

논문 2009-46SC-2-2

불확실한 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화

(Robust Finite-Time Stabilization for an Uncertain Nonlinear System)

서 상 보*, 심 형 보*, 서 진 현*

(Sangbo Seo, Hyungbo Shim, and Jin Heon Seo)

요 약

본 논문에서는 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화 문제를 고려한다. 불확실성은 시변 외란 혹은 이미 알고 있는 옹골 집합에 포함된 파라미터들이다. 제안된 설계기법은 역진기법(backstepping)과 추가된 다이내믹스를 이용한 다이내믹 지수 보정법(dynamic exponent scaling)에 기반을 두고 있으며, 이로부터 다이내믹 스무스 케환 제어기(dynamic smooth feedback controller)가 유도된다. 페루프 시스템의 유한 시간 안정과 제어기의 유한함은 각각 유한 시간 안정에 관한 리아푸노프 안정 이론과 새로운 개념인 '차수 지표자(degree indicator)'를 이용하여 증명된다.

Abstract

In this paper we consider the problem of global finite-time stabilization for a class of uncertain nonlinear systems which include uncertainties. The uncertainties are time-varying disturbances or parameters belong to a known compact set. The proposed design method is based on backstepping and dynamic exponent scaling using an augmented dynamics, from which, a dynamic smooth feedback controller is derived. The finite-time stability of the closed-loop system and boundedness of the controller are proved by the finite-time Lyapunov stability theory and a new notion 'degree indicator'.

Keywords : finite-time stability, robust control, backstepping, uncertainties

I. 서 론

유한 시간 안정화 문제는 빠른 수렴성과 외란 등에 대한 강임함 등의 장점으로 많은 연구가 진행되어 왔다. 유한 시간 안정의 개념은 시간 최적(time-optimal) 제어 문제에서 자연스럽게 발생되었는데, 시간 최적 제어는 임의의 초기값에 대해서 모든 페루프의 궤적들이 최소의 시간 내에 원점으로 수렴하도록 하는 것이 목표이며, 원점에서의 유한 시간 수렴이라는 특징을 지닌다. 그 중 bang-bang 시간 최적 제어기가 이중 적분형(double integrator) 시스템에 대해서 설계되었으며^[1],

그 이후로 유한 시간 안정화 문제에 대해서 많은 연구들이 진행되어 왔다^[2~14]. 유한 시간 안정에 대한 리아푸노프 정리^[2]의 소개는 연속인 비선형 시스템에 대한 유한 시간 안정을 테스트하는 간편한 도구의 소개라는 관점에서 다양한 결과들에 적용되고 있다^[3~7, 9~14]. 이중 적분형 시스템에 대한 연속 상태 케환 제어기가 설계된 후, 유한 시간 안정에 관한 리아푸노프 정리를 사용하여 페루프 시스템의 원점이 유한 시간 안정이라는 것이 증명되었으며^[4], 연속 출력 케환 제어기 또한 이중 적분형 시스템에 대하여 설계되어 유한 시간 안정화 리아푸노프 정리가 적용되었다^[7]. 동차성(homogeneity)의 개념을 사용한 결과들^[3~8]과는 달리 역진(backstepping) 기법을 사용하여 연속인 유한 시간 안정화 제어기들^[9~13] 또한 설계되었는데, 상태 케환^[9, 13~14]과 출력 케환^[10~12] 제어기와 고려된 시스템의 페루프 시스템의 원점이 유한 시간 안정함은 유한 시간 안정 리아푸노프 정

* 정회원, 서울대학교 전기컴퓨터공학부
(ASRI, School of Electrical Engineering and
Computer Science, Seoul National University)

※ 본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구
구원(R-2005-7-048) 주관으로 수행된 과제임
접수일자: 2008년10월31일, 수정완료일: 2008년12월29일

리^[5]로 증명이 되었다.

본 논문에서는 다이나믹 지수 보정법(dynamic exponent scaling)에 기반을 둔 역진 제어 기법을 사용한 다이나믹 상태 궤환 제어기를 설계하고자 한다. 이전 결과들의 연속 제어기와는 달리 본 논문에서는 무한 미분 가능한 스무스(smooth) 함수가 설계되므로 원점을 제외한 모든 영역에서 해의 존재성과 유한성을 쉽게 증명할 수 있다. 사실 이전의 결과들에서는 증명하기에 다소 어려움이 있는 선행 시간에 대한 해의 존재성을 미리 가정을 하거나^[3-8], 많은 해들이 존재할 수도 있지만 모두 안정하다는 'strong stability'의 개념을 적용하였다^[9-13]. 본 논문에서 제시되는 유한 시간 안정화 제어기의 또 다른 장점은 domination에 기반을 둔 역진 기법을 사용한 연속 제어기들^[9-13]에 비해 상대적으로 적은 hardened feedback^[15]을 준다는 점이다. Hardened control은 상태 공간 상의 특정 영역에서 불필요하게 높은 이득값을 사용하여, 과도하게 큰 제어 입력을 야기시킨다는 개념이다. 이와 같은 원인은 domination방법에 기반을 둔 역진 기법을 사용하여 연속 제어기를 설계하였기 때문이며, 본 논문에서는 불확실성을 포함하는 드리프트항을 제외한 다른 항들에 비해 대해서는 cancelation방법을 사용하여 스무스 제어기를 설계하므로 이런 현상을 피하게 된다. 단지 제시되는 제어기에 대해서 고려되어야 할 점은 설계된 제어기는 분모에 0으로 수렴하는 특정 상태 변수를 지니므로 페루프 시스템의 해가 유한 시간 내에 원점으로 도달하는 동안 제어기가 유한함을 증명할 필요가 있다는 것이다. 이 증명을 위해서 우리는 '차수 지표자(degree indicator)'라는 새로운 개념을 도입한다. 3차 비선형 시스템에 대해 이 기법을 사용하여 다이나믹 유한 시간 안정화 제어기가 설계되었으나^[14], 본 논문에서는 시변 외란 혹은 기저 영역 내의 파라미터 등의 불확실성이 포함된 비선형 시스템을 고려하고자 한다.

이 논문에서는 다음과 같은 불확실성을 포함한 2차 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1, d(t)), \\ \dot{x}_2 &= u + f_2(x_1, x_2, d(t)). \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x = [x_1, x_2]^T \in R^2$ 는 시스템 상태변수, $u \in R$ 는 제어 입력이고 $d(t)$ 는 기저 용골 집합 $\Omega \subset R^s$ 에 속하는 외란 혹은 변수이다. 함수 $f_i: R^i \times R^s \rightarrow R, i = 1, 2$

는 모든 $d(t) \in \Omega$ 에 대해 $f_i(0, d(t)) = 0$ 을 만족하며 상태 변수에 대해 연속적으로 미분 가능한 함수이다. 본 논문의 목표는 시스템 (1)에 대해서 다이나믹 상태 궤환 제어기

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0(x_0, x_1, x_2), \quad x_0(0) > 0, \\ u &= u(x_0, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

가 설계될 것이다. $f_0(\cdot)$ 은 항상 양의 초기값을 가지는 추가 다이나믹이고, u 는 설계될 제어기이다.

II장에서는 본 논문의 주요 개념들이 소개되고, III장에서는 주요 정리 및 증명이 제시되는데, 증명은 제어기 설계 과정, 설계된 제어기의 유한성 증명, 그리고 증명의 요약으로 구성된다. 마지막으로 IV장에는 본 논문의 결과를 요약한다.

II. 주요 개념의 소개

1. 유한 시간 리아푸노프 안정 이론

먼저 본 논문의 주요 정리의 증명에 사용될 유한 시간 안정에 대한 리아푸노프 정리를 소개하고자 한다.

보조정리 1.^[5] 연속인 시스템 $\dot{x} = f(x) (f(0) = 0, x \in R^n)$ 에 대해서 미분 가능한 함수 $V(x)$ 가 원점 주변의 영역 $U \subset R^n$ 에서 존재하고

<1> $V(x)$ 는 영역 U 에서 positive definite

<2> $x \in U$ 인 모든 x 에 대해 $\dot{V} + kV^\alpha \leq 0$

의 두 조건을 만족하는 실수 $k > 0, 0 < \alpha < 1$ 들이 존재한다고 가정하자. 그러면 이 시스템의 원점은 국소 유한 시간 안정(locally finite-time stable)이다. 초기값 $x(0)$ 에 의존하는 정착 시간(settling time)은

$$T_x(x(0)) \leq \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}$$

이다. 만약 $U = R^n$ 이고 $V(x)$ 이 radially unbounded이면 원점은 광역적 유한 시간 안정(globally finite-time stable)이다. \square

2. 다이나믹 지수 보정법

다음으로 이 논문의 주요 아이디어 중 하나인 다이나믹 지수 보정법을 소개하자 한다. 이 지수 보정법은 $x^{4/3}$ 과 같은 스무스 함수가 아닌 항을 x^2 와 같은 스무

스 함수로 보정하기 위해 사용된다.

보조정리 2. 양의 상수 \bar{g} 와 $0 < d < 1$ 를 만족하는 분모, 분자가 모두 홀수인 분수 d 가 존재할 때, $|g(x)| \leq |x|^{1+d\bar{g}}$ 를 만족하는 연속 함수 $g(x)$ 와 변수 $y > 0$ 에 대해서 다음의 부등식을 만족하는 양수 σ 가 존재한다.

$$g(x) \leq \left(\frac{1-d}{2}\right)y^{1+d} + \frac{x^2\sigma}{y^{1-d}} \quad (3)$$

□

보조정리 2의 증명은 영의 부등식(Young's inequality)으로 쉽게 증명이 가능하다.

3. 차수 지표자

다음으로 소개할 내용은 설계된 입력 u 의 유한성을 증명하기 위해서 사용될 차수 지표자의 개념이다. 보조정리 2에서 소개된 다이내믹 지수 보정법과 역진 기법을 사용하여 설계된 입력은 분모에 변수가 포함되므로 이 변수가 0으로 수렴해 감에 따라 입력의 유한성을 보존함을 증명할 필요가 있다.

함수 $g(x_0, x)$ 에 대해서 차수 지표자의 정의는 다음과 같다.

$$D(g(x_0, x)) := \inf \beta \quad \text{subject to} \\ \limsup_{x_0 \rightarrow +0} \bar{g}(x_0)x_0^\beta < \infty$$

여기서 $\bar{g}(x_0) := \max_{f_0(x_0, x) \leq 0} |g(x_0, x)|$ 이고 $f_0(\cdot)$ 는 추가 다이내믹스의 시스템이다. 추가 상태 변수 x_0 는 원점 주변에서 감소하면서 0으로 수렴하게 되므로 $f_0(\cdot) \leq 0$ 의 관계를 만족하는 영역에서 차수 지표자의 정의를 도입하게 됨을 주의하자. 차수 지표자의 자세한 성질은 추후에 논하기로 한다.

III. 불확실 시스템의 강인 유한 시간 안정화

이 장에서는 주요 정리와 그의 증명을 소개하고자 한다. 이를 위해 집합 $R^{(+,2)} := \{(x_0, x) \in R^3 : x_0 > 0\}$ 을 정의한다.

1. 주요 결과

본 논문의 주요 정리는 다음과 같다.

정리 1. d 는 $1/2 < d < 1$ 를 만족하는 분자와 분모가 홀수인 분수라고 하자. 이 때, 시스템 (1)에 대해서 $R^{(+,2)}$ 에서 정의되는 $x_0(0) > 0$ 인 다이내믹 제어기

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, x), \quad u = u(x_0, x)$$

가 존재하고, 이는 페루프 시스템의 원점을 광역적 유한 시간 안정하게 한다. 그리고 함수 $f_0(x_0, x)$ 와 $u(x_0, x)$ 는 시스템의 해가 원점에 도달하는 동안 유한하다. □

2. 정리 1의 증명

주요 정리의 증명은 세 부분으로 나누어진다. 첫 부분은 다이내믹 지수 보정법과 역진 기법을 사용하여 설계된 제어기가 보조 정리 1을 만족함을 보이는 대수적 설계 부분이고, 두 번째 부분은 추가 다이내믹스의 함수와 설계된 제어기의 유한함을 차수 지표자 개념을 사용하여 증명하는 부분이다. 마지막으로 증명을 종합함으로써 주요 정리의 증명을 마무리한다.

가. 스무스 다이내믹 제어기의 대수적 설계

구체적인 설계에 앞서 시스템 (1)에 대한 추가 다이내믹스는 아래와 같이 설계된다.

$$\dot{x}_0 = -k_0 x_0^d + \frac{\gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^{-2}}{x_0^{2-d}}, \quad x_0(0) > 0 \quad (4)$$

여기서 $\bar{x}_2 = x_2 - x_2^*$ 이고 $x_2^*(x_0, x_1)$ 는 추후에 설계될 가상의 입력이다. 그리고 k_0 와 γ_1, γ_2 는 임의의 양의 이득값들이다. 지수 d 는 $0 < d < 1$ 로 설정되므로 우측편의 두 번째 항이 0이면 $x_0(t)$ 는 유한 시간 내에 0에 도달하게 된다. 하지만 상태 변수들이 원점에 도달하기 전에는 $x_0(t)$ 는 절대 원점에 도달하지 않는다는 점을 구조적으로 파악할 수 있다.

다이내믹 제어를 설계하기 위해서 우선 역진 기법의 단계 1에서는 가상 입력 x_2^* 가 설계되고, 단계 2에서 최종적인 제어기가 설계될 것이다.

단계 1: 이 단계는 역진 기법의 첫 번째 단계로 x_1 하위 시스템에 대해서 가상의 입력 x_2^* 를 설계할 것이다. 리아푸노프 함수 $V_1 = (x_0^2 + x_1^2)/2$ 의 미분에 항 $k_1 x_1^{1+d}$ 의 합차를 추가하면

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_0 x_0^{1+d} + \frac{\gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 \bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}} + x_1 (\bar{x}_2 \\ & + x_2^* + f_1(\cdot)) - k_1 x_1^{1+d} + k_1 x_1^{1+d} \end{aligned}$$

가 얻어지며 여기서 $k_1 > 0$ 은 설계되는 이득값이다. 항 $-k_1 x_1^{1+d}$ 는 리아푸노프 함수의 미분이 음임을 보여서 보조정리 1의 증명에 사용될 부분이고, 항 $k_1 x_1^{1+d}$ 는 보조정리 2의 지수 보정법을 사용하여 스무스 함수로 보정될 것이다. 보조 정리 2를 사용하면

$$|k_1 x_1^{1+d}| \leq \frac{x_0^{1+d}}{p} + \frac{x_1^2 \sigma_1}{x_0^{1-d}} \quad (5)$$

가 얻어지고, 여기서 $p = 2/(1-d)$, $q = 2/(1+d)$, $\sigma_1 = k_1^q/q$ 이다.

불확실성을 포함하고 있는 함수 $f_1(x_1, d(t))$ 는 $f_1(0, d(t)) = 0$ 를 만족하는 연속적으로 미분 가능한 함수이므로 $|f_1(\cdot)| \leq |x_1| \bar{f}_1(x_1)$ 를 만족하는 스무스 함수 $\bar{f}_1(\cdot) \geq 0$ 가 존재함을 알 수 있다^[6]. $\eta_1(x_1) = \bar{f}_1(\cdot)$ 로 정의하면, 식 (5)와 함께

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(k_0 - \frac{1}{p}\right) x_0^{1+d} - k_1 x_1^{1+d} + \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}} \\ & + x_1 (\bar{x}_2 + x_2^*) + \frac{x_1^2 (\gamma_1 + \sigma_1)}{x_0^{1-d}} + x_1^2 \eta_1(\cdot) \end{aligned}$$

로 정리되고, 가상의 입력을

$$x_2^* = -x_1 \left(\frac{\gamma_1 + \sigma_1}{x_0^{1-d}} + \eta_1(\cdot) + 1 \right) \quad (6)$$

와 같이 설계할 수 있다. 그러므로 이 단계에서는 다음에 도달하게 된다.

$$\dot{V}_1 \leq -\left(k_0 - \frac{1}{p}\right) x_0^{1+d} - k_1 x_1^{1+d} - x_1^2 + \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}} + x_1 \bar{x}_2.$$

가상 입력 x_2^* 의 특징은 추가 다이내믹스 x_0 가 분모에 있으므로 원점 근방에서 유한함을 따로 증명해 주어야 한다. 이 증명은 주요 정리 1의 두 번째 증명 부분에서 다룬다.

단계 2: 이 단계에서는 최종 제어기 u 를 설계할 것이다.

리아푸노프 함수를 $V = V_1 + \bar{x}_2^2/2$ 로 선택하고 항 $k_2 \bar{x}_2^{-1+d}$ 의 합차를 추가하면

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{V}_1 + \bar{x}_2 (u + f_2(\cdot)) - \bar{x}_2 \left(\frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_0} \dot{x}_0 \right) \\ & - k_2 \bar{x}_2^{-1+d} + k_2 \bar{x}_2^{-1+d} \end{aligned}$$

로 유도되고, 단계 1과 마찬가지로 지수 보정법을 사용하면

$$k_2 \bar{x}_2^{-1+d} \leq \frac{x_0^{1+d}}{p} + \frac{\bar{x}_2^2 \sigma_2}{x_0^{1-d}}, \quad \sigma_2 = \frac{k_2^q}{q} \quad (7)$$

가 된다.

불확실성이 포함된 함수 $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ 는 각각

$$\begin{aligned} |f_1(x_1, d(t))| & \leq |x_1| \bar{f}_1(x_1) \\ |f_2(x, d(t))| & \leq (|x_1| + |x_2|) \bar{f}_2(x) \end{aligned}$$

의 관계를 만족하므로 아래의 부등식으로 유도가 가능하다.

$$\begin{aligned} & \left| \bar{x}_2 f_2(\cdot) - \bar{x}_2 \frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_1} f_1(\cdot) \right| \\ & \leq |\bar{x}_2| (|x_1| + |\bar{x}_2 + x_2^*|) \bar{f}_2(\cdot) \\ & \quad + |\bar{x}_2| \left| \frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_1} \right| |x_1| \bar{f}_1(\cdot) \\ & \leq \frac{3}{4} x_1^2 + \bar{x}_2^2 \eta_2(x_0, x_1, x_2). \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 x_2^* 의 정의와 영의 부등식 $xy \leq x^2/4 + y^2$ 이 사용되었다. 그리고

$$\begin{aligned} \eta_2(\cdot) = & \bar{f}_2(\cdot) + \bar{f}_2^2(\cdot) \left(\frac{\gamma_1 + \sigma_1}{x_0^{1-d}} + \eta_1(\cdot) + 1 \right)^2 \\ & + \bar{f}_1^2(\cdot) \left(\frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_1} \right)^2 + \bar{f}_2^2(\cdot) \end{aligned}$$

이다. 따라서 식 (7)과 (8)에 의해서, $R^{(+,2)}$ 공간에서 스무스한 다이내믹 제어기 u 를 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$u = -x_1 - \bar{x}_2 \left(\frac{\gamma_2 + \sigma_2}{x_0^{1-d}} + \eta_2(\cdot) \right) + \frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \bar{x}_2^*}{\partial x_0} x_0 \quad (9)$$

이로부터

$$\dot{V} \leq -\left(k_0 - \frac{2}{p}\right)x_0^{1+d} - k_1x_1^{1+d} - k_2\bar{x}_2^{1+d}$$

가 얻어지고, 각각의 이득값들을 $k_0 > 1/p$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ 를 만족하도록 정하면 $\dot{V} \leq 0$ 임을 알 수 있다. 리아푸노프 함수 $V = x_0^2/2 + x_1^2/2 + \bar{x}_2^2/2$ 와 위의 결과를 이용하면 보조 정리 1의 <2>의 조건이 이득값의 조정을 통해 얻어짐을 아래와 같이 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} + kV^\alpha &\leq \dot{V} + \frac{k}{2^{(1+d)/2}}(x_0^{1+d} + x_1^{1+d} + \bar{x}_2^{1+d}) \\ &\leq -\left(\min\left\{k_0 - \frac{2}{p}, k_1, k_2\right\} - \frac{k}{2^{(1+d)/2}}\right) \\ &\quad \times (x_0^{1+d} + x_1^{1+d} + \bar{x}_2^{1+d}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

를 만족시키도록 하는 $k \leq 2^{(1+d)/2} \min\{k_0 - 2/p, k_1, k_2\}$ 조건의 k 값의 설정으로 보조 정리 1이 만족됨을 알 수 있다. 그러므로 시스템 (1)과 제어기 (9)의 페루프 시스템의 원점은 광역적 유한 시간 안정이다.

나. 설계된 제어기의 유한성

입력의 유한성은 (x_0, x_1, x_2) 좌표 대신에 (x_0, x_1, \bar{x}_2) 좌표 상에서 증명될 것이다. 그 이유는 추가 다이내믹스 (4)는 \bar{x}_2 를 직접적으로 포함하기 때문이다. 또한 $R^{(+,2)}$ 공간에서 두 좌표는 스무스 변환이 가능하므로 합리적인 접근임을 알 수 있다.

우선 $P := \{(x_0, x) \in R^{(+,2)} : \gamma_1x_1^2 + \gamma_2\bar{x}_2^2 \leq k_0x_0^2\}$ 와 $P_R := P \cap B_R$ 를 정의하자. B_R 은 원점이 중심이고 반지름이 $R > 0$ 인 열린 구이다. 영역 P 는 $f_0(\cdot) \leq 0$ 을 만족하는 영역임을 명심하자. II장에서 소개된 차수 지표자는 영역 P_R 에서 증명될 것이다. $R^{(+,2)} \setminus P$ 영역에서 출발한 궤적들은 (4)의 구조에 의해서 $f_0(\cdot) \geq 0$ 이므로 $x_0(t)$ 는 상승하게 되고, 영역 P 내로 들어오게 된다. 영역 P 내에서는 $f_0(\cdot) \leq 0$ 를 만족하므로 원점을 향해 감소하게 되고, 결국 영역 P_R 내로 들어오게 된다. 그러므로 추가 상태 변수 $x_0(t)$ 는 P_R 영역 내에서 0에 도달하게 된다. 추가 다이내믹스 (4)와 제어 입력 (9)가 영역 $R^{(+,2)} \setminus P_R$ 에서 유한함을 쉽게 증명되므로, 영역 P_R 내에서만 u 와

$f_0(\cdot)$ 가 유한함을 증명하면 된다. 이것이 II장에서 소개된 차수 지표자가 $f_0(\cdot) \leq 0$ 의 영역에서 정의되는 이유이다. 실제적인 증명에 앞서 차수 지표자의 성질을 소개하고자 한다.

명제 1.

<1> $g(x_0, x) = g_1(x_0, x) + g_2(x_0, x)$ 를 만족하는 함수 g, g_1, g_2 에 대해서

$$D(g(\cdot)) \leq \max\{D(g_1(\cdot)), D(g_2(\cdot))\} \quad (10)$$

<2> $g(x_0, x) = g_1(x_0, x)g_2(x_0, x)$ 를 만족하는 함수 g, g_1, g_2 에 대해서

$$D(g(\cdot)) \leq D(g_1(\cdot)) + D(g_2(\cdot)) \quad (11)$$

□

더 진행하기에 앞서 몇 가지 예제로 차수 지표자의 성질을 이해하기로 한다.

예제 1. $g_1 = 1, g_2 = -1$ 로 두자. 그러면 $g = 0$ 이 되고 $D(g_1) = D(g_2) = 0, D(g) = -\infty$ 에 의해서 명제 1의 <1>이 성립됨을 알 수 있다.

예제 2. $g = x_1/x_0^2 + 1 + \bar{x}_2$ 의 함수를 고려하자. 첫 항에 명제 1의 <2>성질을 적용하면 $D(x_1/x_0^2) \leq 1$ 임을 알 수 있고, 전체적으로 명제 1의 <1>성질을 이용해서 함수 g 의 차수 지표자 $D(g) \leq \max\{1, 0, -1\} = 1$ 을 구할 수 있다.

이제 본격적으로 설계된 제어기의 유한함을 증명하기로 한다. 상태 변수들이 원점에 도달하는 동안 제어 입력이 유한하려면 차수 지표자 값이 항상 음의 값을 유지해야 함을 명심하자. 이를 위해 상수 d 에 제한 조건을 정함으로써 항상 이 제어 입력의 차수 지표자가 항상 음이 됨을 유도할 것이다.

우선 식 (6)의 가상의 입력 x_2^* 를 고려하자. $\eta_1(\cdot) = \bar{f}_1(x_1)$ 이므로 $D(\bar{f}_1(\cdot)) \leq 0$ 임을 먼저 증명해야 한다. $\bar{f}_1(x_1)$ 는 스무스 함수, 상수, 0의 형태를 가질 가능성을 모두 포함하고 있다. 그래서 $D(x_1) = -1, D(\text{상수}) = 0, D(0) = -\infty$ 임을 종합하면 $D(\bar{f}_1(\cdot)) \leq 0$ 임을 쉽게 알 수 있다. 자세한 증명 과정은 [14]를 참조하기로 한다. 이 결과와 $D(x_1) \leq -1, D((\gamma_1 + \sigma_1)/x_0^{1-d} + 1)$

$\leq 1-d$, $D(\eta_1(\cdot)) \leq 0$ 를 성질 (10)에 적용하여 $D(x_2^*) \leq -d$ 임을 알 수 있다. $0 < d < 1$ 의 사실로부터 가상의 입력 x_2^* 는 영역 P_R 내, 즉, $R^{(+,2)}$ 영역에서 항상 유한함을 알 수 있다. 그리고 제어 입력에는 x_2^* 의 편미분들이 포함되어 있으므로 간단한 계산으로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_i}\right) \leq 1-d, \quad i=0,1 \quad (12)$$

제어 입력 (9)의 함수 $\eta_2(\cdot)$ 는 분모에 x_0 를 포함하고 있으므로 이에 대한 차수 지표자 값을 구할 필요가 있다. $\eta_2(\cdot)$ 에 포함된 $\bar{f}_2(x_1, x_2)$ 은 우리가 $\bar{f}_2(x_1, \bar{x}_2 + x_2^*)$ 의 형태로 변환하여 이용하므로 좀 더 주의를 기울일 필요가 있다. 이 함수 역시 모든 가능성을 가지므로 $D(x_1) = -1, D(\bar{x}_2) = -1, D(x_2^*) \leq -d < 0$ 와 상수일 가능성까지 종합하면 $D(\bar{f}_2(\cdot)) \leq 0$ 임을 알 수 있다^[14]. 이 사실과 (12)의 결과 및

$$D\left(\frac{\gamma_1 + \sigma_1}{x_0^{1-d}} + \eta_1(\cdot) + 1\right) \leq \max\{0, 1-d, 0\} = 1-d$$

를 정리 1에 적용하면

$$D(\eta_2(\cdot)) \leq \max\{0, 2(1-d), 2(1-d)\} = 2(1-d)$$

임을 알 수 있다. 그리고 (4)와 \bar{x}_2 의 정의에 의해서 $D(x_0) \leq -d, D(x_2) = D(\bar{x}_2 + x_2^*) \leq -d$ 를 얻을 수 있으므로

$$\begin{aligned} & D\left(x_2 \left(\frac{\gamma_2 + \sigma_2}{x_0^{1-d}} + \eta_2(\cdot) \right)\right) \\ & \leq -1 + \max\{1-d, 2(1-d)\} = 1-2d, \\ & D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_2\right) \leq (1-d) + (-d) = 1-2d, \\ & D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_0} x_0\right) \leq (1-d) + (-d) = 1-2d. \end{aligned}$$

로부터

$$D(u) \leq \max\{-1, 1-2d, 1-2d, 1-2d\} = 1-2d \quad (13)$$

가 된다. 입력이 영역 P_R 에서 유한하기 위해선 음의 차수 지표자 값을 가져야 하므로 $1-2d < 0$, 즉,

$1/2 < d < 1$ 의 조건을 만족한다면 입력이 유한함을 유지하면서 원점에 도달함을 알 수 있다. 그러므로 $1/2 < d < 1$ 의 조건하에서 제어 입력 (9)는 $R^{(+,2)}$ 영역에서 원점에 도달하기까지 항상 유한하다.

다. 주요 정리1의 증명의 종합

아래의 항목으로 주요 정리의 증명을 마무리 한다.

- <1> 초기값 $x(0), x_0(0) > 0$ 에 대해서 (1), (4), (9)의 페루프 시스템은 $(x_0(t), x(t)) \in R^{(+,2)}$ 에서 유일한 해를 가진다^[16].
- <2> 해 $(x_0(t), x(t))$ 는 유한 시간 $T > 0$ 에서 $(0, 0)$ 이 된다. 그리고 $0 \leq t < T$ 에서 항상 $x_0(t) > 0$ 이다.
- <3> $f_0(x_0, x), u(x_0, x)$ 는 $0 \leq t < T$ 내에서 항상 유한하다.

주 1. 페루프 시스템에서 실제 시스템은 아래와 표현을 해야 합리적이다.

$$\dot{x}_0 = \begin{cases} f_0(x_0, x), & x_0 \neq 0 \\ 0, & x_0 = 0 \end{cases}, u = \begin{cases} u(x_0, x), & x_0 \neq 0 \\ 0, & x_0 = 0 \end{cases}$$

IV. 결 론

본 논문에서는 불확실한 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화 문제를 고려하였다. 기존의 연속적인 제어기의 설계 방법이 아닌 다이나믹 지수 보정법을 사용한 다이나믹 유한 시간 제어기를 제시하였다. 차수 지표자라는 새로운 개념의 도입을 통해서 제어기의 유한함을 쉽게 보일 수 있었다. 향후 연구는 일반적인 n 차 시스템으로의 확장이 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] M. Athans and P. I. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its applications*, New York: McGraw-Hill, 1966.
- [2] V. T. Haimo, "Finite-time controllers," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 24, no. 4, pp. 760-770, 1986.
- [3] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Lyapunov analysis of finite-time differential equations," in *Proc. of American Control Conf.*, pp. 1831-1832,

Seattle, June 1995.

- [4] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Continuous finite-time stabilization of the translational rotational double integrators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.
- [5] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.
- [6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability," *Math. Contr. Signal Systems*, vol. 17, pp. 101-127, 2005.
- [7] Y. Hong, J. Huang, and Y. Wu, "On an output feedback finite-time stabilization problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, no. 2, pp. 305-309, 2001.
- [8] Y. Hong, "Finite-time stabilization and stability of a class of controllable systems," *Syst. and Contr. Letters*, vol. 46, pp. 231-236, 2002.
- [9] X. Huang, W. Lin, and B. Yang, "Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems," *Automatica*, vol. 41, pp. 881-888, 2005.
- [10] J. Li and C. Qian, "Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 51, pp. 879-884, 2006.
- [11] C. Qian and J. Li, "Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, pp. 885-890, 2005.
- [12] C. Qian and J. Li, "Global output stabilization of upper-triangular nonlinear systems using a homogeneous domination approach," *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 16, pp. 441-463, 2006.
- [13] J. Back, S. G. Cheong, H. Shim, and J. H. Seo, "Nonsmooth feedback stabilizer for strict-feedback nonlinear systems that may not be linearizable at the origin," *Sys. and Contr. Letters*, vol. 56, pp. 742-752, 2007.
- [14] S. Seo, H. Shim, and J. H. Seo, "Global finite-time stabilization of a nonlinear system using dynamic exponent scaling," in *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 3805-3810, Cancun, Mexico, Dec., 2008.
- [15] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design*, Birkhauser, 1996.
- [16] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, NJ: Prentice-Hall, 3rd edition, 2002.

저 자 소 개



서 상 보(정회원)
 2003년 부산대학교 전기공학과
 학사 졸업.
 2006년 서울대학교 전기컴퓨터
 공학부 석박사통합과정
 박사 수료.
 2009년 서울대학교 전기컴퓨터
 공학부 박사 과정
 <주관심분야 : 비선형 시스템 제어 및 해석>



심 형 보(정회원)
 1993년 서울대학교 전기공학과
 학사 졸업.
 1995년 서울대학교 전기공학부
 석사 졸업
 2000년 서울대학교 전기공학부
 박사 졸업.
 2009년 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부교수
 <주관심분야 : 비선형 시스템 제어 및 해석>



서 진 현(정회원)
 1978년 서울대학교 전기공학과
 학사 졸업.
 1980년 서울대학교 전기공학과
 석사 졸업.
 1985년 캘리포니아 주립대학교
 전기공학과 박사 졸업.
 2009년 서울대학교 전기공학부 교수
 <주관심분야 : 비선형 시스템 제어 및 해석>