한국수학사학회지 제22권 제1호(2009년 2월), 53 - 74

흑백게임의 역사와 수학적 모델링

성균관대학교 수학과 김덕선
mass@skku.edu
순천대학교 수학교육과 류창우
mathlet@mail.sunchon.ac.kr
순천대학교 수학교육과 송영무
ymsong@sunchon.ac.kr
성균관대학교 수학과 이상구*
sglee@skku.edu

흑백게임은 흑 또는 백색의 돌이 가득 찬 일정한 크기의 바둑판 위에서 하는 게임으로, 하나의 돌을 클릭하면 자기 자신과 자신의 위, 아래, 왼쪽, 오른쪽의 버튼의 색이 모두 같이 변하는 규칙을 가지고, 선택적으로 돌을 골라 클릭하여 바둑판 위의 모든 돌이 한 가지 색으로 통일되면 이기는 게임이다. 이는 컴퓨터게임의 형태로도 소개되어 규칙에 따라 버튼을 선택적으로 누름으로서 모든 버튼을 하나의 색으로 통일하는 게임으로 잘 알려져 있다. 이 단순한 게임 안에는 다양한 수학적 모델링 이론이 포함되어 있고, 많은 사람들이 흑백게임의 일반적인 승리전략을 얻기 위하여 다양한 시도를 해왔다. 이 과정에서, 흑백게임은 다양한 이름을 가지게 되었고, 외국에서는 Blackout, Lights Out, Merlin Game, $\sigma+$Game등 다양한 이름으로 불리며, 현재도 활발하게 연구가 진행되고 있다. 본 연구는 흑백게임의 발전 과정과 국내외 연구결과를 분석하며, 기존의 미해결 문제에 대한 답을 제공하고, 교육적 활용에 대하여 연구한다.

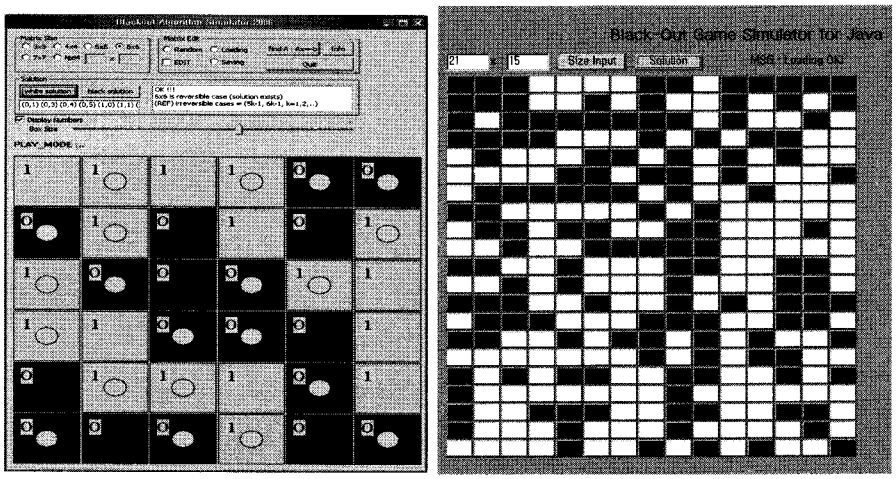
주제어 : 흑백게임, 역사, 수학적모델링, 수학교육

1. 서론

많은 사람들이 다양한 흑백게임의 일반적인 승리전략을 얻기 위한 시도를 해왔다. 특히 초기 조건으로 일부의 버튼만 흑색으로 주어진 경우, 주어진 초기 조건에 따라서 답이 있는 문제와 답이 없는 문제가 존재하는가? 그런 존재성을 수학적으로 증명

* 교신저자
* 이 논문은 2008년 정부의 재원으로 한국학술진흥재단 BK21 지원을 받아 수행된 연구임.

할 수 있을까? 유일한 또는 무수히 많은 해가 존재한다면 실제로 구하는 알고리즘을 구할 수 있는가? 해가 존재하지 않는 경우는 언제인가? 해의 존재성에 관한 모든 분류는 가능한가? 수학적으로 증명된 내용을 시각적으로 구현할 수 있는가? 만일 '해가 존재하지 않는 초기조건(영원히 이길 수 없는 문제)'이 존재한다면, 이 경우는 시각적인 구현에서 어떻게 다루어야 하는가? 등의 문제에 대한 다양한 연구가 있었다 ([2], [4], [5], [10], [11]). 본 연구는 흑백게임의 발전과정과 [2]와 [5]에 소개된 흑백문제의 해를 구하는 전략 및 도구와 관련한 새로운 연구내용을 다룬다.



<그림 1> 본 연구팀이 개발한 흑백게임 시뮬레이션 프로그램들 ([2], [9])

본 연구의 선행연구에서는 흑백문제를 해결하기 위한 선형대수학적 모델과 자바도구를 개발하여 그 해법을 제시하였으며, 또한 특정한 크기의 문제에 대하여 최적해를 구하는 방법을 발견하고, 알고리즘을 개발하였으며, 더 나아가 큰 크기의 문제의 해를 시각적으로 확인하기 위하여 시뮬레이션이 가능한 프로그램을 <그림 1>과 같이 개발하여 직접 확인하였다 ([2], [9], [10]).

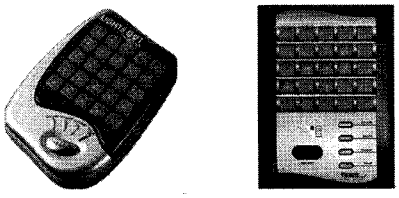
이러한 흑백게임에 관련된 연구들은 단순한 게임의 승리조건을 연구하는 문제에 대한 해결을 위한 시도였지만, 관련 연구 결과의 활용은 전기 회로 기판, 전력시스템(power grid)의 공학분야와 교육분야 등으로 매우 다양하다. 영재교육에서는 기존에 주어진 디피(DIFFY)활동 [1][1]과 차별화되어, 수학적모델링과 구체적 문제해결에 대한 동기 부여에 훌륭한 역할을 할 수 있다는 사실을 확인한 바 있다 ([2]). 우리는 이러한 흑백게임의 역사적인 발전 과정과 일반화된 흑백게임의 해법에 대하여 알아본다. 이어서 [2]에서 해결하지 못한 일반화된 흑백게임의 해법에 대한 답을 제시한다.

1) 강문봉 (2005), 디피 활동에서의 수학적 추측과 발견, 학교수학 제7권 제4호, pp.319 - 336.

2. 역사적 고찰

1) 흑백게임의 역사

흑백게임은 원래 외국에서 Lights Out이라는 게임으로 널리 알려져 있다. 이 게임은 Tiger Toy사[2)]에서 1995년에 처음으로 개발하였다 ([7]).



<그림 2> Tiger Toy사의 Lights Out Game 기계와 인터넷 게임 프로그램

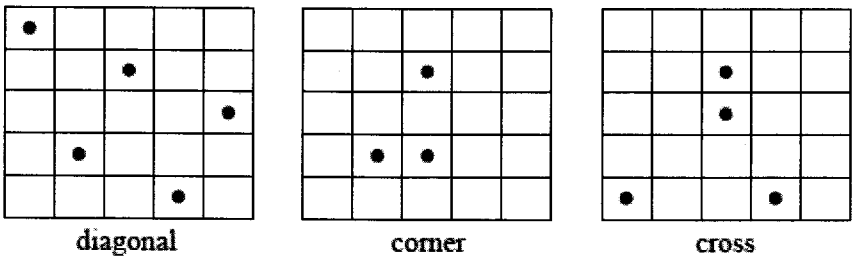
흑백게임은 1970년대 Parker Brothers사에서 개발한 Merlin 게임이라는 이름의 게임에서 시작한다. 이 게임은 3×3 크기의 바둑판으로부터 시작하였고, 그 후 1983년 Vulcan Electronics사에서 이것을 XL-25라는 게임으로 카트리지 팩 형식의 게임기용 게임으로 시판하였다. 그 후 1997년에 Tiger Toy사는 Lights Out이라는 게임을 출시하였다. 5×5 크기의 흑백게임은 게임기와 PC와 PDA, 핸드폰에 내장된 형태로 세계적으로 널리 시판되었다 ([7]). 이 게임과 비슷한 게임으로는 Fiver라고 불리는 게임도 있다 ([13]). 흑백게임은 국내에는 CJ엔터테인먼트가 Beautiful Mind라는 영화를 소개하고자 만든 홈페이지에서 한국에 소개한 바 있다 ([12]).

2) 흑백게임과 관련된 연구들

이것이 수학적으로 의미를 가지게 된 것은 [5]에 Anderson과 Feil교수가 쓴 논문에서부터 시작된다. Lights Out 게임을 손쉽게 풀기 위하여 다양한 해법을 연구하던 그들은 선형대수학적인 기법을 해당 게임에 반영하여 이를 이용하여 그 해법을 연구하였다. 그 결과, 3×3 크기의 Merlin 게임의 경우에 대하여는 손쉽게 그 해를 구할 수 있는 방법을 제시하였으나, 1998년 논문에서 그들은 5×5 크기 흑백게임은 일단 유일한 해가 존재하지 않으며, 일반적인 해법을 구하는 것은 매우 어려운 문제라고 언급하고 논문을 마무리 하였다.

그 후, 5×5 크기의 흑백게임의 일반적인 해를 찾기 위한 다양한 시도가 있었다. 2000년에는 P. V. Araujo교수가 'How to Turn All the Lights Out'이라는 논문에 5×5인 경우에 승리할 수 있는 초기조건이 존재함을 보인 바 있다. 해당 논문에서는 이러한 초기조건이 다음 그림과 같이 세 가지 형태임을 소개하였다 ([4]).

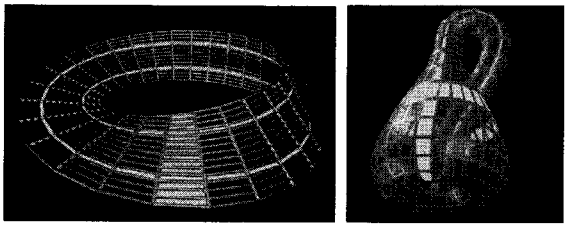
2) 이 회사는 1998년 Hasbro사에 인수되었다([8]).



<그림 3> 5×5에서의 승리할 수 있는 초기조건이 되기 위한 조건 [4]

<그림 3>에서의 세 스타일 중 하나와 일치하는 부분에 0 또는 1이 들어가는 경우를 보면 5×5 흑백게임에서 해를 찾을 수 있는 승리할 수 있는 초기조건이라고 하며, [4]에서는 이 조건들을 각각 대각방향형 초기조건(Diagonal Configuration), 구석형 초기조건(Corner Configuration), 교차형 초기조건(Cross Configuration)이라고 정의하였고, 그와 유사한 형태들에 대하여 몇 가지를 [4]에 소개하였다. 그러나 이것은 5×5의 경우에 대한 모든 분류를 한 것은 아니다. 그러나 언제나 해가 존재하는 초기조건 일부를 제시한 최초의 논문으로서 그 가치가 크다.

그 후로도, 흑백게임에 대한 연구는 다양하게 진행되었다. 2002년도에는 R. Losada 교수가 'All lights and lights out - An investigation among lights and shadow'라는 제목의 논문 [11]을 스페인의 수학저널인 SUMA에 발표하기도 하였다.[3] 이 논문에서는 다양한 다른 형태의 흑백게임에 대한 연구를 시도한 바 있다. 그러나 해당논문의 내용에는, 다양한 게임을 제시하지만, 실제 해법은 소개하지 않았다.



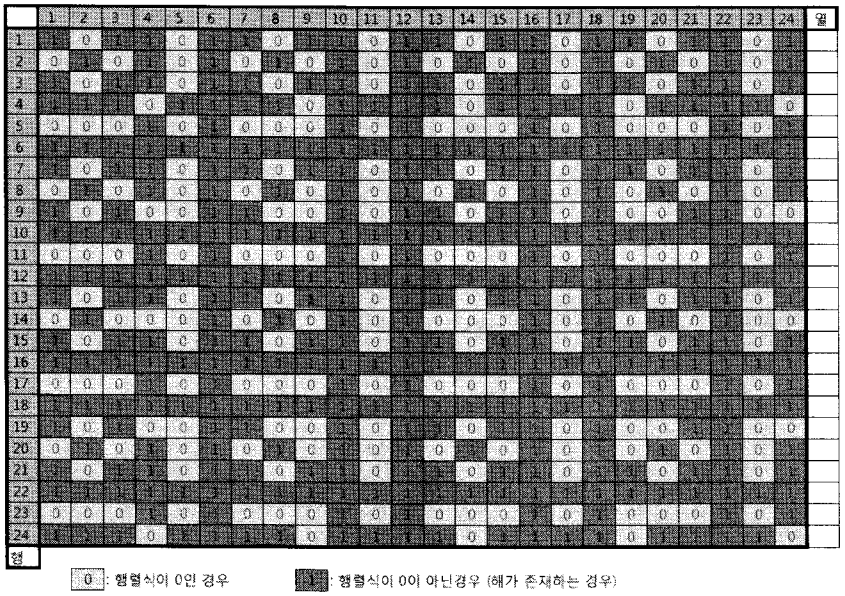
<그림 4> 뫼비우스 띠 상에서의 흑백게임과 클라인병 위에서의 흑백게임.

국내에서도 이에 대한 다양한 연구가 시도되어 왔다. 특히 국내에서는 선형대수학적 해법에 대한 연구로 시작하여, 2004년도에는 흑백게임을 수학적모델링을 통하여 선형대수학의 해를 구하는 문제로 바꾸어 3×3 크기의 흑백게임으로부터 19×19 크기의 흑백게임에 이르기까지 유일한 해법이 존재하는 모든 경우에 대한 해법과 알고리즘 그리고 알고리즘을 이용한 공학적 도구까지 개발하여 제공되었다 ([9]). 또한 2006년

3) 본 논문은 스페인어로 쓰였으며, 최근에 영문으로 번역되었다. (2006년)

에는 이를 임의의 $n \times n$ 크기의 게임으로 확장하여 유일한 게임의 해법이 있는 경우와 없는 경우를 판단하는 필요충분조건을 고유값을 이용하여 찾아내는 방법을 소개되었다 ([10]). 2007년도에는 정사각형태의 흑백게임에서 더 나아가, 더 일반적인 $m \times n$ 크기의 직사각형 흑백문제로 확장하여 유일한 해법이 있는 경우가 규칙적인 패턴을 이루며 나타난다는 사실을 <그림 5>와 같이 확인하였다 ([2]).

본 연구에서는 [2]의 결과를 이용하여, 2000년 논문인 "How to Turn All the Lights Out" [4]에서 미해결로 남겨놓은 문제에 대한 완전한 답과 실제로 그를 구현하는 알고리즘을 소개한다. 또한 개발된 알고리즘을 이용하여 웹상에서 작동하는 자바프로그램을 개발하여 소개한다.



<그림 5> 1×1 에서 24×24 까지 크기의 흑백게임에 의해 생성되는 행렬 A의 행렬식 값의 패턴 [2]

3. 흑백게임의 이론

[2]에서 소개한 바와 같이 일반적으로 $m \times n$ 크기의 흑백게임에 대한 해는 항상 존재하는 것이 아니다. 따라서 해가 존재하지 않는 경우를 포함해서 모든 크기의 흑백게임의 가능한 최적해를 찾는 것은 중요한 문제이다. 본 연구에서는 흑백게임을 수학적모델링을 통하여 선형연립방정식의 해를 구하는 문제로 바꾼 후, 유일한 해를 가지는 경우와 아닌 경우를 구분하여 각 경우에 대한 해법을 제시한다. 이를 위하여 행렬식의 조건과 행렬의 패턴을 이용한다.

정의 3.1 [2] $m \times n$ 크기의 (0,1)-행렬을 생각하자. 이 $m \times n$ 크기 행렬에 대한 버튼에 대하여 다음과 같이 1행부터 순서를 주어 정의한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & (m-1)n+3 & (m-1)n+4 & \cdots & mn \end{bmatrix}_{m \times n}$$

이 때, $M_i \in \mathrm{M}_{m \times n}(R)$ $(1 \le i \le mn)$ 는 흑백게임에서 i번째 버튼을 클릭했을 때 흑백이 바뀌는 위치의 성분들은 1이고 나머지 성분은 모두 0인 (0,1)-행렬이라고 하자.

정의 3.2 [2] $B \in \mathrm{M}_{m \times n}(R)$를 $m \times n$ 크기의 임의의 (0,1)-행렬이라고 하자. 이 행렬이 만일 현재 흑백게임의 초기 상태를 각각 0과 1로 표현[4]하였다면 이 행렬을 *초기조건 행렬*이라고 정의한다.

정리 3.3 [2] M_i의 $m \times n$개의 성분을 앞에서 소개한 버튼의 순서대로 늘어놓은 $mn \times 1$ 열벡터를 $\mathbf{m}_i$라 하자. 그리고 그 벡터들을 열벡터로 가지는 행렬 A를 다음과 같이 정의한다.

$$A = [\mathbf{m}_1 \,|\, \mathbf{m}_2 \,|\, \cdots \,|\mathbf{m}_{mn}]_{mn \times mn}$$

초기조건 행렬 B의 성분을 같은 방법으로 배열한 $mn \times 1$ 벡터를 $\mathbf{b}$ 라 하고, 마찬가지로 J[5]행렬에 대해서도 모든 성분이 1인 $mn \times 1$크기의 벡터를 $\mathbf{j}$라 하고, $mn \times 1$ 벡터 $\mathbf{x}$는 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$라 하자. 그러면, 흑백게임의 해를 구하는 문제는 다음의 식을 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$를 찾는 문제로 바뀌게 된다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{또는 } \mathbf{j} - \mathbf{b})$$

정리 3.3에서 얻어진 행렬 A는 블록삼중대각행렬(block tridiagonal matrix)로 표현할 수 있다. A에는 우선 아래와 같은 $n \times n$ 크기의 블록행렬 K를 볼 수 있다.

4) 검은색 칸은 0, 흰색 칸은 1로 나타낸다.
5) 모든 성분이 1인 행렬이다. 여기서는 $m \times n$ 크기의 행렬임.

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

그리고 이렇게 생성된 m개의 $n\times n$ 행렬 K와 $2(m-1)$개의 $I_{n\times n}$를 이용하여 A를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix} K & I & \cdots & O \\ I & K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I \\ O & \cdots & I & K \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

(단, m개의 $n\times n$ 행렬 K가 대각선 성분을 이룸)

따라서 A는 $mn\times mn$ 크기의 블록삼중대각행렬이다. 이 시스템은 m과 n에 대하여 유일하게 존재한다. 그리고 A는 정사각행렬이므로, 자연스럽게 행렬 A에 대한 행렬식 $\det(A)$를 생각해 볼 수 있다. 이 행렬식의 값은 실수에서의 일반적인 행렬식을 통하여 구한 값이다. 그러면 행렬식의 값에 따라 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 3.4 정리 3.3에서 정의한 행렬 A의 행렬식에 대하여 $m\times n$ 크기의 흑백게임은 다음과 같은 관계를 가진다.

1) $\det(A)\neq 0$일 경우는 $m\times n$ 크기의 흑백게임에서 유일하게 이길 수 있는 방법이 존재한다.

2) $\det(A)=0$일 경우에는 주어진 초기조건에 따라 $m\times n$ 크기의 흑백게임의 해가 없거나, 여러 개의 이기는 방법이 존재한다.

증명 흑백게임에서 이길 수 있는 방법을 $\mathbf{x}$라고 하면, 다음과 같은 연립방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$에 의하여 결정되므로, $\det(A)\neq 0$이면, A^{-1}가 유일하게 존재하고, $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$를 만족하는 값 $\mathbf{x}$가 유일하게 존재한다. 이 값은 흑백게임의 해가 된다 ([2], [9]). 그러나 $\det(A)=0$이면 연립방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 해는 존재하지 않거나[6], 무수히 많은 해가 존재하게 된다[7]. 따라서 흑백게임의 해도 동일하게 해가 없거나, 2개 이상의 해가 존재하게 된다.

즉, 행렬식의 값이 0인 경우 수치적으로 최적근사해를 구하는 과정은 계산오차와 법(mod) 계산이 포함된다. 일반적인 연립방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$에서 행렬 A의 행렬식이 0이

6) 부정의 경우(under determined)
7) 불능의 경우(over determined)

라면 해 x가 존재하지 않거나, 무수히 많아진다. 따라서 이 경우, 언제 해가 존재하지 않고, 언제 무수히 많이 존재하게 되느냐는 초기조건 B로부터 얻어지는 벡터 b에 의하여 완전히 결정된다. 즉, 흑백게임의 관점에서 설명하자면, 흑백게임에서 정의 3.1, 3.2, 정리 3.3에 의하여 만들어진 행렬 A의 행렬식이 0이라면 초기조건 B에 의하여 해의 유무가 결정된다. 이 때 해가 존재하게 하는 초기조건 B를 승리할 수 있는 초기조건(Winnable Configuration)이라고 하자.

여기서 $\det(A)=0$인 경우 중, 5×5 크기의 행렬의 경우를 살펴보기로 하자. 앞의 정의 3.1, 3.2와 정리 3.3에 의하면 5×5 크기의 흑백게임은 다음과 같은 선형연립방정식으로 생각할 수 있다.

$$A\mathrm{x}=\begin{bmatrix} K & I & O & O & O \\ I & K & I & O & O \\ O & I & K & I & O \\ O & O & I & K & I \\ O & O & O & I & K \end{bmatrix}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{8)} \quad (\text{단, } K=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \end{bmatrix}\text{이다.})$$

이 행렬 A의 행렬식은 0이다. 이미 [2]에서도 언급한 바와 같이 행렬식이 0이기 때문에 여기는 유일한 해 x가 존재하지 않고, 따라서 흑백 게임에서는 해가 아예 없거나 2개 이상의 해가 존재하게 된다. 해의 존재는 초기조건 B(즉, 행렬 B에 의하여 나타나는 벡터 b)에 의하여 결정되고, 비록 A의 행렬식은 0이지만, 해를 가지는 승리할 수 있는 초기조건이 주어지는 경우에 대하여 이를 만족하는 해를 찾을 수 있다는 것을 생각할 수 있다. 또한 처음부터 모든 성분이 1인 행렬을 인위적으로 조작하여 생긴 행렬은 역으로 조작하면 해가 된다. 따라서 어떤 행렬이라도 승리할 수 있는 초기조건은 항상 존재하는데 그 초기조건이 주어진다면 만족하는 해를 찾을 수 있다.

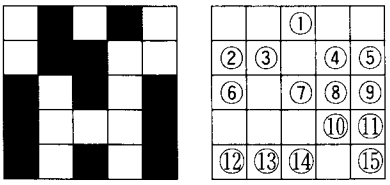
이러한 초기조건을 찾는 방법은 이미 [4]에서 일부 보인 바가 있다. 본 연구는 이러한 5×5 크기의 흑백게임의 경우에 대하여 [4]에서 소개된 내용을 일반화하여 2개 이상의 해를 갖는 모든 경우도 알아보고, 해가 존재하는 경우에 어떤 특성을 가지고 있는지에 대하여 알아본다.

1) 주어진 초기조건에 대해 해가 존재하는지 아닌지를 판정하는 방법

정리 3.4에서 논의된 대로 $\det(A)=0$이 되는 경우는 대응하는 게임의 해가 존재할 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. [4]에서 언급한 대로, 앞의 <그림 5>의 표에서 보듯이, 5×5 크기인 경우 $\det(A)=0$이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 5×5크기의 흑백게임을 생각해 보도록 하자. 일단 5×5 크기의 게임에서도 승리할 수 있는 초기조

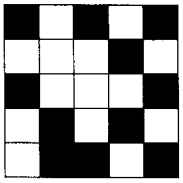
8) 여기서 행렬 A의 크기는 25×25이다.

건인 <그림 6>의 왼쪽과 같은 선택된 초기조건이 주어진다면 $\det(A)=0$인 <그림 6>의 오른쪽 그림과 같이 클릭의 순서에는 상관없이 15개의 버튼을 클릭하면 모두 같은 색으로 만들 수 있는 해가 존재한다.



<그림 6> 5×5 크기의 흑백게임과 그 해법

<그림 6>의 왼쪽과 같이 초기조건이 주어진 5×5 크기의 흑백게임에 대하여 <그림 6>의 오른쪽 표 안의 번호에 대응하는 버튼을 모두 클릭하면 5×5 바둑판의 모든 버튼을 검은색으로 채울 수 있다. 그러나 일반적인 5×5 크기의 흑백게임은 $\det(A)=0$이기 때문에 일반적으로 해가 존재하지 않고, 특히 <그림 7>와 같은 경우는 해가 존재하지 않는 예이다.[9)]



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<그림 7> 5×5 크기의 흑백게임 중 해를 가지지 않는 경우

5×5 크기의 흑백게임에서는 주어진 초기조건에 따라 해가 존재하는 경우도 있고, 해가 존재하지 않는 경우도 있다. 본 연구에서는 이 경우를 분류하여 초기조건들에 대한 동치류를 찾고 이를 이용하여 승리 전략을 제공하는 것으로 시작한다.

승리할 수 있는 초기조건을 탐색하고 분류하기 위하여, 주어진 흑백게임의 규칙을 이용하여 <그림 7>의 초기조건을 다음에 소개하는 4가지 단계를 통하여 윗부분을 흑색으로 채워가고, 맨 마지막 행의 정보를 확인하겠다. 이는 한 줄씩 같은 색으로 만들어 가면 결국 맨 마지막 줄이 궁극적인 답을 제공한다는 간단한 아이디어를 이용한 것이다.

9) 해의 미존재성을 보이기 위하여 [2]에서 언급한 선형결합의 방법($a_1M_1+\cdots+a_{25}M_{25}=B$)을 이용하여 M_i들에 대하여 2^{25}번의 클릭에 대한 경우의 수(a_i)를 모두 컴퓨터를 통하여 검색하여 해가 없음을 확인하였다.

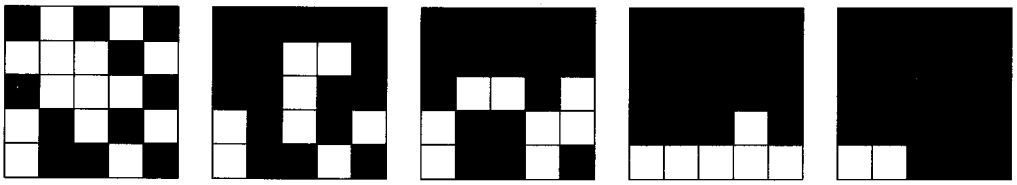
단계 1) 1행을 선택한다.
단계 2) 흑백 게임의 규칙을 이용하여, 아래의 행의 성분들을 클릭하여 선택한 행의 성분들을 전부 0으로 만든다.
단계 3) 다음 행을 선택하여 단계 2를 시행한다.
단계 4) 맨 마지막 행의 이전 행(4번째 행)까지 단계 3을 반복하고, 남은 마지막 행이 <표 1>의 어디에 속하는지 확인한다.

따라서 처음 4개 행의 모든 버튼을 흑색인 0 으로 만든 후 마지막에 남은 5행의 경우를 흑(0) 과 백(1) 표기를 이용하여 $2^5 = 32$ 가지 경우로 분류하면 다음과 같다.

00000	01000	10000	11000
00001	01001	10001	11001
00010	01010	10010	11010
00011	01011	10011	11011
00100	01100	10100	11100
00101	01101	10101	11101
00110	01110	10110	11110
00111	01111	10111	11111

<표 1 : 조작 후 남은 마지막 5행의 32가지 경우>

예를 들어 단계 1, 2, 3, 4를 통하여 <그림 7>에 소개한 초기조건을 <그림 8>와 같이 조정할 수 있다.



<그림 8> 5×5 크기의 흑백게임 중 해를 가지지 않는 경우에 대하여 마지막 줄만 남기는 과정

단계 1, 2, 3, 4를 이용하면 다양한 흑백게임의 초기정보들을 위의 <그림 8>와 같이 맨 마지막 줄만 제외하고 모두 검은색으로 채울 수 있다. 또한 이렇게 맨 마지막 남은 줄에 대한 정보는 검은색의 경우 0, 흰색의 경우 1로 표시할 수 있다. 따라서 <그림 8>의 맨 마지막 줄은 2진법으로 생각하면 "11000"로 나타낼 수 있다. 따라서 5×5 크기의 흑백게임에서 우리가 임의대로 생각할 수 있는 초기조건은 $2^{25} = 33{,}554{,}432$

개이지만, 단계 1, 2, 3, 4로 초기조건들을 정리해 줄 경우 우리는 $2^5 = 32$개의 경우만 고려하면 되므로, 승리할 수 있는 초기조건을 판단하는데 훨씬 간편하게 할 수 있다.

위의 단계 1, 2, 3, 4는 흑백게임의 규칙을 이용하여 마지막 줄만 남기는 것으로서 앞에서 소개한 정의 3.1, 3.2, 정리 3.3에 있는 a_i와 M_i를 이용하고, 원래의 초기조건을 B라 하고, 마지막 줄만 남긴 상태를 B'이라 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B + a_1 M_1 + \cdots + a_{25} M_{25} = B' \pmod 2$$

따라서, 이를 다음과 같은 관계(Relation)로 정의할 수 있다.

정의 3.5 $M_i \in \mathrm{M}_{m \times n}(R)$을 $m \times n$크기의 (0,1)-행렬이라고 하자. (여기서, $1 \le i \le mn$) 그리고 B를 정의 3.2에 소개된 초기조건이라 하고, B'을 마지막 줄만 남은 초기조건이라 하자. 그렇다면,

$$B + a_1 M_1 + \cdots + a_{25} M_{25} = B' \pmod 2$$

라고 할 수 있으며, 이 식을 만족하는 관계를 $\approx$라 하고, $B \approx B'$로 쓴다.

앞의 정의 3.3에서 소개한 관계는 다음의 정리에 의하여 동치관계(Equivalence relation)가 된다.

정리 3.6 정의 3.5의 조건을 만족하는 관계 '$\approx$' 는 동치관계이다.

증명 위의 관계가 동치관계임을 보이기 위해선 다음 세 가지 조건을 보여야 한다.

1) $B + 0M_1 + \cdots + 0M_{25} = B$이므로 $\approx$는 반사율(Reflexivity)을 만족한다.

2) 만일 $B \approx B'$라면, $B + a_1 M_1 + \cdots + a_{25} M_{25} = B' \pmod 2$를 만족하는 $a_1, \cdots, a_{25}$ 가 존재한다. 따라서

$$B = -a_1 M_1 - \cdots - a_{25} M_{25} + B' \pmod 2$$

가 되며, $B' + a_1' M_1 + \cdots + a_{25}' M_{25} = B \pmod 2$를 만족하는 $a_1', \cdots, a_{25}'$ 가 존재한다. (단 $a_i' = -a_i \pmod 2$). 따라서 $\approx$는 대칭률(Symmetry)을 만족한다.

3) $B \approx B'$이고 $B' \approx B''$라면

$$B + a_1 M_1 + \cdots + a_{25} M_{25} = B' \text{이고} \qquad [1]$$

$$B' + a_1' M_1 + \cdots + a_{25}' M_{25} = B'' \text{이다.} \qquad [2]$$

[1]식을 [2]식에 대입하여 정리하면,

$$B + a_1 M_1 + \cdots + a_{25} M_{25} + a_1' M_1 + \cdots + a_{25}' M_{25} = B'',$$

$$\therefore B + (a_1 + a_1') M_1 + \cdots + (a_{25} + a_{25}') M_{25} = B''.$$

따라서 $\approx$는 추이율(Transitivity) 을 만족한다. ■

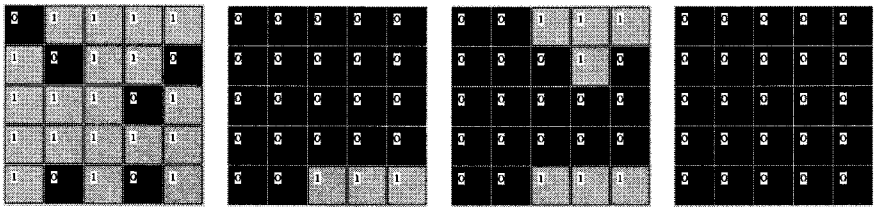
정리 3.6에 의하여 정의 3.5에서 소개한 관계는 동치관계가 되고, 이는 자연스럽게 동치관계를 이용한 동치류(Equivalence class)로 초기조건들을 분류할 수 있게 한다

([6]). 따라서 5×5 크기의 흑백게임에서 생각할 수 있는 모든 초기조건을 서로소인 부분집합[10]으로 묶을 수 있다. 이러한 관계는 선형결합(Linear Combination)에 의하여 정의된 관계이므로 [2], 선형결합에 의하여 해를 구하는 흑백게임의 특성을 고려하면 해당 동치류는 동일하게 해를 가지거나, 가지지 않게 된다. 따라서 우리는 5×5 크기 흑백게임에 대한 $2^{25} = 33,554,432$ 가지의 초기조건을 분석하는 대신에 $2^5 = 32$가지의 초기조건만을 분석하여 해의 유무를 판단할 수 있게 된다.

이 경우, 마지막 행의 정보가 "00000"이 되는 경우에는 자연스럽게 흑백게임의 해를 찾을 수 있게 된다. 따라서 이 분류에 따라 모든 버튼이 흑색이 되는 즉, 맨 마지막 행이 "00000"으로 정리되는 초기조건들은 이미 해를 가지는 초기조건들이며, 이들은 바로 승리할 수 있는 초기조건이라고 할 수 있다. 승리할 수 있는 초기조건을 가지는 경우의 해는 앞에서 이야기한 단계 1, 2, 3, 4를 이용하여 해를 구하면 된다.

본 연구는 몇 개의 동치류가 있으며 그들 사이에 어떠한 관계가 설정되는지를 확인하고자, 아직 단계 1, 2, 3, 4에 의하여 클릭되지 않은 첫 번째 행에 대한 몇 가지 실험을 수행하였다. 이를 통하여 흥미로운 결론을 얻게 된다. 위의 32가지 분류에 속하는 초기조건들 중 "00000"에 대응하는 것들만이 승리할 수 있는 초기조건일까? 결론은 아니다. 흑색 해를 갖는 다른 초기조건들도 존재한다. 그럼 마지막 행이 "00000"가 되는 흑색 해를 주는 초기 조건은 몇 가지인가? 답은 $\frac{33,554,432}{4}$가지이다. 즉, "00000"과 같은 동치류에 속하는 것들은 위의 32개의 분류 중 몇 가지일까에 대한 답은 8 가지이다. 즉, 32개의 경우는 8개씩 4 종의 분류로 다시 모이고, 결론을 미리 말하면 33,554,432 가지의 초기조건 각각은 단 4가지의 동치류 중 하나에 속하게 된다.

예를 들어 "00111"에 대한 동치류에 대하여 맨 첫 번째 행의 네 번째 칸을 클릭하고 나서 단계 1, 2, 3, 4를 시행하면 바로 "00000"으로 정리할 수 있다.



<그림 9> 초기조건(맨 왼쪽)에 대하여 단계 1,2,3,4에 의하여 정리하여 마지막 행을 확인(두 번째)하고 맨 첫 번째 행에 대한 조작(세 번째)을 한 후, 다시 단계 1, 2, 3, 4를 적용한 화면(마지막)

이는 조작 후 남은 마지막 행의 모양에 따른 32가지 동치류 중에서도 약간의 변화를 주어 시작하면 마지막 행이 00000이 되도록 할 수 있다는 힌트를 준다. 따라서 이 분류에 따라 맨 마지막 행이 00000이 되는 조건들과 그 과정에 있는 조건들을 모두

10) disjoint subsets

(흑색) 해가 존재하는 하나의 동치류에 속함을 확인 할 수 있다. 위의 관찰로부터 다음과 같은 따름정리를 얻는다.

따름정리 3.7 주어진 초기조건 B에 흑백 게임의 규칙에 따라 1행의 성분들을 몇 개 골라 클릭하여 얻은 초기조건 행렬 B'는 행렬 B에 동치이다.

바로 앞의 예제 "00111"에 대한 경우에도 첫 번째 행의 네 번째 칸(버튼)을 흑백게임의 규칙에 따라 클릭하고, 단계 1,2,3,4를 거치면"00000"에 도달하므로, 마지막 행이 "00111"에 대응하는 동치류는 마지막 행이 "00000"에 대응하는 동치류와 일치한다고 할 수 있다. 이렇게 첫 번째 행에 대하여 아래와 같은 시도를 할 경우 해당 동치류는 "00000"동치류와 차이가 없음을 알 수 있다.

동치류	첫 번째 행에 대한 조작 (☑부분만 1회 클릭한다.)
00000	□□□□□, □☑☑☑□, ☑□☑□☑, ☑☑□☑☑
00111	□□□☑□, □☑☑□□, ☑☑□□☑, ☑□☑☑☑
01010	□□☑☑☑, □☑□□☑, ☑□□☑□, ☑☑☑□□
01101	□□☑□☑, □☑□☑☑, ☑□□□□, ☑☑☑☑□
10001	□□□☑☑, □☑☑□☑, ☑□☑☑□, ☑☑□□□
10110	□□□□☑, □☑☑☑☑, ☑□☑□□, ☑☑□☑□
11011	□□☑□□, □☑□☑□, □☑☑☑□, ☑☑☑☑☑
11100	□□☑☑□, □☑□□□, ☑□□☑☑, ☑☑☑□☑

<표 2 > "00000"에 이르는 동치류들과 그를 위한 첫 번째 행의 조작[11]

<표 2>에서처럼 "00000"이 속하는 동치류에 속하는 분류는 "00111", "01010", "01101", "10001", "10110", "11011", "11100"으로 총 7가지가 더 있다. 따라서 주어진 초기조건 B에 단계 1, 2, 3, 4를 적용한 B'의 맨 마지막 줄의 정보가 <표 2>에서 소개한 동치류 8가지에 속하면 주어진 초기조건 B는 승리할 수 있는 초기조건이 주어진 것이다. B'의 맨 마지막 줄의 정보가 "00000"인 경우는 이미 게임이 끝난 것이며, B'의 맨 마지막 줄의 정보가 "00000"이 아닌 경우에는 <표 2>를 활용하여 첫 번째 행에 주어진 4개의 조작 중 하나를 취한 후 앞에서 소개한 단계 1, 2, 3, 4를 적용하면 모든 돌은 같은 (검은)색이 되어 게임이 끝난다.[12]

11) 본 데이터는 따름정리 3.7에 의하여 첫 번째 행을 조작하여 만든 동일한 동치류에 대한 분류로부터 나온 결과이다. 이 이외의 형태는 다른 동치류에 들어가기 때문에, 4가지 조작 이외에는 다른 조작은 존재하지 않는다.

12) 참고로 똑 같은 이론을 "00000" 대신 "11111"에 적용하면 모든 돌은 같은 흰색이 되는 경우에 적용된

마지막으로 B'의 맨 마지막 줄의 정보가 <표 2>에서 소개한 동치류 8가지 중의 하나가 아니면, 주어진 초기조건 B는 어떤 돌을 선택하여 클릭하더라도 모든 돌은 같은 색으로 만드는 방법이 존재하지 않는다고 결론 내릴 수 있다. 이 분석을 이용하여 알고리즘을 작성하면 우리는 5×5 크기의 흑백게임인 경우 언제나 해가 존재하는 초기조건을 게임자에게 제공할 수 있다. 그리고 위의 알고리즘과 패턴은 더 큰 크기의 흑백게임으로도 자연스럽게 확장이 된다. 실제로 그렇게 프로그래밍하여 최대 24×24 크기까지의 모든 흑백게임을 소화하는 프로그램으로 제작된 자바도구가 http://matrix.skku.ac.kr/NewJAVA/BlackOut/Test.html 이다. 그리고 이 도구는 모니터 화면이 충분히 크다면 임의의 $m \times n$ 크기의 모든 흑백게임으로 언제나 확대 제작이 가능하다. 본 연구진은 실제로 임의의 $m \times n$ 크기의 흑백게임 도구에 대한 모든 실험이 성공적임을 확인하였다.

2) 개발된 판정법에 대한 수학적 분석

앞 절에서 소개한 "00000"에 대응하는 동치류들을 A 패턴으로 하는 방식으로, 초기조건에 대한 32가지 분류를 A, B, C, D라는 4개의 동치류로 분류할 수 있다. 이 분류를 아래의 <표 3>에 정리한다.

분류	동치류패턴	분류	동치류패턴	분류	동치류패턴	분류	동치류패턴
00000	A	01000	C	10000	B	11000	D
00001	B	01001	D	10001	A	11001	C
00010	C	01010	A	10010	D	11010	B
00011	D	01011	B	10011	C	11011	A
00100	D	01100	B	10100	C	11100	A
00101	C	01101	A	10101	D	11101	B
00110	B	01110	D	10110	A	11110	C
00111	A	01111	C	10111	B	11111	D

<표 3> 32가지 동치류에 따른 패턴들

즉, 32가지 분류는 8개씩 묶음으로 4개의 동치류로 정리되며, 동치류를 <표 3>에서와 같이 A, B, C, D의 네 가지로 구분하면, 동치류 A에 포함될 경우에는 초기조건에서 시작하여 클릭을 통하여 "00000"에 이르게 할 수 있기 때문에 단계 1, 2, 3, 4에 의하여 해를 구할 수 있다. 그러나 동치류 B, C, D에 포함되는 초기조건의 경우, 해를 구할 수 없는 경우로 분류된다.

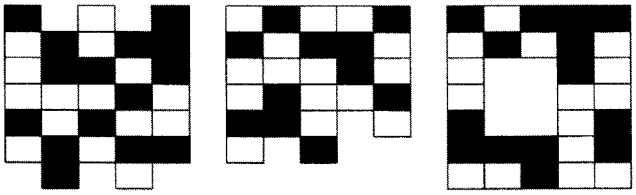
또한 위의 경우에서 만일 모두 1인 흰색으로 만드는 경우로 고려한다면 0과 1을 바

다.

꾸어서 생각하면 되므로, 위의 <표 3>에서는 동치류 D가 해가 있는 승리할 수 있는 초기조건으로 판단할 수 있다.[13] 따라서 5×5 크기의 흑백게임에서는 단계 1, 2, 3, 4를 통하여 4가지 중 어떤 동치류에 속하는지만 판단하면, 이 초기조건이 승리할 수 있는 초기조건인지를 파악할 수 있고, 승리할 수 있는 초기조건이 주어진다면 <표 2>를 활용하여 첫 번째 행에 주어진 4개의 조작 중 하나를 취한 후 앞에서 소개한 단계 1, 2, 3, 4를 적용하면 모든 돌은 같은 색이 되어 게임이 끝난다.

3) $m \times n$ 크기의 흑백게임 보다 더 일반화된 형태의 흑백게임

앞에서 소개한 패턴 분류를 이용한 해법은 동치류를 찾는 문제로 아래와 같이 직사각형 모양이 아닌 다양한 형태의 도형의 흑백게임으로 확장될 수 있다.



<그림 10> 복잡한 형태의 흑백게임의 예제

<그림 10>에 소개한 형태의 일반적인 흑백게임들은 기존의 방법으로는 해결하기가 쉽지 않다. 물론 정리 3.3과 같이 벡터 M_i를 이용하면 문제에 대응하는 선형모델을 만들 수는 있지만, 언제나 수치적으로 완전한 최적해를 구할 수 있지는 않다. 그러나 본 논문에서 소개한 동치류의 개념을 이용한다면 <그림 10>와 같은 형태에 대하여도 언제나 해가 존재하는 초기조건을 찾아서 해가 존재하는 문제를 게임자에게 제시함은 물론, 해를 구하여 게임자에게 제공할 수도 있는 것이다.

4. 교육적 활용

앞에서 소개한 이러한 흑백게임은 다양한 교육적 용도로 활용될 수 있으며 특히 영재 학생들에게 좋은 교육 도구가 될 것이라고 본다. 따라서 여기에서는 영재와 영재교육환경에 대하여 알아보고, 흑백게임을 영재교육에 활용할 수 있는 방안에 대해 살펴보고자 한다.

13) <표 2>에 소개한 첫 번째 행에 대한 조정은 흰색으로 게임을 진행 할 경우, O와 X를 바꾸어 생각하면 된다. 예를 들어 OOOXO인 경우, XXXOX로 생각하여 네 번째 버튼을 클릭하면 된다.

1) 영재의 정의

영재(gifted children)라 함은 재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자를 말한다([3]). 즉 잠재력이 있지만, 재능아(talented children)처럼 특정 분야에서 이미 뛰어난 능력을 발휘하는 학생은 아니다. 마치 꽃봉오리와 같이 재능이 어떻게 피어날지 모르는 존재로서 우리는 그들이 원하는 교육 및 학습을 제공하여야한다.

2) 영재교육환경에서의 요구사항

이러한 영재 교육 대상자의 비율은 각 나라마다 수용할 수 있는 여건 등의 이유로 다르지만, 현재 우리나라의 영재 교육 대상자 비율은 0.5%이고 앞으로 1%까지 상향 조정중이며 이러한 영재교육으로의 활용을 위하여 영재교육환경에서의 요구사항을 살펴보면 교육내용 측면과, 교수·학습방법 측면에서 아래와 같이 소개하고 있다 ([4]).

먼저 교육내용 측면에서는 ① 다양하고 흥미있는 주제중심 교육내용, ② 복잡하고 추상적이며 심화된 교육내용, 그리고 ③ 기본 원리 및 개념을 강조하는 교육을 원하는 것으로 나타났으며, 교수·학습방법 측면에서는 ① 실험실습활동 및 탐구중심 수업방법, ② 현장 체험활동중심 수업방법, ③창의적 사고력을 강조하는 수업방법, ④ 토론하고 발표하며 적극적으로 참여하는 학습자중심 수업방법을 원하는 것으로 나타나고 있다. 이러한 요구사항들에 대하여 흑백게임이 얼마나 이런 요구사항에 부합되는지 두 가지 측면에서 알아보자. 우선 교육내용 측면에서 살펴보면 ① 게임이라는 주제를 활용함으로써 학생들로 하여금 흥미를 유도할 수 있으며, ② 동치류 및 동치관계의 도입을 통하여 학생들이 집합론적인 추상적 개념의 이해를 돕기 위한 도구로 활용할 수 있고, ③ 선형대수학의 기본적 원리를 이용하여 직접적으로 활용할 수 있는 방안을 소개함으로써 기본 원리 및 개념을 학생들에게 교육할 수 있는 좋은 도구로 활용할 수 있다.

두 번째로 교수·학습방법 측면에서는 ① 자바 도구를 학생들이 사용하는 실험실습 활동 및 탐구중심 수업을 진행할 수 있으며, ② 5×5 크기에서 $m\times n$ 크기까지 자연스럽게 확장하며 향상되는 대수적 추론을 통해 기존의 인지구조의 재발견을 통한 창의적 사고력을 증진시킬 수 있으며, ③ 5×5 크기의 흑백게임에서 패턴분석을 통한 동치류의 발견은 탐구능력과 협동심을 키우는 R&E(Research & Education) 프로그램으로 진행할 수 있다. 따라서 앞에서 소개한 5×5 크기의 흑백게임은 교육내용 측면과 교수·학습방법 측면에 부합하기에 영재교육환경에서 활용할 수 있는 게임이다.

3) 흑백게임의 영재 교육에의 활용

5×5 크기의 흑백게임의 동치류를 네 가지로 축소해가는 과정에 핵심적인 부분인 다양한 패턴분석은 대수적 추론을 하는데 도움을 줄 수 있고 이러한 것들은 5×5 크

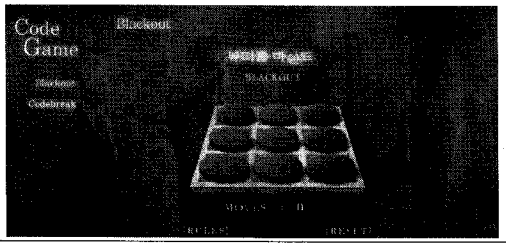
기의 흑백게임의 특수한 경우가 아니라 $m \times n$ 크기의 흑백게임에서의 동치류를 생각해나가는 방법까지 확장하여 생각하게 함으로서, 패턴분석에서 일반화로 가는 대수적 사고방식을 학생들에게 가르치는데 도움이 될 것이다. 또한, 5×5 크기의 흑백게임에서 많은 양의 패턴분석은 단순한 1:1 교육에서 활용하는 것이 아니라, 영재반의 학생들을 모둠으로 나누어 교육할 수 있는 도구로 활용할 수 있다. 이는 흑백게임만의 장점으로서 다양한 패턴분석으로 인한 많은 양의 탐구와 다양한 아이디어가 동반되기 때문이다. 본론에서는 5×5 크기의 흑백게임의 경우의 수인 2^{25}가지를 네 가지의 동치류로 분류하기 위해 단계 1, 2, 3, 4라는 아이디어를 사용했지만 이와 다른 방법의 아이디어는 얼마든지 가질 수 있다.

특히, 이러한 동치관계나 동치류에 대한 내용은 학생들이 게임을 직접 시행하여 찾아갈 수 있다는 점에서, 학생들이 추상적이고, 난해한 개념을 설명하는데 큰 도움이 될 것이다. 이 같은 게임을 통한 영재 교육은 실제로 [1]에 의하면 영재교육원 교육과정 중 2005년 강의 목록에 디피활동[14]이 있다는 것을 확인할 수 있다. 이처럼 게임을 통한 수학적 문제의 해법 탐색이 영재교육의 활성화에 도움을 주고 있는 것을 알 수 있다. 또한, 일반 고등학생들이 선형대수학의 기본개념인 선형연립방정식의 해를 구하는 문제로서 학생들에게 교육적인 목적으로 제공할 수도 있다. 이 방식은 단순한 산술형식의 행렬문제가 아닌 고등학교 과정에서 수준별 학습으로 다룰 수 있는 R&E 프로그램에서도 그 효과를 보일 수 있을 것이라고 생각된다.

4) 흑백게임의 영재교육상의 활용예제

본 절에서는 앞에서 소개한 흑백게임을 영재교육 활용을 위하여 어떤 방법으로 활용할 수 있는지 예제를 소개한다. 물론 앞에서 밝힌 것처럼, 영재교육에서 R&E 프로그램들에 활용하기 위하여 그에 맞는 학습지를 직접 개발하여 그 효과를 분석해야 하나, 여기서는 우선 이를 활용할 수 있는 한 가지 예만 들도록 하겠다.

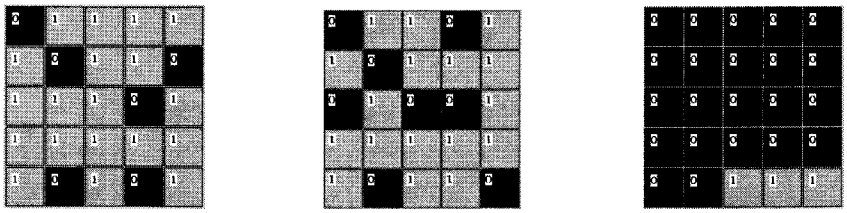
문제 1 : 다음에 주어진 바둑판이 있습니다. 이를 모두 한 색으로 통일해 봅시다. [12]



<그림 11> 흑백게임의 예제문제와 규칙

14) 디피(DIFFY)활동, http://cafe.naver.com/crin/207

위의 문제에 대한 호기심을 자극하기 위해서 위의 그림과 같이 영화 'Beautiful Mind'사이트를 직접 활용할 수도 있고, 또한 본 연구팀이 이미 개발한 [2]에 소개된 Java 도구 또는 다음절에 소개하고 있는 도구를 이용하여도 된다. 우선 교육을 받는 학생들에게 <그림 11>의 오른쪽의 규칙을 소개하고 직접 이 프로그램들을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 확인해본다. 학생들로 하여금 자유롭게 게임을 시행하도록 우선 두고, 학생들의 해를 찾아가는 방향을 확인해본다. 그 과정에서 학생들 사이에 토론을 유도하고, 이를 통하여 게임에 대한 관심을 유도한다. 학생들의 다양한 시도를 통하여 게임을 해결하려고 시도하는 동안, 교수자는 학생들 중, 승리조건 탐색을 위하여 접근하는 학생들의 사례를 발표시킨다. 이러한 발표를 통하여, 학생들 사이에 동치류에 대한 개념을 심어주어야 한다. 5×5경우의 흑백문제를 해결하면서 하나의 행으로 정리하여, 그것을 동치류와 같이 같은 형태로 묶는 것을 보여준다.



<그림 12> 맨 우측의 "00111"과 동일하게 나오는 초기조건들

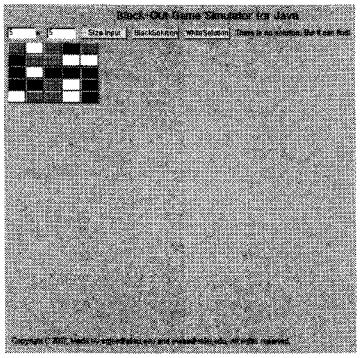
이를 통하여 학생들에게 정의 3.5와 정리 3.6에 소개된 동치류의 개념을 알려줄 수 있다. 학생들에게 이것들은 같은 초기조건으로 판단할 수 있고, 이러한 형태는 한 번에 문제를 풀 수 없다고 생각되지만, <표 2>의 내용을 이용하면 해를 구할 수 있음을 알려주면, 학생들도 이것이 "00000"과 같은 형태임을 알 수 있게 된다.

이렇게 게임을 통하여 학생들에게 관계의 정의와, 분류의 기법 및 동치류가 어떤 개념인지를 알게 하고, 겉으로 볼 에는 전혀 다른 것들이, 분류를 통하여 같은 구조로 생각할 수 있음을 경험하게 함으로서, 수학교육에 효과적으로 활용할 수 있다.

5) 일반적인 흑백게임을 위한 공학적 자바도구

본 연구팀은 앞에서 찾은 패턴을 이용하여 일반적으로 해가 존재하지 않는 경우인 4×4나 5×5의 경우에 대하여도 해를 찾을 수 있는 Java도구를 개발 할 수 있었다. 이미 [2]에서 개발된 도구와 앞에서 소개한 패턴들에 대한 분석정보, 그리고 단계 1, 2, 3, 4를 컴퓨터에서 Java를 이용하여 프로그래밍하여, 5×5에 대한 해법도 찾을 수 있는 Java 도구를 개발할 수 있었다. 이 Java 도구는 아래에서 바로 실행하여 확인할 수 있다. 이 도구는 앞에서 검증한 수학적 이론을 모두 시각적으로 구현해주며 모순이 없음을 분명하게 확인해 주는 수학적 증명(Mathematical verification)의 한 예가 된다.

http://matrix.skku.ac.kr/NewJAVA/BlackOut/Test.html



<그림 13> 5×5 크기의 흑백문제와 그 해를 찾은 모습

5. 결론

실생활에서 쉽게 접할 수 있던 간단한 문제인 흑백게임은 수학의 내적 외적 분야에 모두 많은 활용 가능성을 내포하고 있다. 예를 들어, 전기공급시스템(Power Grid System)을 초기에 설계할 때, 해결 가능한 흑백게임의 상태로 디자인한다면, 매우 손쉬운 전기공급시스템을 설계하는데 큰 도움이 된다. 마찬가지로, 다양한 사회적, 공학적 모델에 적용하고, 그 해를 구할 수 있는 방법을 소개할 수 있게 된다. 이는 수학적 모델링을 응용하여 다양한 사회, 공학적 문제에 수학을 적용할 수 있는 기회를 제공하게 될 것이다. 본 연구는 미해결로 남아있던 5×5 크기의 흑백게임은 승리할 수 있는 모든 초기조건을 완전히 분류하였다. 같은 방법으로, [2]에서 소개된 4×4 라든지, 9×9 등 다른 경우에 대하여도 승리할 수 있는 초기조건을 분류할 수 있다. 이런 연구는 승리할 수 있는 초기조건을 갖는 흑백게임 문제를 생성하는데 큰 도움이 된다. [2]에서 보고된 바와 같이, 흑백게임은 선형연립방정식의 해의 존재성과 해법에서 시작하여 다양한 크기의 심화된 수학적 타일링 문제를 거쳐, 본 논문에서는 패턴분석까지 가능하였다. 본 논문의 결론을 이용하면, 다양한 크기의 흑백게임에서 초기조건을 임의로 생성하도록 한 후, 동치류의 개념을 이용하여, 그 초기조건이 적절하면 바로 게임자에게 제시하고, 아니면 다른 초기조건을 구하여 같은 확인과정을 거쳐 답이 존재하는 초기조건이 나오면 비로소 게임자에게 제공하도록 할 수 있는 방법을 제시한 것이다. 이 경우 <그림 10>와 같은 형태에 대하여도 언제나 해가 존재하는 초기조건을 찾아서 해가 존재하는 문제를 게임자에게 제시함은 물론, 해를 구하여 게임자에게 제공할 수도 있는 것이다. 그렇다면 실제 게임자에게 주어지는 실험과 계산이 필요한 게임은 모두 해가 존재하는 경우가 되며, 이 경우 기존에 개발한 도구를 이용하여 답을 바로 제시할 수 있으므로, 흑백게임과 관련하여 모두가 원하던 범용의 게임기가

탄생할 수 잇다는 것이다. 본 논문에서는 5×5 크기의 흑백게임에 대한 이 모든 질문과 희망에 대한 답은 물론 도구라는 선물까지 제공한 것이다.

본 연구에서 개발된 내용은 간단한 게임의 수학적모델링 과정과 이론 및 도구의 활용 및 일반화를 모두 포함하는 예로, 수학교육에서 증진된 효과를 같이 노릴 수 있는 좋은 사례로 고려할 수 있다 ([1]). 따라서 본문에서 소개한 바와 같이 본 연구의 모든 과정은 교육적 목적으로도 활용할 수 있으며, 특히 영재들의 호기심을 자극하여, 추상적인 수학적 개념을 이해시키는데 많은 효과를 기대할 수 있었다. 현재 영재교육에서의 활용은, 국립순천대학교 영재교육원 사사과정에 이를 도입하여 현재 실제현장에서 어떠한 형태로 적용되고, 그 효과는 어떤 모양으로 나타날지를 확인하고 있다.

참고 문헌

1. 강병련·김희영(2008) 대학부설 과학영재교육원 초등수학 교육과정 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E, 제 22 집, 1호, pp. 13-26
2. 김덕선·이상구(2007) $m \times n$ 크기의 일반적인 흑백 게임의 최적해와 타일링, 한국수학교육학회지 시리즈 E, 제 21집 제4호, pp. 597-612.
3. 법률 제8852호(2001), 영재교육진흥법, 교육인적자원부 [일부개정 2008.2.29]
4. Araujo, P. V.(2000) How to Turn All the Lights Out, Elem. Math. 55, p. 135 - 141
5. Anderson M. and Feil T.(1998), Turning lights out with linear algebra, Mathematics Magazine, Vol. 71, No. 4, pp.300-303
6. Birkhoff, G. and McLane, S.(1999), Algebra, 3rd ed. Chelsea.
7. Delgado, T., 'Beyond Tetris' - Lights Out, GameSetWatch, January 29, 2007.
8. Hansell, S., Building a Better Cat, New York Times, December 5, 2002.
9. Lee, S.-G., Park, J.-B., Yang, J.-M. and Kim, I.-P.(2004), Linear algebra algorithm for the optimal solution in the Blackout game, Journal of Korean Soc. Math. Ed. Ser. A : The Mathematical Education, Feb. , Vol. 43, No 1. 87-96
10. Lee, S.-G. and Yang, J.-M.(2006), Linear Algebraic approach on real sigma-game, Journal of Applied Mathematics and Computing, May, Vol. 21, No. 1-2, 295-305
11. Losada, R.(2002), All lights and lights out - An investigation among lights and shadow, SUMA, Vol 40

12. CJ entertainment Inc.(2002), JAVA 프로그램, 영화 뷰티풀 마인드 흑백(Blackout) 게임, URL : http://www.cjent.co.kr/beautifulmind/
13. Fiver(2007), http://math.com. Accessed on line October 18, 2007.

History of mathematical modeling on the Black-Out Game

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University Duk Sun Kim
Department of Mathematics Education, Suncheon University Chang Woo Ryu
Department of Mathematics Education, Suncheon University Yeong Moo Song
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University Sang Gu Lee*

Black-out Game(Lightout, Merlin Game, $\sigma+$Game) is an interesting game on the chessboard, when you click a button with black or white color, it changes color of itself and other buttons who shares edges. With this rule, we win the game when we have a chessboard with all same color after we click some of the buttons of it. Pretty much of research has been made on founding the winnable strategy for this type of game. In this paper, we first introduce a history of mathematical modeling on this game. Then we develop an algorithm to offer a winnable blackout game of any size. Our tools also show our new algorithm works. Finally, we show how we can use this game in mathematics education.

Key Words : Black-Out, Lights-Out, Sigma Game, history, mathematical modeling, mathematics education.

2000 Mathematics Subject Classification : 97C90, 97U50, 97U70

ZDM Classification : D45, M15, U51

접수일 : 2009년 1월 3일 수정일 : 2009년 2월 5일 게재확정일 : 2009년 2월 15일