침식연소를 고려한 고체로켓의 비정상 내탄도 해석 기법

조민경* · 허준영* · 성홍계 **

Unsteady Internal Ballistic Analysis for Solid Rocket Motors with Erosive Burning

Mingyung Cho* · Junyoung Heo* · Hong-Gye Sung**

ABSTRACT

A typical unsteady internal ballistic analysis model was proposed to take account of the erosive burning with the variance of local velocity and pressure along the grain surface of a solid rocket combustor. To validate the model of concern in the study, both cases of non-erosive and erosive burning were compared with the previous researches with marginal accuracy. It was quantitatively investigated that the combustion pressure, grain length, initial temperature, and vaporization temperature of propellant affect the erosive burning characteristics.

초 록

본 연구에서는 연소실의 축방향 압력과 속도변화를 고려한 비정상 내탄도 해석모델을 제안하고 이를 바탕으로 침식연소에 미치는 인자를 해석하였다. 개발 모델의 검증을 위하여 침식연소가 없는 경우와 침식연소가 있는 경우에 대하여 선행연구 결과와 비교하였으며 해석결과가 일치함을 확인하였다. 연소실 압력, 그레인 길이, 그레인 초기온도, 추진제 기화온도가 침식연소에 미치는 영향을 조사하였다.

Key Words: Unsteady internal ballisitcs (비정상 내탄도 해석), Solid rocket motor (고체 로켓 모터), Erosive burning (침식 연소), L&R model, Burning rate (연소속도)

Nomenclature

f(G)	$G^{0.8}\exp(-\beta \dot{r} \rho_p / G)$
A	Area (m^2)
C_F	Thrust coefficient
c_p	Specific heat ($kJ/kg \cdot K$)
D	Diameter (m)
F	Thrust (N)

† 2009년 1월 2일 접수 ~ 2009년 3월 11일 심사완료
* 학생회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과
** 종신회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부
연락저자, E-mail: hgsung@kau.ac.kr

G	Mass flux (kg/m^2s)
M	Mach number
$\dot{m}$	Mass flow rate (kg/s)
P	Static pressure (pascal)
Pr	Prandtl number
R	Gas constant ($kJ/kg \cdot K$)
$\dot{r}$	Burning Rate (mm/s)
T	Static temperature (K)
t	Time (sec)
v	Velocity (m/s)
V	Volume of gas (m^3)
s	Grain surface
x	Location along axis
λ	Nozzle correction factor

Greek symbols

α	Erosive burning constant
β	Erosive burning constant
γ	Specific heat ratio
ρ	Density (kg/m^3)
η	Motor coefficient
μ	viscous coefficient (N/m^2)

Subscripts

b	Burning
c	Chamber
e	Exit
f	Flame
g	Gas
L	Grain length or exit
p	Proprllant or gain port
t	Nozzle throat
m	Motor

1. 서 론

고체로켓의 내탄도 해석은 연소실 내 압력 변화에 대한 연소 해석과 노즐에서의 유동해석으로 구분할 수 있다. 연소실 내 압력 변화에 대한 연소 해석은 연소실 전 구간에 걸친 질량, 모멘텀, 에너지 보존방정식과 실험을 통해 얻어지는 연소속도를 보정하여 해석한다.

연소 속도 측정에 주로 사용되는 스트렌드 버너에서는 연소속도를 압력에 대한 함수로 나타낸다. 그러나 연소가스의 유동속도가 특정 속도 이상이 되면 추진제 연소 속도는 압력 뿐 만이 아니라 유동속도의 영향을 받으며 이러한 현상을 침식연소(erosive burning)라고 한다.[1] 침식연소는 추진제의 조성(산화제 입자의 크기, 결합재의 종류)과 연소 시 연소실 환경(연소가스의 압축성)에 따라 그 영향이 다르게 나타난다. 연소가 진행되는 과정에서 연소실 축 방향 유동속도가 증가하거나 연소실 압력이 증가하면 침식연소가 증가하며 이와는 반대로 연소실의 온도가 높을수록 침식연소는 줄어든다[2].

본 연구에서는 연소실 축방향의 압력변화와 연소실 내 유동을 해석하였으며 이를 바탕으로 침식 연소로 인한 연소속도의 변화를 예측하여 고체 로켓의 내탄도 해석을 수행하였다. 선행연구 결과와 비교하여 해석 기법을 검증하였으며 또한 침식연소에 영향을 주는 요소들(연소실 압력, 그레인 길이, 그레인 온도 등)에 관한 영향을 조사 하였다.

2. 비정상 해석 모델

2.1. 지배 방정식

Figure 1과 같이 연소실에 미소체적을 설정하고 모터 전반에 걸쳐 연속, 운동량, 에너지 방정식을 적용한다[3].

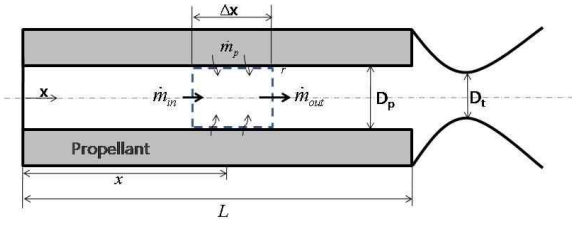

Fig. 1 Schematic of a solid rocket motor

미소체적에서 시간에 따른 압력변화율은 연소방정식과 이상 기체 상태방정식을 이용하여 Eq.(1)과 같이 표현가능하다.

$$\frac{dP}{dt}=\frac{RT_c}{V}\left(\dot{m}_{in,x}+\dot{m}_p-\dot{m}_{out,x}-\dot{m}_{b,x}\right) \quad (1)$$

미소체적으로 들어오는 질량유량은 연소실 축방향을 통해 들어오는 질량유량과 추진제 표면에서 연소되어 공급되는 질량유량으로 구성된다. 추진제 표면에서 공급되는 유량은 연소속도와 관련 있으며 원형 포트일 경우 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\dot{m}_p=\rho_p\dot{r}\pi D_p\Delta x \quad (2)$$

연소과정에서 그레인의 확공이 일어나므로 시간에 따라 미소체적의 부피가 증가된다. 이러한 체적의 증가는 미소체적 내 질량손실로 가정할 수 있다.

$$\dot{m}_{b,x}=\rho_g\dot{r}\pi D_p\Delta x \quad (3)$$

Equation (2)와 (3)은 그레인의 형상과 연소속도에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 여기서 침식연소를 고려할 경우 연소속도는 압력과 그레인 축방향 유동속도에 대한 함수로 표현된다. 본 연구에서 적용한 연소속도 모델에 대한 내용은 2.2절에서 언급하였다.

Chocking시 노즐에서 빠져나가는 질량유량은 한정되므로 연소실에서 생성된 연소가스의 질량유량과 노즐 목을 통해 빠져나가는 질량유량 사이에 차이가 발생될 수 있으며, 이러한 차이 때문에 연소실 내부에 질량유량이 증감되거나 일정하게 된다. 연소실에서 생성되는 유량과 노즐을 통하여 빠져나가는 유량의 차이가 연소실에서 일정하게 분포한다고 가정하면, 연소실 전체에서 생성되는 질량유량과 choking시 연소실 끝단에서 빠져나가는 질량유량의 비를 이용하여 연소실 미소체적에서 빠져나가는 질량 유량을 Eq. (4)와 같이 구할 수 있다.

$$\dot{m}_{out,x}=\frac{\dot{m}^*}{\dot{m}_{out,L}}\dot{m}_{out,x,ideal} \quad (4)$$

연소실로 공급되는 연소가스의 질량유량은 그레인 확공을 고려하여 Eq. (5)와 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}\dot{m}_{out,L}&=\sum\left(\dot{m}_p-\dot{m}_{b,x}\right)\\&=\sum(\rho_p-\rho_g)\pi D_p\dot{r}\Delta x\end{aligned} \quad (5)$$

준 정상상태에서 미소체적을 출입하는 질량유량은 Eq. (6)으로 나타낼 수 있으며 choking이 일어난 경우 노즐 목을 통과하는 질량유량은 Eq. (7)과 같다.

$$\dot{m}_{out,x,ideal}=\dot{m}_{in,x}+\dot{m}_{p,x}-\dot{m}_{b,x} \quad (6)$$

$$\dot{m}^*=A_tP_c\sqrt{\frac{\gamma}{RT_c}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (7)$$

노즐에서 연소가스를 이상기체이고 연소 가스의 유동을 단열 상태 유동이라고 가정하면 노즐 출구와 노즐목의 면적비는 다음과 같이 비열비와 노즐 출구 마하수로 나타 낼 수 있다.

$$\frac{A_e}{A_t}=\sqrt{\frac{1}{M_e}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (8)$$

고체로켓 모터의 운동량 방정식은 모터 효율계수 η_m와 추력계수를 도입하여 단순화 할 수 있다.

$$F=\eta_mC_FP_cA_t \quad (9)$$

$$C_F=\lambda\sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[1-\left(\frac{P_e}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}+\frac{P_e-P_a}{P_c}\frac{A_e}{A_t} \quad (10)$$

2.2 침식연소 (erosive burning) 모델

침식연소는 추진제의 성분, 연소 환경, 모터의 크기, 그레인의 형상에 따라서 그 영향이 다르게 나타난다. 이러한 침식연소 모델은 1956년 Lenoir, J. M.과 Robillard, G.가 처음으로 연료 표면으로 전달되는 열전달에 기초로 모델을 소개하였으며 이 모델을 기반으로 여러 모델들이 제시되었다[4].

L&R 모델은 직경을 특성길이로 표현하였는데 직경이 큰 실기형(full scale)의 모터에서는 침식연소가 과도하게 예측되는 것으로 관찰되었다[5]. 이를 보완하여 Lawrenece, Matthews와 Deverall은 모터의 길이를 특성길이로 하는 것이 모터의 직경의 경우 보다 더 정확한 결과를 도출한다는 사실을 제시하였다[.2] 따라서 본 연구에서는 L&R 변형식을 사용하였으며 Eq. (11)과 같다.

$$\dot{r}_x = \dot{r}_{0_x} + \dot{r}_{e_x} = aP_x^n + \alpha G_x^{0.8} D_x^{-0.2} \exp(-\beta \dot{r}_x \rho_{p_x} / G_x) \quad (11)$$

위 모델은 스트렌드 버너의 연소속도 모델 식에 침식연소로 인해 변화하는 연소속도 항을 추가한 형태로 연소가스의 유동속도와 추진제의 물성치가 모두 고려된 식이기 때문에 고체로켓 연소 해석에 광범위하게 이용이 가능하다. 침식연소에 영향을 미치는 연소실 압력, 온도, 그레인 형상 등의 인자들을 변화시켜 해석 결과를 비교해 봄으로써 각 인자들이 침식연소에 영향을 끼치는 정도를 수치적으로 비교 분석 할 수 있다.

Equation (11)에서 β는 추진제 성분에 따라 독립적인 값을 가지며 α는 열전달 정도에 따라 정해지는 상수로 Eq. (12)와 같이 표현된다[6].

$$\alpha = \frac{0.0028 c_{p,g} \mu^{0.2} \mathrm{Pr}^{-2/3}}{\rho_p c_{p,p}} \frac{T_f - T_s}{T_c - T_p} \quad (12)$$

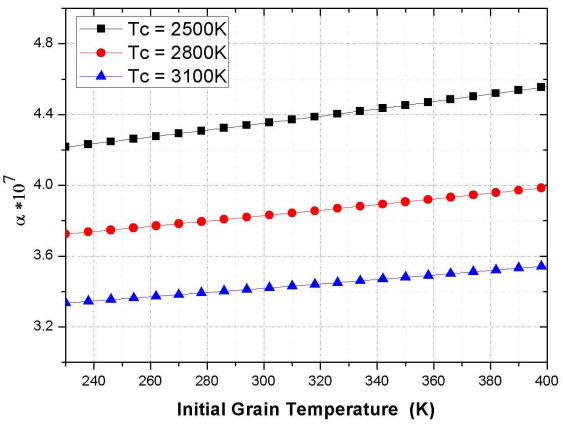

Fig. 2 Effect of initial temperature on α

α는 추진제의 물성치와 연소실 온도의 함수이다. 여기서 α는 연소 과정 중 연소실과 추진제 표면의 온도 변화에 따라 변한다고 볼 수 있다. 이러한 온도에 따른 α값의 변화를 살펴보기 위해 연소실 온도와 그레인 초기 온도에 따른 α값의 변화를 Fig. 2에 나타내었다.

α는 연소실 온도가 높을수록 감소하며 추진제의 초기 온도가 높을수록 증가하는 것을 알 수 있다. 그러나 추진제의 초기 온도는 특수한 경우를 제외하고는 300K내외이므로 그레인 온도로 인한 α값의 변화는 아주 작다고 볼 수 있다. 그리고 α값 자체가 상당히 작은 값이기 때문에 온도로 인한 침식연소의 변화량은 작을 것으로 예상된다.

2.3. 해석 기법

Figure 3은 본 연구의 내탄도 해석 알고리즘이다. 해석은 크게 연소 해석, blow-out 해석, 노즐 유동해석으로 구성된다. 압력 변화율(Eq. (1))을 Runge-Kutta 4th order method를 이용하여 수치 해석하여 최종적으로 연소실 압력변화를 결정한다. blow-out과정 에서는 연소실로의 질량공급이 없으므로 $\dot{m}_{p,x} = 0$으로 설정하고 연소실 압력 변화를 구한다. 노즐이 초킹되는 시점까지 계산을 수행한다.

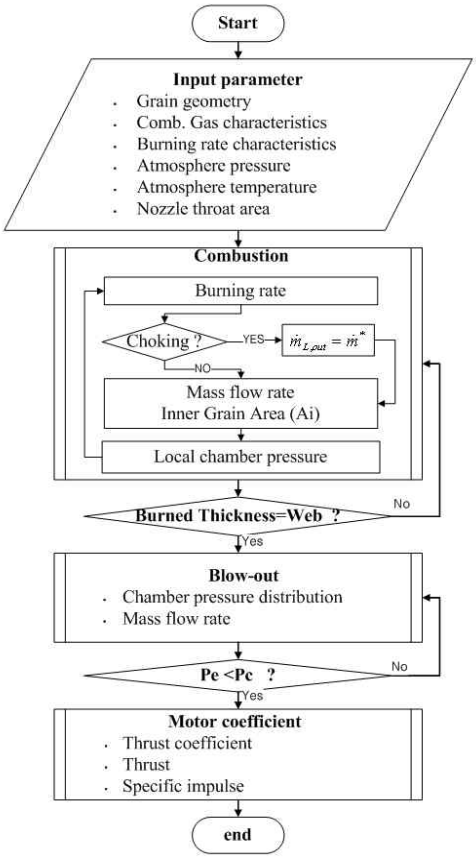

Fig. 3 Performance prediction algorism of solid rocket

3. 해석 모델 검증

3.1 침식연소를 고려하지 않은 해석 모델 검증

Table 1. Motor characteristics for case I [7]

Input parameter	Value
Max. reference pressure (kPa)	10342
Grain	
Outer diameter (mm)	200
Inner diameter (mm)	100
Length (mm)	1000
Comb. gas and burning rate characteristics	
Chamber gas temperature (K)	2773
Burning rate constant	0.0274
Burning rate exponent	0.33
Specific heat ratio (γ)	1.1971
Propellant density (kg/m^3)	1700
Average mol. weight (kg/kg-mole)	24.6

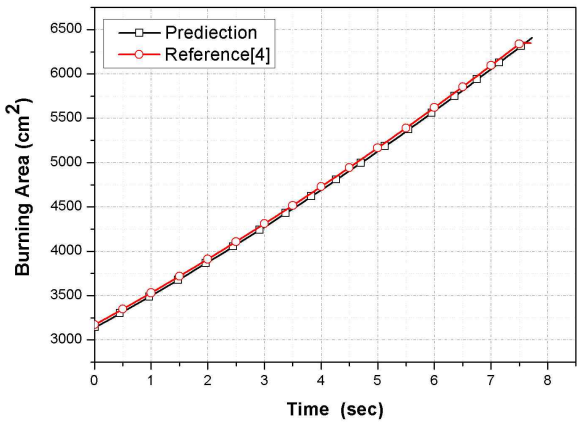

Fig. 4 Comparison of predicted and reference burning area

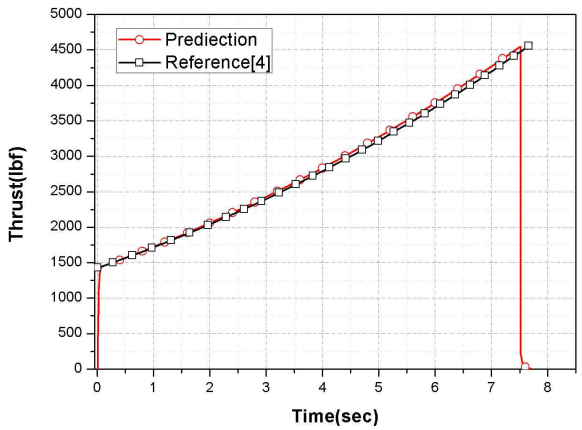

Fig. 5 Comparison of predicted and reference thrust

해석모델의 검증을 위해 선행연구 조건(Table 1)에서 본 연구의 해석 결과를 비교하였다. 해석 결과 서로 매우 유사함을 알 수 있다. (Fig. 4, 5)

3.2 침식연소를 고려한 모델 검증

침식연소를 고려한 연소속도 모델은 일반적인 연소속도 식보다 복잡하고 연료 물성치에 관해 더 많은 자료를 요구한다. 이러한 요구조건을 충족시키면서 해석 기법을 검증하기위해 참고논문 [8]에 주어진 추진제의 물성치와 그레인의 형상을 이용하였다(Table 2). 해석 결과 연소속도는 연소실 축방향을 따라 미소하게 증가하며 실험결과와 유사함을 알 수 있다(Fig. 6).

Table 2. Motor characteristics for case II [8]

Input parameter	Value
Initial reference pressure (kPa)	2757.90
Grain	
Outer diameter (mm)	63.0
Inner diameter (mm)	25.4
Length (mm)	708
Comb. gas and burning rate characteristics	
Propellant flame temperature (K)	3056
Propellant surface temperature (K)	1128
Burning rate constant	0.0492
Burning rate exponent	0.36
Specific heat ratio (γ)	1.21
Propellant specific heat (J/kg-K)	1508
Propellant density (kg/m^3)	1742
Gas specific heat (J/kg-K)	1845
Gas absolute viscosity (kg/m-s)	8.19×10^{-5}
Gas Prandtl number	0.82
Specific gas constant (J/kg-K)	318
Nozzle	
Nozzle throat diameter (mm)	23.5

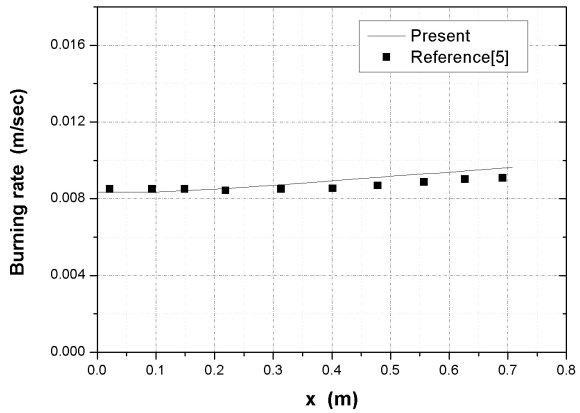

Fig. 6 Comparison of predicted and reference burning rate of propellant

4. 해 석 결 과

침식연소를 고려한 해석기법을 적용하여 Table 2에 주어진 로켓 모터의 형상과 추진제의 물성치를 바탕으로 연소 과정을 해석하였다.

Figure 7은 침식연소를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 연소실 압력의 변화를 나타낸다.

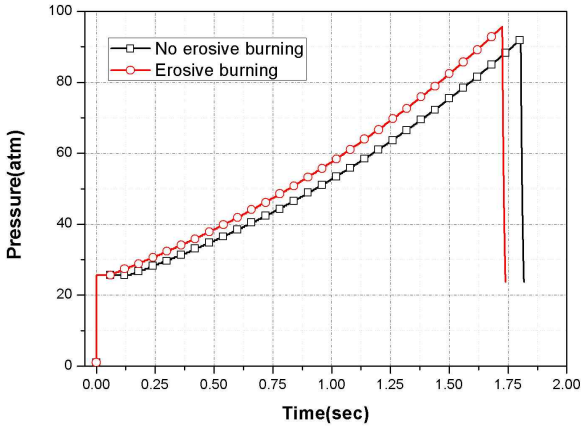

Fig. 7 Chamber pressure history

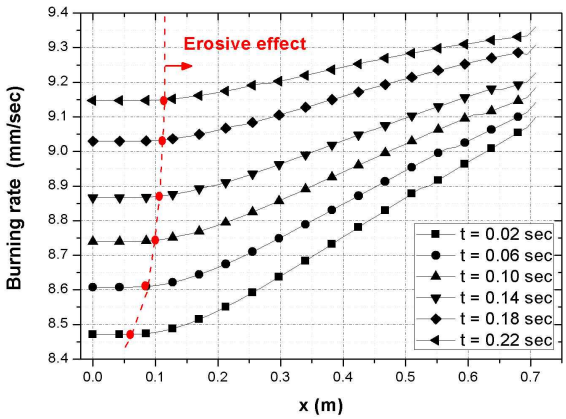

Fig. 8 Burning rate along the grain

침식연소를 고려한 경우가 더 높은 연소실 압력을 나타내는데 이는 국부 압력은 차이가 작아도 이것이 누적되어 연소실을 대표하는 연소실 압력은 눈에 띄게 높아짐을 의미한다.

Figure 8은 연소 초기 침식연소로 인해 그레인 축방향으로 연소속도가 증가하는 것을 나타낸다. 연소 시간 0.02초에서는 침식연소로 인해 연소속도가 최대 약 7.73%증가하지만 연소 시간 0.22초 후 연소속도는 최대 1.63%증가로 연소 초기의 증가량보다 작은 증가량을 보였다. 총 연소시간이 1.75초인 것을 고려할 때 침식연소로 인한 연소속도 증가는 연소 초기에 집중됨을 알 수 있다. 또한 점선 이후의 영역에서 연소속도가 크게 변하는 것으로 볼 수 있다. 이는 다음에 부연하는 바와 같이 연소기체의 질량유량이 일정 값 이상일 때 침식연소가 일어나는 것을 의미한다.

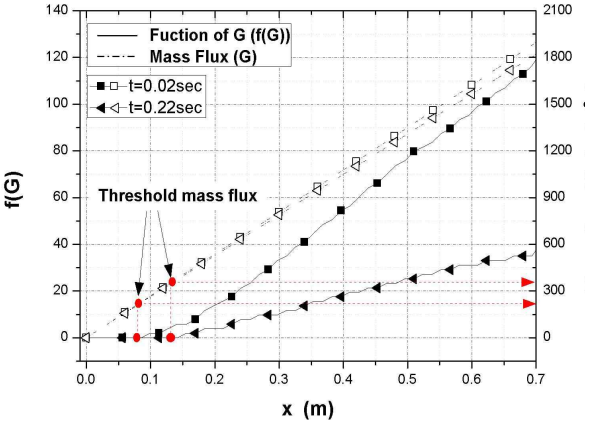

Fig. 9 Effect of mass flux on erosive burning

침식연소속도는 연소실 축방향 질량플럭스(G)와 직경에 대한 함수로 나타난다(Eq. (11)). 침식연소속도식 중 질량유량과 관련된 항의 연소실 축방향에 따른 변화는 Fig. 9와 같다. 연소실 축방향으로 연소가스의 질량플럭스는 선형적으로 증가하며 질량유량에 따른 침식연소 효과(f(G))는 일정량 이상의 질량 유량이 되어야 침식연소가 발생함을 보여준다. 따라서 질량 유량함수가 침식연소의 발생 여부를 판단하는 중요 요소임을 알 수 있다.

본 연구에서 사용한 L&R변형식의 경우 그레인 직경이 증가함에 따라 침식연소효과는 감소한다. 이러한 경향은 Fig. 9에서 연소 시간이 경과함에 따른 그레인의 직경 증가로 인해 침식연소를 일으키는 한계질량유량 값이 증가하는 것으로 확인할 수 있다. 또한 이 결과는 선행 연구[5]의 결과와도 동일하다.

작동압력, 연소실 온도, 그레인 길이의 변화가 침식연소에 미치는 영향을 살펴보면 다음과 같다.

4.1. 압력의 영향

고체추진제의 연소속도는 연소실의 압력에 대한 함수이므로 연소실의 작동 평균 압력이 달라지면 연소 시간에 따른 각 지점에서의 연소실 압력변화도 다르게 나타나게 된다. 연소실 작동압력이 침식연소에 미치는 영향을 조사하기 위하여 연소실 압력이 80atm, 100atm, 120atm 일

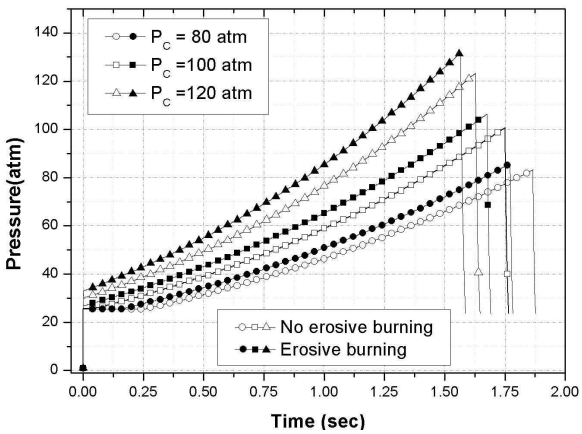

Fig. 10 Effects of average chamber pressure on erosive burning

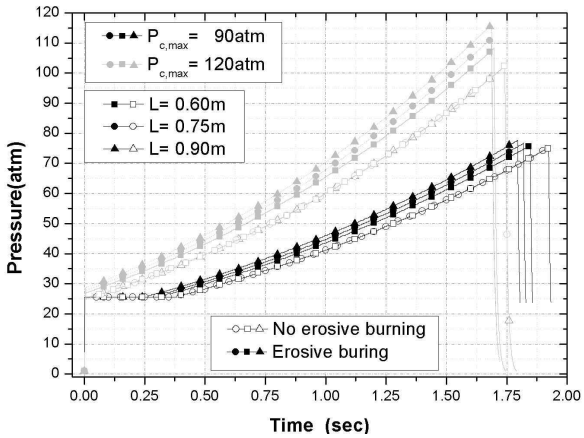

Fig. 11 Effect of port length on chamber pressure

때 침식연소 해석을 수행하였다.

Figure 10 에서 연소실 압력의 증가에 따라 연소시간에 따른 연소실 압력변화 폭도 증가하는 것을 볼 수 있다. 또한 연소실 작동압력이 커짐에 따라 침식연소를 고려한 해석결과와 침식연소를 고려하지 않은 해석결과의 차이도 증가하는 것을 알 수 있다. 즉 연소실 작동압력의 증가는 침식연소를 증가시키는 것을 알 수 있다.

4.2 그레인 길이의 영향

Table 2.에 주어진 값을 기초로 그레인 길이를 약±20%의 변화를 주었다. 해석 결과 그레인 길이가 길어질수록 침식연소는 크게 나타났다(Fig. 11). 이는 그레인 길이가 길어지면서 연소실 축방향으로 유속이 빨라지며 침식연소를 촉진시키

기 때문이다. 또한 낮은 작동 압력에서는 그 영향이 작게 나타나지만 높은 작동 압력에서는 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

4.3 온도의 영향

추진제 그레인 초기온도와 연소 시 그레인 표면의 온도가 침식연소에 미치는 영향을 조사하였다.

추진제 초기온도는 침식연소에도 영향을 주지만 일반적인 연소속도에도 영향을 준다. 따라서 일반 연소속도에 온도 민감도(Eq. (13))를 고려하여야 온도변화가 침식연소에 끼치는 영향을 정확하게 알 수 있다.

$$\dot{r} = aP^n e^{\pi_K \Delta T} \tag{13}$$

압력에 따른 온도 민감도 π_K는 일반적으로 0.067~ 0.278%/℃ 범위의 값을 사용한다[6]. 본 연구에서는 참고논문[8]에 언급된 연소속도에 따른 온도 민감도 σ_P값과 압력에 따른 온도 민감도 π_K의 관계식(Eq. (14)) 를 이용하여 도출한 값인 0.23%/℃을 사용하였다.

$$\pi_K = \frac{1}{1-n}\sigma_P \tag{14}$$

여기서, n은 추진제의 연소속도 상수를 의미한다.

Figure 12에서 그레인의 초기온도가 높을수록 연소시간이 짧아지고 침식연소의 영향이 커지는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과는 연소 진행 0.005초 와 1초에서 축방향 연소가스의 속도가 그레인의 초기 온도가 높을수록 유동속도가 빨라져 침식연소 효과를 증대시키기 때문이다 (Fig. 13). 따라서 그레인의 초기온도가 높을수록 후퇴율이 커지면서 축방향의 유동속도는 커지므로 침식효과를 증가시켜 연소시간이 짧아짐을 알 수 있다.

추진제 표면온도가 연소속도에 끼치는 영향을 좀 더 정확히 분석하기위해 Fig. 14에서 침식연소를 고려한 연소실 압력변화와 침식연소를 고

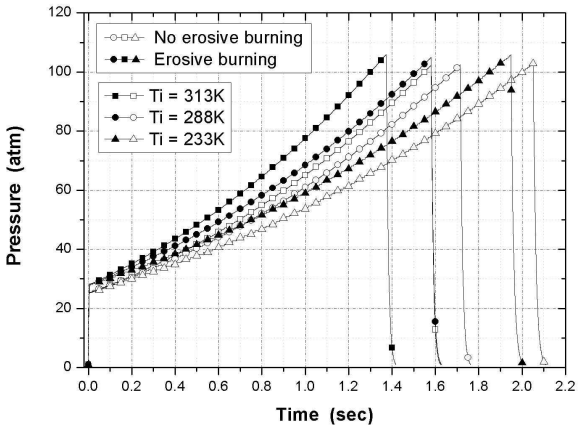

Fig. 12 Effect of initial propellant temperature on chamber pressure

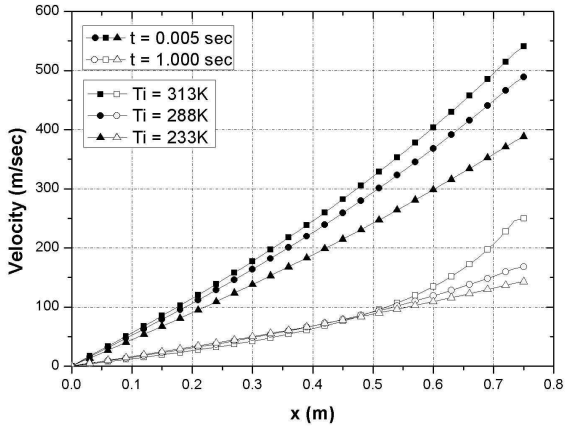

Fig. 13 Effect of initial propellant temperature on cross flow velocity

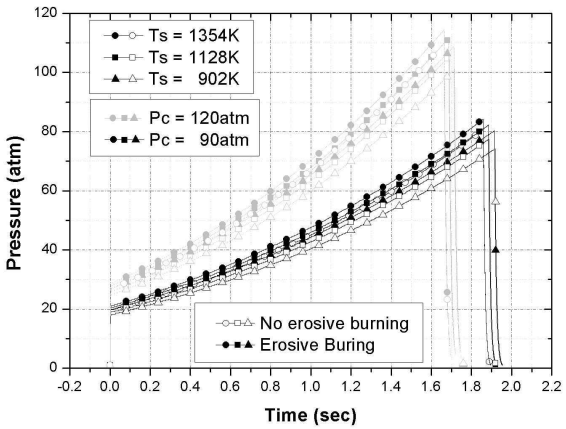

Fig. 14 Effect of propellant surface temperature on chamber pressure

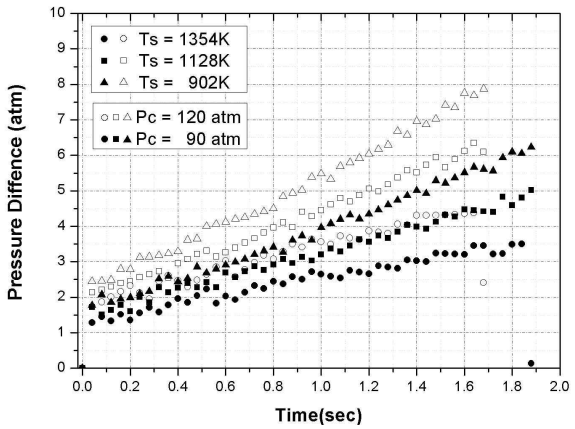

Fig. 15 Effect of propellant surface temperature on chamber pressure

려하지 않은 연소실 압력변화의 차를 구해 비교하였다(Fig. 15). 비교 결과 연소 시 그레인의 표면온도가 낮을수록 침식연소에 의한 영향이 컸으며 연소실 최대 압력이 높을수록 침식연소의 영향이 큰 것으로 나타났다.

5. 결 론

고체로켓의 비정상 해석 모델을 고려한 내탄도 해석 프로그램을 개발하여 침식연소에 영향을 주는 인자들을 조사하였다. 본 연구에서 제안한 해석 모델은 선행 연구 결과와 비교·검증 하였다. 동일 조건에서 침식연소 비정상 모델과 정상 모델을 비교하여 침식연소가 연소 속도에 미치는 영향을 분석하였다. 침식연소로 인해 연소실의 압력이 더 급격히 변하며 연소시간이 단축되는 것을 알 수 있었다.

연소실 압력, 그레인 길이, 그레인 초기 온도와 추진제 기화온도가 침식연소에 미치는 영향을 살펴보았다. 연소실의 작동압력이 높아질수록, 그레인의 길이가 길어질수록 침식연소의 영향이 크게 나타난다. 또한 그레인의 초기온도가 높을수록, 추진제의 기화 온도가 낮을수록 침식연소 영향이 크게 나타났으며, 동일 온도 조건이더라도 연소실 압력이 높으면 침식연소의 영향이 더 크게 나타났다. 본 연구 대상의 추진제는 연소실 압력 변화가 침식연소에 가장 중요한 요소임을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. K. Srinivasan, S. Narayanan, O. P. Sharma, "Numerical studies on erosive burning in cylindrical solid propellant grain", Springer -Verlag , Heat Mass Transfer 44:579-585, 2008
2. James Moss, Dr, Stephen Heister, Kevin Linke, "Experimental Program to Assess Erosive Burning in Segmented Solid Rocket Motors", 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2007
3. 윤창진; 송나영; 유우준; 전창수; 김진곤; 문희장; 성홍계 “PE-GOX 하이브리드 모터의 연소특성 및 성능 예측 기법 Part Ⅱ” 한국추진공학회지, 제11권, 제2호, 2007, pp.79-85
4. J. P. Renie, J. R. Osborn, "Erosive Burning", AIAA Journal, Vol. 21. No. 12. 1983
5. Beddini, R. A., "Effect of Port Flow on Solid Propellant Erosive burning", AIAA Paper 78-977
6. Sutton, G. P., "Rocket Propulsion Elements, 7th ed.", John Wiley & Sons Inc., 2001
7. Hong-Gye Sung, "Lecture Note : Adavnced Rocket Propulsion" , Korea Aerospace University, The first term 2008
8. D. R. Greatrix, J. J. Gottlieb, "Erosive Burning Model for Composite-Propellant Rocket Motors with Large Length-to-Diameter Ratio", Canadian Aeronautics and Space Journal Vol. 33. No. 3, 1987