균형해가 존재할 수 있는 변동부등식(variational inequality) 모형을 제시한 이래 많은 연구자들은 통행배정 모형을 변동부등식으로 모형화하고 있다. 변동부등식은 통행배정 최적화 문제의 KKT 조건으로부터 얻어지는 일종의 조건식이나, 균형해의 존재 조건에 대해 최적화 문제에서 요구되었던 현실 가능성이 적은 대칭성 대신 단조성(monotonicity)이 요구된다 [10, 15].

Patriksson는 그의 개관적 논문[20]에서 가변수요를 갖는 통행배정 모형을 최적화문제와 변동부등식 문제로 각각 모형화하여 균형해 존재조건, 문제구조, 알고리즘 유형 등을 다양하게 서로 비교 정리하고 있다. 그의 가변수요 모형은 Gartner의 3번째 접근방법인 기중점을 직접 연결하는 링크를 도입하고 초과수요에 의해 모형화하는 방법을 이용하였다.

고정수요를 전제로 했던 다양한 형태의 통행배정 연구는 가변수요 모형으로 일반화되었다. 다계층 모형, 다기준 모형, 확률적(stochastic) 모형, 통행료 결정모형과 이들의 복합 모형 및 민감도 연구 등 다양한 형태의 문제에서 가변수요 모형으로 일반화되었다. Nagurney와 Dong[16]은 매우 일반적이며 복잡한 가변수요 통행배정 모형을 연구하였다. 그들의 모형은 변동부등식에 기초하였으며 다계층 및 다기준 특성을 갖는 것이었다. 여기서 다기준이란 각 링크에 대해 링크통행시간과 링크비용 모두를 고려한다는 의미이다. 그들은 이들에 가중치를 곱해 계층별로 링크의 일반비용(generalized cost) 함수를 정의하였는데 가중치는 기준별 및 링크별로 다르게 정하였다.

링크에 통행료를 부과하는 정책은 매우 혼잡한 교통망의 효율을 향상시키는 좋은 방법의 하나로 간주되고 있다. Bellei 외 [8]는 가변수요를 갖는 다계층 통행료 결정모형을 연구하였다. 그들은 비대칭 링크비용을 허용하는 확률적 모형을 고정점문제(fixed point problem)로 모형화하였으며, 이는 사회

잉여(social surplus)를 최대화한다는 의미에서 계층별로 최적 링크통행량과 최적 링크통행료를 결정하는 모형이다. 한편 Yildirim과 Hearn[22]은 추가적인 제약이 있는 최선통행료(first-best toll) 결정모형을 가변수요 모형으로 일반화하였다. 여기서 최선통행료라 함은 이용자에게 통행료를 부과함으로써 링크 사용에 대한 한계비용에 영향을 주어 이용자-최적의 이용행태가 시스템-최적 조건이 성립되기 때문에 붙여진 용어이다.

최근에 Connors 외 [9]는 다계층이며 가변수요일 때 확률적 이용자균형 모형의 민감도를 분석하였다. 단일계층, 고정수요 모형에 대한 기존 연구를 다계층 및 가변수요 모형으로 확장시킨 그들은 경로선택 분포에 probit 모형을 채택하였고, 확정적 시간과 확률적 시간의 합으로 표현되는 링크통행시간을 이용하여 균형해가 미분가능하기 위한 충분조건을 제시하였다.

한편 권용석 외 [1]는 기중점간 수요를 내생변수로 처리하는 가변수요 모형을 전제로 민감도분석을 통해 최적의 네트워크를 설계하는 2계층 설계모형을 제시하였다. 제 1계층에서는 네트워크 용량변화에 대한 가변수요 통행배정 모형의 민감도를 분석하고, 제 2계층에서는 그 결과를 토대로 예산제약 하에서 사용자 편익을 최대화하도록 링크용량(증감분)을 결정하였다. 임용택[4]은 다사용자계층 통행배정을 변동부등식으로 모형화하여 계층간 비대칭 조건을 완화시킨 가변수요 모형을 제시하고 완화해법(relaxation method)을 제시하였다. 여기서 완화해법이란 대각화기법에 기초한 축차적 해법이다. 임용택과 김현명[5]은 가변수요 통행배정에 대한 독특한 알고리즘을 제안하였다. 그들은 동적모형에서 균형해를 찾아가는 동적과정에 착안하여 이를 정적(static)이나 가변수요통행배정의 균형해를 발견하는 알고리즘으로 개발하였다.

#### 1.4 안정동력학 모형에서의 가변수요 통행배정

전 절에서 언급한 바와 같이 이용자균형 관점에

서 가변수요 통행배정 연구의 개관을 살펴보았다. 그러나 안정동력학 모형에서 가변수요를 갖는 통행배정 연구는 현재까지 알려져 있지 않다. 안정동력학 모형이 비교적 최근에 발표된 연구이고, 그 관점이 독특하다는 이유 이외에도 안정동력학 모형에서 가변수요를 내생변수(endogenous variable)로 취급하는데 어려움이 있기 때문이다. 이용자균형 모형에서는 기종점간 가변수요가 경로통행시간의 함수로 주어지고, 또한 이 함수의 역함수의 존재를 가정하였다. 보통 역함수의 존재를 위해서 경로통행시간에 대해 단조감소(strictly decreasing)를 가정한다[6]. 그러나 안정동력학 모형에서는 이와 같은 가정이 불가능하며 현재로서는 무의미하다. 불가능함에 대해서는 제 2.2절에서 수요와 경로통행시간의 관계에서 보게 될 것이다. 또한 이와 같은 가정이 성립한다고 하더라도 안정동력학 모형에서는 링크에서 링크비용함수를 요구하지 않기 때문에 그것이 모형에서 역할을 하지 못한다. 따라서 안정동력학에 의한 가변수요 통행배정을 위해서는 전혀 다른 접근방식이 요구된다.

본 연구에서는 이를 위해 de Palma와 Nesterov[11]의 계약비용(reservation cost) 개념을 차용한다. 사실 그들은 계약비용 개념을 이용자균형에서 링크비용함수가 비연속(discontinuous)이고 무한(unbounded)하며 수요는 가변적(elastic)일 때 새로운 균형을 정의하기 위해 도입하였으며, 새로 정의한 균형을 'normal equilibrium'이라 불렀다. 그들은 변동부등식을 이용하여 이러한 균형이 존재함을 증명하였고, 이러한 균형은 Beckman[7] 모형의 일반화임을 보였다. 본 연구에서는 계약비용 개념을 '임계통행시간'이라는 용어로 정의하며 제 3.1절에서 소개한다.

이용자균형의 연구 전개 흐름에서 본 바와 같이 우리도 고정수요 안정동력학 모형을 가변수요 모형에 이용하고자 한다. 이를 위해 우리는 Gartner[14]의 (iii)번째 접근방법을 이용한다. 즉, 원 네트워크에 기종점별로 새로운 링크를 추가하고 초과수요를 이용하여 통행배정 모형을 수립한다. 그러나 이와 같이 접근할 때 이용자균형에는 없었던 새로운 문

제점이 안정동력학 모형에는 존재하게 된다. 이용자균형 모형에서는 추가된 링크에 할당된 초과수요를 제외시키면 원 네트워크를 통과하는 수요가 바로 가변수요가 되고, 각 링크통행시간은 링크통행량에 의해 결정된다. 그러나 안정동력학 모형에서는 추가된 링크를 포함할 때와 추가된 링크를 제외시킬 때 혼잡링크에서의 링크통행시간이 달라진다. 왜냐하면 안정동력학 모형은 원래 혼잡링크의 링크통행시간이 링크통행량에 의해 결정되지 않고 추가링크를 포함한 전체 네트워크의 혼잡상황을 고려하여 모형에서 결정되기 때문이다. 제 3.3절에서는 이러한 문제점을 상세히 살펴보고 이를 해결하기 위해 단계별 모형을 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 안정동력학 모형 전개에 필요한 표현들과 기본가정을 소개한다. 그리고 안정동력학 모형에 의해 결정되는 기종점간 최단경로 통행시간의 특성을 본다. 제 3장에서는 가변수요를 갖는 안정동력학 모형을 개발한다. 이를 위해 임계통행시간과 가상링크를 도입하며, 3단계 최적화문제로 구성된 모형을 제시한다. 제 4장에서는 제안한 모형을 링크 10개 및 노드 5개인 네트워크에 단일 기종점인 경우와 다수 기종점인 경우로 나누어 각각 적용한 예를 보인다. 제 5장은 결론 및 추후 연구이다.

## 2. 안정동력학 모형

### 2.1 표현 및 기본 가정

안정동력학 모형을 위해 아래와 같이 표현을 정의한다.

$G = G(N, E)$ , 방향성 네트워크

$N$  = 노드 집합, 첨자  $i$ 는 특정 노드를 의미함.

$E$  = 방향성 링크 집합, 첨자  $j$ 는 특정 링크를 의미함.

$|E|$  = 집합  $E$ 의 원소의 수.

$\bar{f}_j$  = 링크  $j$ 의 최대통행량,  $j \in E$ ,  $\bar{f} \in R^{|E|}$ 는 벡

터 형태,  $\bar{f} \geq 0$ ,  
 $\bar{t}_j$  = 링크  $j$ 의 최소통행시간,  $j \in E$ ,  $\bar{t} \in R^{E}$ 는  
 벡터 형태,  $\bar{t} \geq 0$ ,  
 $f_j$  = 링크  $j$ 의 통행량(변수),  $j \in E$ ,  $f \in R^{E}$ 는  
 벡터 형태,  
 $t_j$  = 링크  $j$ 의 통행시간(변수),  $j \in E$ ,  $t \in R^{E}$ 는  
 벡터 형태,  
 $K$  = 기종점 노드쌍의 집합, 첨자  $k$ 는 특정 기  
 종점을 의미함.  
 $d^k$  =  $k$ -번째 기종점 통행 수요(가변수요),  $d \in$   
 $R^{K}$ 는 벡터 형태,  
 $f_j^k$  =  $k$ -번째 기종점 통행을 위한 링크 $j$ 의 통행  
 량(변수),  $f^k \in R^{E}$ 는 벡터 형태,  
 $\delta_i^k$  =  $k$ -번째 기종점 통행의 노드  $i$ 의 무유출량.  
 노드 $i$ 가 기점노드이면,  $\delta_i^k = d^k$ , 노드 $i$ 가  
 종점노드이면,  $\delta_i^k = -d^k$ , 그 외 노드이면  
 $\delta_i^k = 0$ .  $\delta^k \in R^{N}$ 는 벡터 형태,  
 $P^k$  =  $k$ -번째 기종점을 연결하는 경로 집합, 첨  
 자  $p$ 는 특정 경로를 의미함.  
 $F_p^k$  =  $k$ -번째 기종점의  $p$ -번째 경로 통행량(변  
 수),  $F^k \in R^{P^k}$ 는 벡터형태,  
 $T^k$  =  $k$ -번째 기종점의 최단경로 통행시간(변  
 수),  $T \in R^{K}$ 는 벡터 형태,  
 $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$  (두 벡터  $x, y$ 의 내적).

크통행량  $\bar{f}_j$ 를 넘지 않는다. 즉,  $f_j$   
 $\leq \bar{f}_j$ 이다.

[가정 2-3] 링크  $j \in E$ 의 통행시간  $t_j$ 는 (i)  $f_j$   
 $< \bar{f}_j$  이면  $t_j = \bar{t}_j$  이고 (ii)  $f_j = \bar{f}_j$  이  
 면  $t_j \geq \bar{t}_j$  이다.

위의 [가정 2-1]은 Wardrop[21] 제 1원칙의 다른  
 표현이다. 본래 Wardrop 균형이란 임의의 기종점  
 에 대해 통행량이 배정된 경로들의 경로통행시간은  
 모두 같으며, 통행량이 배정되지 않은 경로는 이보  
 다 작은 경로통행시간이 될 수 없는 상태를 의미한  
 다. [가정 2-1]에 의할 때 임의의 기종점에 대해 경  
 로통행시간이 가장 짧은 경로집합외의 다른 경로를  
 개별 운전자가 선택하지 않을 것은 자명하다. 따라  
 서 [가정 2-1]를 만족하는 통행은 Wardrop 제 1원  
 칩을 만족함을 알 수 있다. [가정 2-2] 및 [가정  
 2-3]에서  $f_j = \bar{f}_j$  되는 링크를 혼잡링크라고 하며, 혼  
 잡링크에서 링크통행시간은 최소 링크통행시간( $\bar{t}_j$ )  
 이상의 값을 갖으며 그 값은 Wardrop 제 1원칙을  
 만족하도록 안정동력학 모형에 의해 결정된다.

안정동력학 모형에 의한 균형을 계산하기 위해  
 2가지 종류의 범위행렬(incidence matrix)을 정의한  
 다. 첫 번째 행렬  $A$ 는  $|N| \times |E|$  행렬로서 네트워크  
 의 토폴로지를 나타내는 노드-링크 범위행렬이다.  
 즉 노드  $i$ 가 링크  $j$ 의 시작노드이면  $A_{ij} = 1$ , 노드  $i$   
 가 링크  $j$ 의 끝노드이면  $A_{ij} = -1$ , 그 외 노드이면  
 $A_{ij} = 0$  두 번째 행렬  $B^k$  ( $k \in K$ )는  $|E| \times |P^k|$  링크-  
 경로 범위행렬로서, 링크  $j$ 가 경로  $p$ 에 포함되면  
 $B_{jp}^k = 1$ , 아니면  $B_{jp}^k = 0$ 이 된다.

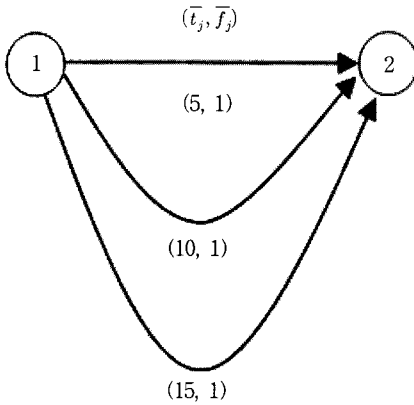
안정동력학 모형은 각 링크의 최소통행시간( $\bar{t}_j$ )  
 과 최대통행량( $\bar{f}_j$ )으로부터 다음의 3가지 가정을  
 만족하도록 균형을, 즉 각 링크의 링크통행시간( $t_j$ )  
 과 링크통행량( $f_j$ )을 결정한다.

[가정 2-1] (Wardrop 제 1원칙) 각 링크의 통행  
 시간이  $t$ 로 주어졌을 때, 각 운전자  
 들은 최단 시간의 경로를 선택하여  
 목적지까지 간다.

[가정 2-2] 링크  $j \in E$ 의 통행량  $f_j$ 는 최대 링

## 2.2 안정동력학 모형에서 최단경로 통행시간

안정동력학 모형에서 링크통행시간의 그래프는  
 [그림 1]에서 소개한 바 있다. 여기에서는 네트워크  
 에서 기종점간 수요가 증가할 때 최단경로 통행시



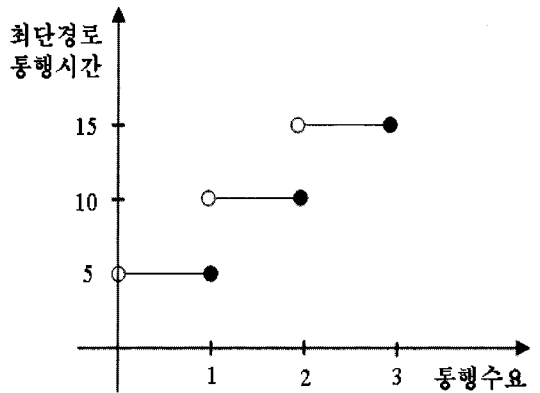
[그림 2] 안정동력학 특성을 보이기 위한 예제 네트워크

간이 어떻게 변화하는지를 본다. 이는 안정동력학 모형의 특성을 나타내 주며 다음 장에서 제시할 가변수요 안정동력학 모형과 관련이 있다. [그림 2]은 노드 2개, 링크 3개인 간단한 예제 네트워크이다. 링크순서는 위에서부터 차례로 링크 1, 링크 2, 링크 3으로 정하고, 링크밀 괄호 안의 두 숫자는 각각 최소 링크통행시간 및 최대 링크통행량이다.

이제 기중점(1, 2)의 수요가 0부터 3까지 증가할 때 각 링크의 통행시간과 통행량 및 기중점(1, 2)의 최단경로 통행시간의 변화를 보고자 한다. 먼저 안정동력학 모형은 통행량이 할당된 기중점간 경로의 경로통행시간이 동일하게 되도록 모든 혼잡링크의 링크통행시간을 결정하게 된다는 사실을 환기한다 [19]. <표 1>에서 기중점간 통행수요가  $0 < d \leq 1$  이라면 모든 수요가 링크1을 따라 통행하게 되며 이때의 최단경로 통행시간은 5가 된다. 만일 수요가

증가하여  $1 < d \leq 2$ 가 되면, 수요 중 1은 링크 1를 따라 통행하게 되고, 나머지 수요  $d-1$ 은 링크 2를 따라 통행하게 된다. 이때 링크1은 최대통행량이 흐르므로 혼잡링크가 된다. 최단경로 통행시간은 링크 2의 통행시간이 10이므로 혼잡링크인 링크1의 링크통행시간은 10으로 결정된다. 만일 수요가  $2 < d \leq 3$ 라면 링크1 및 링크 2는 혼잡링크가 되고 두 링크의 통행시간은 링크 3의 링크통행시간과 같은 15로 결정된다. 따라서 기중점간 수요 변화에 따른 최단경로 통행시간은 [그림 3]와 같이 비연속의 계단형 함수가 된다.

안정동력학 모형은 모형의 특성상 항상 기중점별로 통행수요와 최단경로 통행시간의 관계가 [그림 3]와 같이 계단형으로 주어지므로 이용자균형 모형에서처럼 두 값이 서로 역함수를 갖는다고 가정한다면 이는 지나친 가정이 된다.



[그림 3] 통행수요 변화에 따른 최단경로 통행시간 ([그림 2] 네트워크 적용시)

<표 1> 기중점(1, 2)간 수요 변화에 따른 최단경로 통행시간 변화

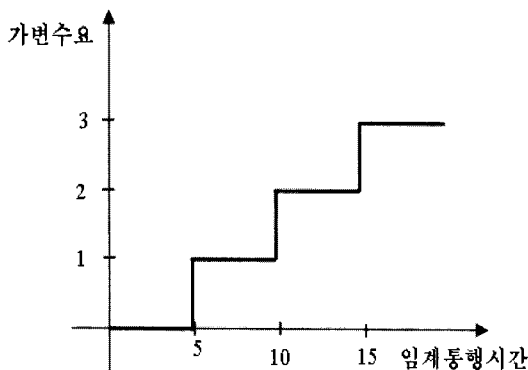
수요(d)	링크 1 $(\bar{t}_1, \bar{f}_1) = (5, 1)$		링크 2 $(\bar{t}_2, \bar{f}_2) = (10, 1)$		링크 3 $(\bar{t}_3, \bar{f}_3) = (15, 1)$		최단경로 통행시간
	통행시간 $(t_1)$	통행량 $(f_1)$	통행시간 $(t_2)$	통행량 $(f_2)$	통행시간 $(t_3)$	통행량 $(f_3)$	
$0 < d \leq 1$	5	d	-	0	-	0	5
$1 < d \leq 2$	10	1	10	d-1	-	0	10
$2 < d \leq 3$	15	1	15	1	15	d-2	15



### 3. 가변수요를 갖는 안정 동력학 모형

#### 3.1 가변수요와 임계통행시간

본 연구는 가변수요를 가정한다. 기종점간 통행수요는 가변적이며, 기종점간 최단경로 통행시간에 의해 결정된다고 가정한다. 그러나 제 2.2절에서 본 바와 같이 안정동력학 모형에서는 이용자균형 모형에서처럼 기종점별 수요를 기종점별 최단경로 통행시간에 대한 함수로 가정하거나 그 역함수가 존재한다고 가정하는 것은 무리이다. 따라서 본 연구에서는 제 1.4절에서 언급한 바와 같이 [11]의 계약비용 개념을 차용한다. 즉, 기점노드에서 종점노드까지의 경로통행시간이 어떤 '임계통행시간(critical travel time)'보다 커지면 모든 통행자는 통행을 보류하는 잠재 통행자가 되고, 경로통행시간이 임계통행시간보다 적을 때는 모든 잠재통행자는 실현 통행자가 된다고 본다. 그러나 경로통행시간과 임계통행시간이 같을 때는 통행자에 따라 실현통행자가 될 수도 있고 잠재통행자로 남아있을 수도 있다고 가정한다. 그러면 [그림 3]와 같이 최단경로 통행시간이 주어질 때 임계통행시간 변화에 따른 가변수요는 [그림 4]과 같은 그래프로 표현된다. 여기서 임계통행시간이 5, 10, 15일 때 임계통행시간 = 최단경로 통행시간이 되므로 가변수요는 각각 [0, 1], [1, 2] 및 [2, 3]사이의 어느 값도 될 수 있다.



[그림 4] 임계통행시간 변화에 따른 가변수요 ([그림 2] 네트워크 적용시)

#### 3.2 가상링크

링크 3개의 간단한 네트워크([그림 2])에 대해 임계통행시간에 따라 가변수요가 어떻게 결정되는지는 [그림 5]에서 보았다. 이제는 일반적인 네트워크에서 가변수요를 갖는 안정동력학 모형을 수립하고자 한다. 이를 위하여 원 네트워크에 기종점별로 새로이 가상링크를 추가한다. 즉, 추가되는 가상링크는 기종점별로 기점노드에서 종점노드를 직접 연결한다. 여기서 도입하는 가상링크 개념은 원래 이용자균형 모형에서 가변수요 통행배정을 위한 Gartner [14]의 3번째 접근방법의 아이디어를 차용한 것으로 이를 안정동력학 모형에 맞게 수정하여 적용하였다. 즉, 가상링크의 최소통행시간과 최대통행량은 각각 해당 기종점의 임계통행시간과 최대 잠재 통행수요로 놓았다. 그러면 가상링크와 관련된 표현은 아래와 같다.

$j_o^k$  =  $k$ -번째 기종점을 직접 연결하는 가상링크,  $k \in K$ ,

$\bar{t}_o^k$  = 가상링크  $j_o^k$ 의 최소통행시간으로 임계통행시간으로 놓음. 따라서  $\bar{t}_o^k = \pi^k$ ,  $\bar{t}_o \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$t_o^k$  = 가상링크  $j_o^k$ 의 통행시간(변수),  $t_o \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

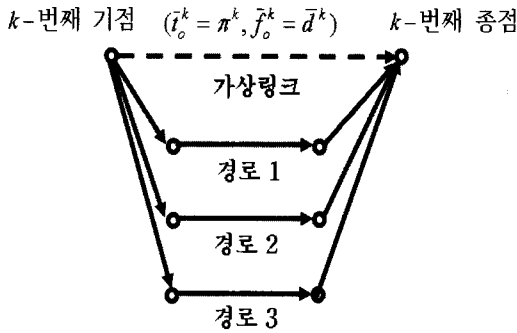
$\bar{f}_o^k$  = 가상링크  $j_o^k$ 의 최대통행량으로 최대 잠재 통행수요로 놓음. 따라서  $\bar{f}_o^k = d^k$ ,  $\bar{f}_o \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$f_o^k$  = 가상링크  $j_o^k$ 의 통행량(변수),  $f_o \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$\pi^k$  =  $k$ -번째 기종점의 임계통행시간,  $\pi \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$d^k$  =  $k$ -번째 기종점의 최대 잠재 통행수요,  $d \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태.

원래의 링크와 가상링크를 모두 포함하는 링크집합을  $\hat{E} (= E \cup \{j_o^k \mid k \in K\})$ 라고 표현하고,  $\hat{G}(N, \hat{E})$



[그림 5]  $k$ -번째 기종점에 대해 추가되는 가상링크

를 가상링크가 추가된 전체 네트워크이라고 표현한다. 그리고  $\hat{f}, \hat{t}, \bar{\hat{f}}, \bar{\hat{t}}, \hat{P}^k, \hat{F}^k, \hat{A}, \hat{B}^k$  를 가상링크를 포함한 표현들이라고 가정한다. 즉,

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f \\ f_o \end{pmatrix}, \quad \hat{t} = \begin{pmatrix} t \\ t_o \end{pmatrix}, \quad \bar{\hat{f}} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{f}_o \end{pmatrix}, \quad \bar{\hat{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{t}_o \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}^k = P^k \cup \{j_o^k\}, \quad \hat{F}^k = \begin{pmatrix} F^k \\ f_o^k \end{pmatrix},$$

$\hat{A} = |N| \times |\hat{E}|$  행렬, 노드  $i$ 가 링크  $j$ 의 시작노드이면  $\hat{A}_{ij} = 1$ , 끝노드이면  $\hat{A}_{ij} = -1$ , 모두 아니면  $\hat{A}_{ij} = 0$ ,

$\hat{B}^k = |\hat{E}| \times |\hat{P}^k|$  행렬, 링크  $j$ 가 경로  $p$ 에 포함되면  $\hat{B}_{jp}^k = 1$ , 아니면  $\hat{B}_{jp}^k = 0$ .

이제 가상링크가 추가된 네트워크에 대해 고정수요 안정동력학 모형[19, 정리 8, 기본정리 9]을 적용하면 어떻게 될 것인가를 고려한다. 이용자균형 모형에서는 수요를 내생변수로 잡고 추가된 네트워크에 통행배정 모형을 적용한 다음, 추가된 링크에 할당된 통행량을 제외할 때 원 네트워크에 남아있는 통행량이 그대로 가변수요 통행배정이 되었다. 그러나 안정동력학 모형에서는 이와 같은 유비가 성립되지 않는다. 안정동력학 모형의 특성상 어느 가상링크에 양의 통행량이 할당되었다면, 해당 기종점간 모든(양의 통행량을 갖는) 경로에 대해 가상링크의 링크통행시간 (= 임계통행시간)과 동일한 경로통행시간이 되도록 네트워크 내의 혼잡링크들의

링크통행시간이 결정된다. 따라서 가상링크를 제외한 원 네트워크의 링크통행량과 링크통행시간이 그대로 안정동력학 모형의 가변수요 통행배정의 균형해라고 보장할 수 없다. 다음 제 3.3절에서는 이들이 균형해가 되지 않을 수 있음을 보여준다.

### 3.3 단계별 최적화 모형

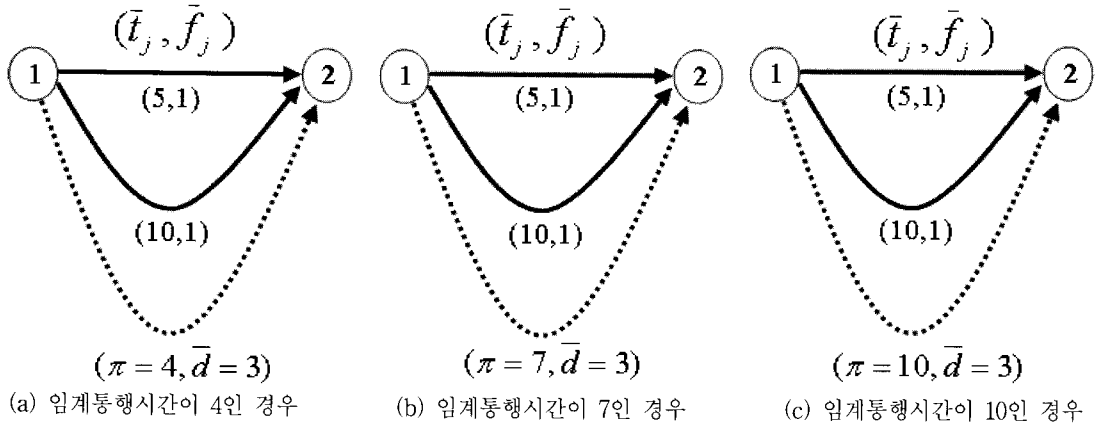
본 절에서는 일반적인 네트워크에서 임계통행시간이 기종점별로 주어질 때, [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]을 만족하는 가변수요와 링크통행량 및 링크통행시간을 계산하는 단계별 최적화 모형을 제시하고자 한다. 이를 위해 [그림 4]의 네트워크를 이용하여 단계별 모형의 아이디어를 소개한다. [그림 4]에서 원 네트워크는 기점노드 1과 종점노드 2를 연결하는 2개의 링크이며, 각 링크의 최소통행시간과 최대통행량은 링크 밑의 괄호 안에 표시되어 있다. 최대 잠재 통행수요는 3이라고 가정한다. 이제 가변수요 통행배정을 위해 기종점을 직접 연결하는 가상링크를 추가한다. 그리고 가상링크의 최소 링크통행시간은 임계통행시간으로 놓고 최대 링크통행량은 최대 잠재 통행수요인 3으로 놓는다. [그림 6]에서 (a), (b), (c)는 각각 임계통행시간이 4, 7, 10인 경우를 나타낸다.

[그림 6]에서 링크순서를 위에서부터 링크 1, 링크 2, 링크 3으로 놓는다. 그러면 링크 3은 가상링크이다. 이제 수요 3에 대해 안정동력학 모형([19]의 정리 8 및 기본정리 9)을 [그림 6]의 (a), (b), (c)에 적용한다. 그러면 [그림 6(a)]의 적용 결과는

$$\begin{aligned} \text{링크 1 통행량} &= 0, & \text{링크 2 통행량} &= 0, \\ \text{가상링크 통행량} &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{링크 1 통행시간} &= 5, & \text{링크 2 통행시간} &= 10, \\ \text{가상링크 통행시간} &= 4 \end{aligned}$$

이 된다. 이와 같은 경우 가상링크를 제외하면 원 네트워크의 가변수요는 0이 되고, 원 네트워크의 링



[그림 6] 단계별 모형을 설명하기 위한 그림

크통행량 및 링크통행시간이 그대로 가변수요 0일 때의 균형해가 된다.

마찬가지로 수요 3일 때 안정동력학 모형을 [그림 6(b)]에 적용한 결과는

링크 1 통행량 = 1,      링크 2 통행량 = 0,  
가상링크 통행량 = 2

링크 1 통행시간 = 7,      링크 2 통행시간 = 10,  
가상링크 통행시간 = 7

이 된다. 이와 같은 경우 가상링크를 제외하면 원 네트워크의 가변수요는 1이 되나, 원 네트워크의 링크통행량 및 링크통행시간은 가변수요 1일 때의 균형해가 아니다. 왜냐하면 원 네트워크에서 수요 1일 때의 균형해는 다음과 같기 때문이다.

링크 1 통행량 = 1,      링크 2 통행량 = 0,  
링크 1 통행시간 = 5,      링크 2 통행시간 = 10.

역시 수요 3일 때 안정동력학 모형을 [그림 4(c)]에 적용한 결과는

링크 1 통행량 = 1,      링크 2 통행량 = 1,  
가상링크 통행량 = 1

링크 1 통행시간 = 10,      링크 2 통행시간 = 10,  
가상링크 통행시간 = 10

이 된다. 이와 같은 경우 가상링크를 제외하면 원 네트워크의 가변수요는 2이 되며, 원 네트워크의 링크통행량 및 링크통행시간은 그대로 가변수요 2일 때의 균형해가 된다.

위의 예에서 확인할 수 있듯이 가상링크를 추가한 네트워크에 고정수요 모형을 적용한 후, 가상링크를 제외한 결과가 그대로 가변수요 안정동력학 모형의 균형해가 되지 않을 수 있음((b)의 경우)을 보았다. 그 이유는 가상링크의 링크통행시간(임계통행시간)과 같아지도록 혼잡링크의 링크통행시간을 결정하기 때문이다. 그러나 어떠한 경우도 고정수요 모형을 적용한 결과 가변수요가 결정되고, 이 가변수요에 대한 링크통행량은 결정된다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 단계별 모형을 제시한다.

단계 1 : 기종점별로 가상링크를 추가한 네트워크에 최대 잠재 통행수요를 고정수요로 하고 링크통행량을 결정하는 고정수요 안정동력학 모형을 적용한다. 그러면 이로부터 기종점별 가변수요와 이에 대한 링크통행량이 결정된다.

단계 2 : 단계 1에서 결정된 가변수요를 갖고 가상링크를 제외한 원 네트워크에 대해 안정동력학 모형을 적용하여 링크통행 시간과 최단경로 통행시간을 결정된다.

단계 3 : 단계 1에서 결정된 가변수요와 링크통행량에 해당되는 기종점별 경로통행량을 결정한다.

이제 일반적 네트워크에 대한 단계별 모형을 구체적으로 표현하고, 이에 의해 구해지는 가변수요, 링크통행량 및 링크통행시간이 [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]을 만족한다는 것을 보이고자 한다.

첫째, 가상링크가 추가된 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 수요가  $\bar{d}$ (최대 잠재 통행수요)일 때 아래의 모형 (3-1)을 적용하여 링크통행량을 결정한다.

Minimize

$$\langle \hat{f}, \hat{t} \rangle \quad (3-1a)$$

subject to

$$\hat{f} = \sum_{k \in K} \hat{f}^k \leq \bar{f}, \quad (3-1b)$$

$$\hat{A} \hat{f}^k = \delta^k, \quad k \in K, \quad (3-1c)$$

$$\hat{f}^k \geq 0, \quad k \in K \quad (3-1d)$$

여기서  $\delta^k$ 는  $k$ -기종점에서 노드에서의 의무유출량으로서, 노드  $i$ 가 기점이면  $\delta^k = \bar{d}^k$ 이고, 노드  $i$ 가 종점이면  $\delta^k = -\bar{d}^k$ 이고, 그 외 노드에서는  $\delta^k = 0$ 이다.

첫째 단계에서 구한 가변수요( $\bar{d} - f_o^*$ )를 이용하여 두번째 단계에서는 링크통행시간과 최단경로 통행시간을 결정한다. 첫째 단계에서 가상링크가 추가된 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 대해 모형 (3-1)을 적용한 반면, 두 번째 단계에서는 가상링크를 제외한 원래의 네트워크  $G(N, E)$ 에 모형 (3-2)를 적용한다.

Maximize

$$\langle \bar{d} - f_o^*, T \rangle - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-2a)$$

subject to

$$\langle B_p^k, t \rangle \geq T^k, \quad p \in P^k, \quad k \in K, \quad (3-2b)$$

$$t \geq \bar{t} \quad (3-2c)$$

여기서  $B_p^k$ 는 행렬  $B^k$ 의  $p$ 번째 열벡터를 의미한다. 마지막 단계에서는 첫째 단계에서 얻은 가변수요( $\bar{d} - f_o^*$ )와 링크통행량( $f^{k*}$ )을 이용하여 경로별 통행량  $F_p^k$ 을 모형 (3-3)으로부터 구한다.

Minimize

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} F_p^k \quad (3-3a)$$

subject to

$$\sum_{p \in S^k} F_p^k = d^k, \quad k \in K, \quad (3-3b)$$

$$B^k F^k = f^{k*}, \quad k \in K, \quad (3-3c)$$

$$F^k \geq 0, \quad k \in K. \quad (3-3d)$$

모형 (3-3)의 목적함수는 특별한 의미가 없으며 제약식 (3-3b)~(3-3d)를 만족하는 경로별 통행량을 최적화 문제로 표현하기 위한 것이다.

기본정리 3-1은 추가된 네트워크에 모형 (3-1)을 적용해 구한 균형해에서 가상링크 통행량을 제외하면 원 네트워크에 있는 링크통행량은  $\bar{d} - f_o^*$ 를 고정수요로 놓았을 때의 안정동력학 모형의 링크통행량이 된다는 것을 보인다. 그러나 이로부터 링크통행 시간도 그대로 균형해가 된다는 것을 의미하지는 않는다. 균형해로서의 링크통행시간은 모형 (3-2)로부터 구해진다.

[기본정리 3-1] 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 수요  $\bar{d}$ 일 때

모형 (3-1)의 최적해  $\hat{f}^* = \begin{pmatrix} f_o^* \\ f_o^* \end{pmatrix}$ 의

$f_o^*$ 는 원 네트워크  $G(N, E)$ 에 수

요  $\bar{d} - f_o^*$  일 때 모형 (3-1)의 최적해가 된다.

<증명> 귀류법에 의해 증명한다. 원 네트워크  $G(N, E)$ 에 대해 모형 (3-1)에 더 좋은 해  $f^{\dagger}$ 가 존재한다고 가정한다. 즉,  $\langle f^{\dagger}, \bar{t} \rangle < \langle f^*, \bar{t} \rangle$ 이고,  $f^{\dagger} = \sum_{k \in K} f^{\dagger k} \leq \bar{f}$ ,  $Af^{\dagger k} = \delta^k$  ( $k \in K$ ),  $f^{\dagger k} \geq 0$  ( $k \in K$ )라고 가정한다. 여기서  $\delta^k$ 는  $k$ -기종점의 노드 의무유출량으로서, 노드  $i$ 가 기점이면  $\delta^k = \bar{d}^k - f^{*k}$ 이고, 노드  $i$ 가 종점이면  $\delta^k = -\bar{d}^k + f^{*k}$ 이고, 그 외 노드에서는  $\delta^k = 0$ 이다. 이제 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 수요  $\bar{d}$ 일 때 모형 (3-1)의 새로운 해  $\hat{f}^{\dagger} = \begin{pmatrix} f^{\dagger} \\ f_o^* \end{pmatrix}$ 는 우선 모형의 제약식을 모두 만족함을 알 수 있다. 새로운 해의 목적함수 값을 계산하면  $\langle \hat{f}^{\dagger}, \bar{t} \rangle \leq \langle f^{\dagger}, \bar{t} \rangle + \langle f_o^*, \bar{t}_o \rangle < \langle f^*, \bar{t} \rangle + \langle f_o^*, \bar{t}_o \rangle = \langle \hat{f}^*, \bar{t} \rangle$  이므로  $\hat{f}^{\dagger} = \begin{pmatrix} f^{\dagger} \\ f_o^* \end{pmatrix}$ 가 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 수요  $\bar{d}$ 일 때 모형 (3-1)의 최적해라는 가정에 모순이 된다.

기본정리 3-1에 의해  $f^*$ 가  $G(N, E)$ 에 대해 수요  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때 모형 (3-1)의 최적해가 된다면 이에 대한 쌍대문제에 해당되는 모형 (3-2)로부터 얻어지는  $t^*$  및  $T^*$ 는  $f^*$ 와 함께  $G(N, E)$ 에 대해 수요  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때의 안정동력학 모형의 균형해가 된다. 우리는 정리 3-3에서 이를 보일 것이다. 먼저 정리 3-3의 증명을 위한 기본 정리 3-2를 소개한다.

[기본정리 3-2] 링크 통행시간( $t^*$ ) 및 링크 통행량( $f^*$ )이 모든 기종점간 통행수요  $d^k$  ( $k \in K$ )에 대해 [가정 2-1], [가정 2-2] 및 [가정 2-3]을 만족한다고 가정한다. 그러면 모든 기종점( $k$ )에 대해

$\sum_{p \in S^k} F_p^k = d^k$ 이 성립하고  $\sum_{k \in K} B^k F^k = f^*$ 을 만족하는 기종점간 경로통행량  $F^k$ 가 존재하며, 그중 양의 통행량이 할당된 경로 ( $F_p^k > 0$ 인 경로  $p$ )의 경로통행시간은 모두  $k$ -기종점의 최단 경로 통행시간과 동일하다.

<증명> 귀류법에 의해 증명한다. 만일  $\sum_{p \in S^k} F_p^k = d^k$ 와  $\sum_{k \in K} B^k F^k = f^*$ 를 동시에 만족하는 기종점간 경로통행량  $F^k$ 가 존재하지 않는다면 이는 링크통행량( $f^*$ )이 모든 기종점간 통행수요  $d^k$  ( $k \in K$ )에 대해 [가정 2-1]을 만족한다는 가정에 모순된다. 또한  $F_p^k > 0$ 인 모든 경로  $p$ 의 경로통행시간은  $k$ -기종점의 최단경로 통행시간과 모두 동일함은 [가정 2-1]의 Wardrop 제1원칙을 의미한다(증명끝).

이제 임계통행시간이 기종점별로 주어질 때, [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]을 만족하는 가변수요, 링크 통행량 및 링크 통행시간이 단계별 모형에 의해 구할 수 있음을 보인다.

[정리 3-3] 임의의 임계통행시간  $\pi$ 에 대해 모형 (3-1)로부터 얻어진  $f^*$ , 모형 (3-2)로부터 얻어진  $t^*$ 와  $T^*$ 는 [가정 2-1], [가정 2-2] 및 [가정 2-3]을 만족한다. 이에 대응되는 경로통행량  $F_p^{k*}$  ( $k \in K, p \in P^k$ )은 모형 (3-3)으로부터 얻어진다. 이때의 가변수요는  $d^* = \bar{d} - f_o^*$ 이고, 기종점간 최단 경로 통행시간은 모형 (3-2)로부터 구해진  $T^*$ 이다.

<증명> 먼저 임의의 임계통행시간  $\pi$ 에 대해 모형 (3-1)로부터 얻어진 링크통행량  $f^*$ , 모형 (3-2)로부터 얻어진 링크통행시간

$t^*$  및 최단경로 통행시간  $T^*$ 이 원 네트 워크  $G(N, E)$ 에서  $d^* = \bar{d} - f_o^*$ 일 때, [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]을 만족하는 안정동력학 모형의 균형해가 됨을 증명한다. 이를 위해 기본정리 3-1에 의해 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 수요  $\bar{d}$ 일 때 모형 (3-1)의 최적해  $f^* = \begin{pmatrix} f_o^* \\ f_o^* \end{pmatrix}$ 의  $f^*$ 는 원 네트 워크  $G(N, E)$ 에 수요  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때 모형 (3-1)의 최적해가 됨을 환기한다. 이제 모형 (3-1)은 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에서 수요가  $\bar{d}$ 일 때 [19, 기본정리 9]에서 소개하는 모형에 해당되고, 모형 (3-2)는 네트워크  $G(N, E)$ 에서 수요가  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때 [19, 정리 8]에서 소개하는 모형에 해당되므로  $f^*$ 는  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에서 수요가  $\bar{d}$ 일 때의 균형 링크통행량이며 동시에 네트 워크  $G(N, E)$ 에서 수요가  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때의 균형 링크통행량이 된다. 또한  $t^*$  및  $T^*$ 는 네트워크  $G(N, E)$ 에서 수요가  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때의 균형 링크통행시간 및 최단경로 통행시간이므로  $f^*$ ,  $t^*$  및  $T^*$ 는 네트 워크  $G(N, E)$ 에서 수요가  $\bar{d} - f_o^*$ 일 때의 균형값(링크통행량, 링크통행시간 및 최 단경로 통행시간)이 된다. 왜냐하면 [19]에서 그들이 보인 바와 같이 정리 8의 모형과 기본정리 9의 모형은 모두 안정 동력학 모형으로서 쌍대관계에 있기 때문이다. 따라서  $f^*$ ,  $t^*$  및  $T^*$ 는 [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]을 만족한다. 다음으로  $f^*$ ,  $t^*$  및  $T^*$ 에 대응되는 경로 통행량  $F_p^{k^*}$  ( $k \in K$ ,  $p \in P^k$ )은 모형 (3-3)으로부터 얻어짐은 기본정리 3-2에 의 한다(증명끝).

이제까지 가변수요가 최단경로 통행시간과 임계 통행시간의 관계에서 결정됨을 보았다. 그러나 임

계통행시간에 대한 가변수요의 연속성(좌-연속성)에 의해 최단경로 통행시간과 임계통행시간의 관계를 파악할 수 있다. 양의 임계통행시간 범위( $\pi^k > 0$ )에 대해 [그림 3]와 [그림 4]로부터 다음 관계를 확인할 수 있다.

- (i)  $d^k(\pi^k) = \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$  이면  $T^k < \pi^k$ 이 되고,  
(ii)  $d^k(\pi^k) > \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$  이면,  $T^k = \pi^k$ 이 된다.

먼저 [그림 4]에서 임계통행시간이  $5 < \pi^k \leq 10$ 인 경우  $d^k(\pi^k) = \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$ 이 성립한다. 이때 가변수요는 1이 되며, [그림 3]에서 보면 수요가 1일 때 최단경로 통행시간은 5가 되어  $T^k < \pi^k$ 이 된다. 두 번째 경우로서  $d^k(\pi^k) > \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$ 되는 경우는 [그림 4]에서 임계통행시간이 5, 10, 또는 15인 경우이고, 대응되는 가변수요는 각각 [0, 1], (1, 2), (2, 3) 범위 내의 한 값을 갖는 경우이다. 이 경우는 [그림 3]에서 보듯이 최단경로 통행시간이 각각 5, 10 및 15인 경우로  $T^k = \pi^k$ 이 된다.

[정리 3-4] 모형 (3-1)로부터 얻어진  $f^*$ , 모형 (3-2)로부터 얻어진  $t^*$ 와  $T^*$ 에 대해 임의의 기중점( $k$ )에 대해 가변수요( $d^k$ ), 최단경로 통행시간( $T^k$ ) 및 임계통행시간( $\pi^k > 0$ )과의 관계는 다음과 같다. (i)  $d^k(\pi^k) = \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$  이면  $T^k < \pi^k$ , (ii)  $d^k(\pi^k) > \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$  이면,  $T^k = \pi^k$ 이다.

<증명> 통행수요  $\bar{d}$ 에 대해 네트워크  $\hat{G}(N, \hat{E})$ 에 대한 모형 (3-1)을 적용하여 가상링크  $j_o^k$ 에 통행량  $f_o^{*k}$ 이 할당되었다고 하자. 이제 가상링크  $j_o^k$ 의 최소 링크통행시간을  $\pi^k$ 에서  $(\pi^k - \epsilon)$ 로 감소하여 모형 (3-1)을 다시 적용할 때 다음의 두 경우가

있다. 여기서  $\epsilon$ 는 충분히 작은 양수이다.

- (i) 가상링크에 할당되는 통행량이 변화 없이  $f_o^{*k}$ 인 경우
- (ii) 가상링크에 할당되는 통행량이  $f_o^{*k}$ 보다 증가하는 경우

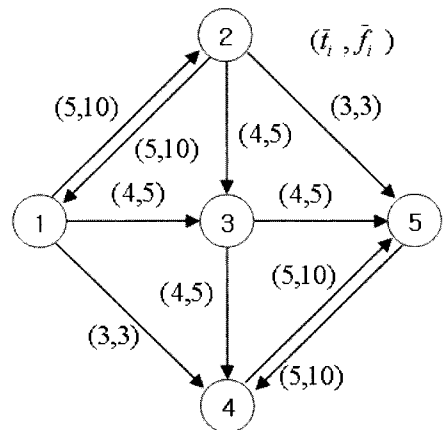
여기에서 안정동력학 모형의 특성을 환기한다. 안정동력학 모형에서 혼잡링크의 링크 통행시간은 각 기종점에 대해 통행량이 할당된 기종점간 경로가 모두 동일한 경로통행시간을 갖도록 결정되어진다. 따라서 가상링크에 통행량이 할당되었다는 것은 다른 경로에 포함된 혼잡링크들의 링크통행시간이 가상링크의 최소 링크통행시간(임계통행시간)과 같아지도록 결정되었다는 뜻이다. 이제 (i)의 경우는 가상링크의 최소 링크통행시간을  $\pi^k$ 에서  $(\pi^k - \epsilon)$ 로 감소하여도 가상링크에 할당되는 통행량에 변화가 없는 경우로서, 가상링크를 제외한 원 네트워크에서 수요를  $d - f_o^{*k}$ 로 하고 안정동력학 모형 (3-2)을 적용한다면 최단경로 경로시간이  $\pi^k$ 보다 적어진다는 뜻이다. 즉, 최단경로 통행시간이  $\pi^k$ 보다 얼마간 적기 때문에 가상링크의 최소 링크통행시간  $\pi^k$ 가 그 값으로 감소되기까지 가상링크에 할당되는 통행량에는 변화가 없게 된다. 즉,  $d^k(\pi^k) = \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$ 일 때  $T^{*k} < \pi^k$ 이 된다.

이와 달리 가상링크의 최소 링크통행시간을  $\pi^k$ 에서  $(\pi^k - \epsilon)$ 로 감소할 때, 가상링크에 할당되는 통행량이 증가하는 경우 (ii)에 대해서는 가상링크를 제외한 원 네트워크에서 수요를  $d - f_o^{*k}$ 로 하고 안정동력학 모형 (3-2)을 적용한다면 최단경로 경로시간이  $\pi^k$ 와 같게 된다는 뜻이다. 이런 경우에는 통행량이 할당된 경로 중에 최소 링크통행시간만으로 구

성된 경로가 반드시 존재한다. 그리고 이 경로 때문에 최단경로 경로시간이  $\pi^k$ 로 유지되었던 것이며, 다른 경로는 링크에 포함된 혼잡링크의 링크통행시간을 조정하여 경로통행시간을  $\pi^k$ 와 같아지게 하였던 것이다. 따라서 가상링크의 최소 링크통행시간을  $\pi^k$ 에서  $(\pi^k - \epsilon)$ 로 감소하여 모형 (3-1)을 다시 적용하면 최소 링크통행시간만으로 구성된 경로의 할당량은 가상링크로 옮겨지게 된다. 그리고 다른 경로들은 링크에 포함된 혼잡링크의 링크통행시간을 조정하여 경로통행시간을  $(\pi^k - \epsilon)$ 와 같아지게 한다. 즉,  $d^k(\pi^k) > \lim_{\pi \rightarrow \pi^k - 0} d^k(\pi)$ 일 때  $T^{*k} = \pi^k$ 이 됨을 알 수 있다(증명끝).

### 4. 네트워크 적용 예

여기에서는 제 3장에서 제안한 가변수요를 갖는 안정동력학 모형의 네트워크 적용 예를 단일 기종점의 경우와 다수 기종점의 경우로 나누어 각각 적용한다. 적용 네트워크는 [그림 7]과 같으며, 네트워크의 링크순서와 최소 링크통행시간 및 최대 링크통행량을 <표 2>로 정리하였다.



[그림 7] 가변수요를 갖는 안정동력학 모형 적용 네트워크

〈표 2〉 링크별 최소 링크통행시간 및 최대 링크통행량

링크 순서	시작노드-끝노드	최소 링크통행시간( $\bar{t}_j$ )	최대 링크통행량( $\bar{f}_j$ )
링크 1	1~2	5	10
링크 2	1~3	4	5
링크 3	1~4	3	3
링크 4	2~1	5	10
링크 5	2~3	4	5
링크 6	2~5	3	3
링크 7	3~4	4	5
링크 8	3~5	4	5
링크 9	4~5	5	10
링크 10	5~4	5	10

〈표 3〉 가상링크의 최소 링크통행시간 및 최대 링크통행량(단일 기종점)

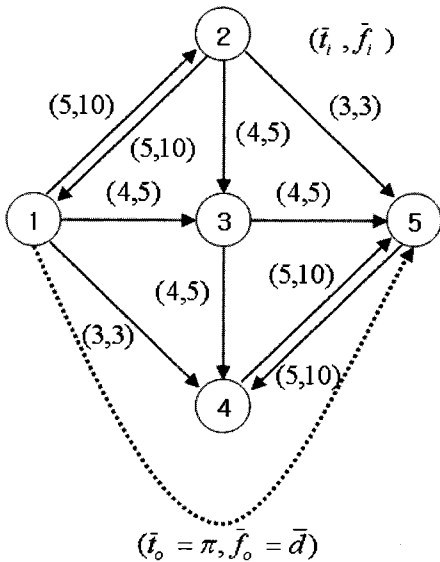
가상링크의 링크순서	시작노드-끝노드	최소 링크통행시간( $\bar{t}_i$ )	최대 링크통행량( $\bar{f}_i$ )
링크 11	1~5	$\pi(5\sim 20)$	$\bar{d} = 16$

4.1 단일 기종점 적용 예

먼저 단일 기종점 적용 예를 보이다. 기점노드를 1, 종점노드를 5로 하는 단일 기종점(1, 5)의 임계통

행시간을  $\pi$ 라고 한다. 이 예에서 우리는 임계통행시간을 5부터 20까지 5씩 변화시켜 갈 때 가변수요와 그 때의 링크통행시간 및 링크통행량을 구하려고 한다. 기종점(1, 5)의 최대 잠재 통행수요는  $\bar{d} = 16$  이라고 가정한다. [그림 8]에서 점선으로 표현된 링크는 가상링크이며, 가상링크의 최소 링크통행시간은 임계통행시간  $\pi$ 이고, 최대 링크통행량은  $\bar{d} = 16$ 이다.

이제 기종점(1, 5)의 가능한 모든 기종점간 통행 경로를 정리하면 <표 4>과 같다. 여기서 경로 ⑦은 가상링크에 의한 경로이다.



[그림 8] 가상링크가 추가된 네트워크 (단일 기종점)

〈표 4〉 기종점(1~5)의 가능한 통행경로

통행경로	경로구성
경로 ①	1-2-3-4-5
경로 ②	1-2-3-5
경로 ③	1-2-5
경로 ④	1-3-4-5
경로 ⑤	1-3-5
경로 ⑥	1-4-5
(가상) 경로 ⑦	1-5



$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 111000 \\ 000110 \\ 000001 \\ 000000 \\ 000000 \\ 110000 \\ 001000 \\ 100100 \\ 010010 \\ 100101 \\ 000000 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1110000 \\ 0001100 \\ 0000010 \\ 0000000 \\ 1100000 \\ 0010000 \\ 1001000 \\ 0100100 \\ 1001010 \\ 0000000 \\ 0000001 \end{bmatrix}$$

〈표 5〉 임계통행시간 변화에 따른 링크통행시간 및 링크통행량 변화(단일 기종점)

링크	$(\bar{t}_j, \bar{f}_j)$	임계통행시간 $\pi=5$		임계통행시간 $\pi=10$		임계통행시간 $\pi=15$		임계통행시간 $\pi=20$	
		통행 시간( $t_j$ )	통행량 ( $f_j$ )	통행 시간( $t_j$ )	통행량 ( $f_j$ )	통행 시간( $t_j$ )	통행량 ( $f_j$ )	통행 시간( $t_j$ )	통행량 ( $f_j$ )
1~2	(5, 10)	5	0	5	3	5	3	5	8
1~3	(4, 5)	4	0	4	5	4	5	9	5
1~4	(3, 3)	3	0	3	3	3	3	13	3
2~1	(5, 10)	5	0	5	0	5	0	5	0
2~3	(4, 5)	4	0	4	0	4	0	4	5
2~5	(3, 3)	3	0	3	3	3	3	13	3
3~4	(4, 5)	4	0	4	0	4	0	4	5
3~5	(4, 5)	4	0	4	5	4	5	9	5
4~5	(5, 10)	5	0	5	3	5	3	5	8
5~4	(5, 10)	5	0	5	0	5	0	5	0
1~5(가상)	$(\pi, 16)$	5	16	10	5	15	5	20	0

〈표 6〉 임계통행시간 변화에 따른 가변수요 및 기종점간 경로별 통행량(단일 기종점)

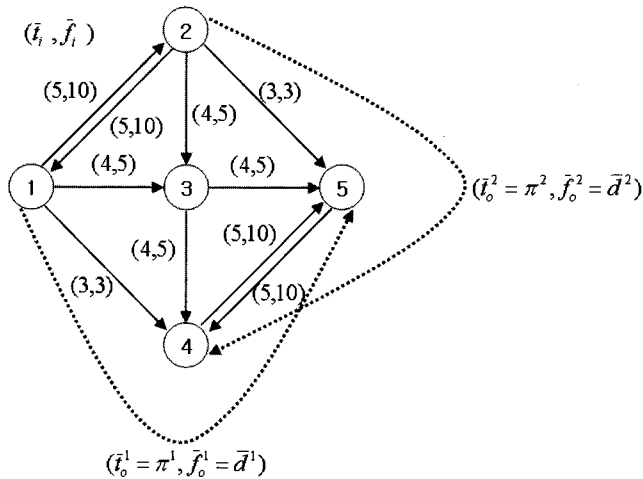
임계 통행시간	최단경로 통행시간*	가변 수요**	경로별 통행량							통행량 합계
			경로 ①	경로 ②	경로 ③	경로 ④	경로 ⑤	경로 ⑥	경로 ⑦	
5	8	0	0	0	0	0	0	0	16	16
10	8	11	0	0	3	0	5	3	5	16
15	8	11	0	0	3	0	5	3	5	16
20	18	16	0	5	3	5	0	3	0	16

(주) \* 최단경로 통행시간은 가상링크를 제외한 기종점간 경로 중 최단경로 통행시간이다.

\*\* 가변수요는 최대 잠재 통행수요( $\bar{d} = 16$ )에서 가상링크(경로 7)에 할당된 통행량을 제외한 값이다.

<표 7> 기종점(1, 5)의 경로별 통행시간 및 통행량( $\pi = 10$ 일 때)

경로	경로구성	경로 통행시간	최단경로 여부	통행량
경로 ①	1-2-3-4-5	$5+4+4+5=18$		0
경로 ②	1-2-3-5	$5+4+4=13$		0
경로 ③	1-2-5	$5+3=8$	*	3
경로 ④	1-3-4-5	$4+4+5=13$		0
경로 ⑤	1-3-5	$4+4=8$	*	5
경로 ⑥	1-4-5	$3+5=8$	*	3
합계(가변수요)				11



[그림 9] 두 개의 가상링크가 추가된 네트워크(다수 기종점)

<표 2>, <표 3> 및 <표 4>의 링크순서와 경로 순서에 의한 노드-링크 범위행렬  $A$ , 가상링크가 추가된 노드-링크 범위행렬  $\hat{A}$ , 링크-경로 범위행렬  $B$  및 가상링크가 추가된 링크-경로 범위행렬  $\hat{B}$  는 아래와 같이 된다. 여기서 윗첨자  $T$ 는 전치(transpose)행렬을 의미한다.

이제 임계통행시간 변화에 따른 모형 (3-1) 및 모형 (3-2)의 적용 결과를 <표 5>와 <표 6>로 정리하였다.

예를 들어 <표 6>에서 임계통행시간  $\pi = 10$ 일 때, 통행량이 할당된 경로는 경로 ③, 경로 ⑤, 경로 ⑥, 경로 ⑦이며 가상경로인 경로 7를 제외하고 각 경로에 포함된 링크의 링크통행시간을 <표 5>에서

<표 8> 가상링크의 최소 링크통행시간 및 최대 링크통행흐름(다수 기종점)

가상링크의 링크순서	시작노드-끝노드	최소 링크통행시간( $\bar{t}_j$ )	최대 링크통행흐름( $\bar{f}_j$ )
링크 11	1~5	$\pi^1(6, 12)$	$\bar{d}^1=12$
링크 12	2~4	$\pi^2(6, 12)$	$\bar{d}^2=12$

<표 9> 기종점(1-5)와 기종점(2, 4)의 가능한 동행경로

기종점(1, 5)의 동행경로	경로구성	기종점(2, 4)의 동행경로	경로구성
경로 1-①	1-2-3-4-5	경로 2-①	2-1-3-4
경로 1-②	1-2-3-5	경로 2-②	2-1-3-5-4
경로 1-③	1-2-5	경로 2-③	2-1-4
경로 1-④	1-3-4-5	경로 2-④	2-3-4
경로 1-⑤	1-3-5	경로 2-⑤	2-3-5-4
경로 1-⑥	1-4-5	경로 2-⑥	2-5-4
(가상)경로 1-⑦	1-5	(가상)경로 2-⑦	2-4

찾아 계산하면 <표 7>과 같으며 각 경로의 경로 동행시간은 모두 최단경로 동행시간인 8이 된다. 결국 모형 (3-1) 및 모형 (3-2)를 적용한 결과, 링크동행시간과 링크동행량과 동행량이 할당된 기종점간 경로는 [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]이 성립됨을 확인할 수 있다.

4.2 다수 기종점 적용 예

이제 기존의 기종점(1, 5)에 기종점(2, 4)를 추가

한 다수 기종점 적용 예를 보인다. 기종점(1, 5) 및 기종점(2, 4)의 임계동행시간을 각각  $\pi^1, \pi^2$ 로 표시하고, 임계동행시간이 6 또는 12일 때 가변수요와 그 때의 링크동행시간과 링크동행량을 구하려고 한다. 기종점간 최대 잠재 동행수요는 모두  $\bar{d}^1 = \bar{d}^2 = 12$ 라고 가정한다. [그림 7]은 원래의 네트워크에 각 기종점을 연결하는 가상링크를 추가한 네트워크이며, 두 가상링크의 최소 링크동행시간 및 최대 링크동행량은 각각  $\pi^1, \pi^2$  및  $\bar{d}^1 = \bar{d}^2 = 12$ 이다.

<표 10> 임계동행시간 변화에 따른 링크동행시간 및 링크동행량 변화(다수 기종점)

링크	$(\bar{t}_i, \bar{f}_i)$	임계동행시간 $(\pi^1, \pi^2) = (6, 6)$		임계동행시간 $(\pi^1, \pi^2) = (6, 12)$		임계동행시간 $(\pi^1, \pi^2) = (12, 6)$		임계동행시간 $(\pi^1, \pi^2) = (12, 12)$	
		동행 시간( $t_j$ )	동행량 ( $f_j$ )	동행 시간( $t_j$ )	동행량 ( $f_j$ )	동행 시간( $t_j$ )	동행량 ( $f_j$ )	동행 시간( $t_j$ )	동행량 ( $f_j$ )
1~2	(5, 10)	5	0	5	0	5	3	5	3
1~3	(4, 5)	4	0	4	0	4	5	4	5
1~4	(3, 3)	3	0	3	3	3	3	3	3
2~1	(5, 10)	5	0	5	3	5	0	5	0
2~3	(4, 5)	4	0	4	5	4	0	4	5
2~5	(3, 3)	3	0	3	3	3	3	3	3
3~4	(4, 5)	4	0	4	5	4	0	4	5
3~5	(4, 5)	4	0	4	0	4	5	4	5
4~5	(5, 10)	5	0	5	0	5	3	5	3
5~4	(5, 10)	5	0	5	3	5	0	5	0
1~5(가상)	$(\pi^1, 12)$	6	12	6	12	12	1	12	1
2~4(가상)	$(\pi^2, 12)$	6	12	12	1	6	12	12	7

〈표 11〉 임계통행시간 변화에 따른 가변수요 및 기종점간 경로 통행량 변화(다수 기종점)

임계통행시간	$(\pi^1, \pi^2)$	(6, 6)	(6, 12)	(12, 6)	(12, 12)
최단경로 통행시간*	기종점(1, 5)	-	8	8	8
	기종점(2, 4)	-	8	8	8
가변수요**	기종점(1, 5)	0	0	11	11
	기종점(2, 4)	0	11	0	5
기종점(1, 5) 경로별 통행량	경로 1-①	0	0	0	0
	경로 1-②	0	0	0	0
	경로 1-③	0	0	3	3
	경로 1-④	0	0	0	0
	경로 1-⑤	0	0	5	5
	경로 1-⑥	0	0	3	3
	(가상) 경로 1-⑦	12	12	1	1
기종점(2, 4) 경로별 통행량	경로 2-①	0	0	0	0
	경로 2-②	0	0	0	0
	경로 2-③	0	3	0	0
	경로 2-④	0	5	0	5
	경로 2-⑤	0	0	0	0
	경로 2-⑥	0	3	0	0
	(가상) 경로 2-⑦	12	1	12	7

(주) \* 최단경로 통행시간은 가상링크를 제외한 기종점간 경로 중 최단경로 통행시간이다.

\*\* 가변수요는 기종점간 최대 잠재 통행수요( $\bar{d} = 12$ )에서 가상경로에 할당된 통행량을 제외한 값이다.

기종점(1, 5) 및 기종점(2, 4)의 가능한 통행경로를 정리하면 <표 9>과 같다.

이제 다수 기종점 통행에 대한 임계통행시간 변화에 따른 모형 (3-1) 및 모형 (3-2)의 적용 결과는 <표 10>와 같으며, 이를 경로별로 정리하면 <표 11>과 같다.

예를 들어 <표 11>에서 임계통행시간  $(\pi^1, \pi^2) = (12, 12)$ 일 때, 통행량이 할당된 경로는 기종점(1, 5)에 대해서 경로 1-③, 경로 1-⑤, 경로 1-⑥, 가상경

로 1-⑦과 기종점(2, 4)에 대해서는 경로 2-④, 가상경로 2-⑦이며 가상경로를 제외하고 각 경로에 포함된 링크의 링크통행시간을 <표 10>에서 찾아 계산하면 <표 12>과 같다. 통행량이 할당된 각 경로의 경로통행시간은 모두 최단경로 통행시간인 8이 된다. 결국 다수 기종점 적용의 경우도 단계별 모형의 적용결과는 [가정 2-1], [가정 2-2], [가정 2-3]이 성립됨을 확인할 수 있다.

〈표 12〉 기종점(1, 5)와 기종점(2, 4)의 경로별 통행시간 및 통행량( $\pi^1 = 12, \pi^2 = 12$ 일 때)

기종점	경로	경로구성	경로 통행시간	최단경로 여부	통행량
기종점 (1, 5)	경로 1-①	1-2-3-4-5	5+4+4+5=18		0
	경로 1-②	1-2-3-5	5+4+4=13		0
	경로 1-③	1-2-5	5+3=8	*	3
	경로 1-④	1-3-4-5	4+4+5=13		0
	경로 1-⑤	1-3-5	4+4=8	*	5
	경로 1-⑥	1-4-5	3+5=8	*	3
	합계(가변수요)				
기종점 (2, 4)	경로 2-①	2-1-3-4	5+4+4=13		0
	경로 2-②	2-1-3-5-4	5+4+4+5=18		0
	경로 2-③	2-1-4	5+3=8	*	0
	경로 2-④	2-3-4	4+4=8	*	5
	경로 2-⑤	2-3-5-4	4+4+5=13		0
	경로 2-⑥	2-5-4	3+5=8	*	0
	합계(가변수요)				

### 5. 결론 및 추후 연구

본 논문은 Nesterov와 de Palma[19]가 제안한 고정수요 안정동력학 모형을 가변수요 모형으로 확장한 연구이다. 안정동력학 모형은 인위적인 링크 비용함수를 가정하지 않고, 링크별로 아주 기본적인 2개의 물리량(최소 링크통행시간과 최대 링크통행량)과 단순한 가정으로부터 세워진 모형이다. 그러나 안정동력학 모형은 쉽게 해를 제공할 뿐만 아니라 혼잡 교통망을 위한 분석 및 설계에 기본적인 결과를 제공하는 유용한 도구로 평가되고 있다.

본 연구에서는 안정동력학에 의한 가변수요 통행배정 모형을 수립하였다. 이를 위해서 기종점간 임계통행시간이 주어진다고 가정하였다. 즉, 경로통행시간이 임계통행시간 이하이면 통행자는 실효통행자가 되고, 경로통행시간이 임계통행시간 이상이면 통행자는 잠재통행자로 남아있다고 가정하였다. 그리고 알고리즘적 접근방법으로는 Gartner[14]의 3번째 방법을 적용하여 가상링크를 도입하였으며, 가상링크의 최소통행시간은 임계통행시간으로, 가상링크의 최대통행량은 최대 잠재 통행수요로 가정

하였다.

본 연구에서는 가변수요 통행배정의 균형해를 단계별 최적화 모형에 의해 제공한다. 첫 번째 최적화 모형은 추가된 네트워크에서 최대 잠재 통행수요에 대한 안정동력학 모형에 해당된다. 두 번째 최적화 모형은 첫 번째 모형에서 결정된 가변수요와 링크 통행량을 이용하되, 가상링크를 제외한 원 네트워크에서 혼잡링크의 링크통행시간을 새로이 결정한다. 세 번째 최적화 모형은 첫 번째 모형의 링크통행량으로부터 경로통행량을 결정한다. 제시한 단계별 최적화 모형의 실제 수치적용을 위해 네트워크 적용 예를 포함하였다. 링크 10개 및 노드 5개인 네트워크에 대해 단일 기종점인 경우와 다수 기종점인 경우로 나누어 적용하였으며, 고정수요 모형에서처럼 가변수요 모형에서도 안정동력학 모형은 적용이 매우 용이함을 확인할 수 있었다.

본 연구의 추후 연구로는 우선 가변수요를 갖는 다계층 통행배정을 생각할 수 있다. 계층을 차종으로 가정한다면 [2]의 연구가 출발점이 될 것이다. 계층을 같은 차종에서 이용자 행태에 따른 구분으로 생각한다면 계층별로 임계통행시간이 달리 가정

되어야 하며, 본 연구 결과와 기본적으로 같은 틀을 갖게 될 것으로 기대한다. 여기에서 좀 더 진전된 추후 연구로 수요에 대한 추가제약이 있는 가변수요 통행배정 모형을 고려할 수 있다. 즉 계층을 교통수단으로 간주할 때, 계층별 수요의 합은 고정되어 있고 계층별 경로통행시간에 따라서 계층간 수요량이 변화하는 경우를 생각할 수 있다. 이와 같은 경우는 수정된 모형이 필요하다고 생각하며 이에 대해서는 추후 연구되어야 한다.

## 참 고 문 헌

- [1] 권용석, 박병정, 이성모, “가변수요 통행배정의 민감도 분석을 통한 최적가로망 설계”, 「대한교통학회지」, 제19권, 제1호(2001), pp.89-99.
- [2] 박구현, “교통망에서 다차종 통행을 고려하는 통행배정모형 수립”, 「한국경영과학회지」, 제32권, 제3호(2007), pp.63-80.
- [3] 박구현, “일반 교통망에서 브라이스 역설 발견 모형”, 「한국경영과학회지」, 제32권, 제4호(2007), pp.19-35.
- [4] 임용택, “변동부등식을 이용한 가변수요 다사용계층 통행배정문제의 해석”, 「대한교통학회지」, 제20권, 제5호(2002), pp.153-161.
- [5] 임용택, 김현명, “동적과정을 이용한 가변수요 통행배정모형의 알고리즘 개발”, 「대한교통학회지」, 제24권, 제2호(2006), pp.169-178.
- [6] Babonneau, F. and J.-P. Vial, “An Efficient Method to Compute Traffic Assignment Problems with Elastic Demands,” Manuscript, University of Geneva, Switzerland, (2007).
- [7] Beckmann, M., C. McGuire, and C. Winsten, *Studies in Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, (1956).
- [8] Bellei, G., G. Gentile, and N. Papola, “Network Pricing Optimization in Multi-user and Multimodal Context with Elastic Demand,” *Transportation Research B*, Vol.36(2002), pp.779-798.
- [9] Connors, R.D., A. Sumalee and D.P. Waltling, “Sensitivity Analysis of the Variable Demand Probit Stochastic User Equilibrium with Multiple User-Classes,” *Transportation Research B*, Vol. 41(2007), pp.593-615.
- [10] Dafermos, S.C., “Traffic Equilibrium and Variational Inequality,” *Transportation Science*, Vol.14(1980), pp.42-54.
- [11] De Palma, A. and Y. Nesterov, “Optimization Formulation and Static Equilibrium in Congested Transportation Networks,” CORE DP #9861, Universite Catholique de Louvain, (1998).
- [12] De Palma, A. and Y. Nesterov, “Park and Ride for the Morning and Evening Commute,” In : S. Lawphongpanich, D.W. Hearn and M.J. Smith(Ed.), *Mathematical and Computational Models for Congestion Charging, Applied Optimization*, Vol.101(2006), pp.143-157.
- [13] Gartner, N.H., “Optimal Traffic Assignment with Elastic Demands : A Review, Part I. Analysis Framework,” *Transportation Science*, Vol.14(1980), pp.174-191.
- [14] Gartner, N.H., “Optimal Traffic Assignment with Elastic Demands : A Review, Part II. Algorithmic Approaches,” *Transportation Science*, Vol.14(1980), pp.192-208.
- [15] Nagurney, A., *Network Economics : A Variational Inequality Approach*, (revised second edition) Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [16] Nagurney, A. and J. Dong, “A Multiclass, Multicriteria Traffic Network Equilibrium Model with Elastic Demand,” *Transportation Research B*, Vol.36(2002), pp.445-469.
- [17] Nesterov, Y. and A. de Palma, “Stable Traffic Equilibria : Properties and Applications,” *Optimization and Engineering*, Vol.1(2000), pp.29-50.

- [18] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stable Dynamics in Transportation Systems," CORE DP #00/27, University of Louvain, Belgium, 2000.
- [19] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks : Summary and Perspectives," *Networks and Spatial Economics*, Vol.3(2003), pp.371-395.
- [20] Patriksson, M., "Algorithms for Computing Traffic Equilibria," *Networks and Spatial Economics*, Vol.4(2004), pp.23-38.
- [21] Wardrop, J.P., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research," in *Proceedings of the Institute of Civil Engineering*, Part II, (1952), pp.325-378.
- [22] Yildirim, M.B. and D.W. Hearn, "A First Best Toll Pricing Framework for Variable Demand Traffic Assignment Problems," *Transportation Research Part B*, Vol.39(2005), pp.659-678.