한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 4, 433-452, December 2009

숙련된 교사의 문장제 문제해결 지도 전략 - 미국 교사들을 중심으로[1)]

이광호[2)] · 신현성[3)]

본 연구는 미국의 숙련된 수학 교사들의 문장제 문제 해결 지도 전략에 대한 연구이며 그것들이 학생들의 문장제 문제 해결에 어떤 영향을 끼치는지에 대한 연구이기도 하다. 관찰된 미국 교사들은 문장제 문제 해결 지도과정에 있어 공통적으로 문제의 배경에 대한 설명을 자세히 함으로써 학생들의 수학 문제해결에 대한 동기를 유발하는 공통점을 지녔고, 학생들이 문제 자체에 대해 분명히 이해할 수 있도록 만들었으며 더 나아가 학생들 자신이 다양한 해결 전략을 이용하여 문제 해결을 것이 가능케 하였다. 또한, 교사와 학생들 그리고 학생과 학생의 '의사소통'을 강조하여 언제든 자신의 수학적 아이디어를 제시할 수 있는 자유스러운 분위기를 제공하였다. '의사소통'은 교사와 학생 그리고 학생들이 문제 풀이 자체에만 얽매이지 않고 배경지식을 활용하여 문제를 이해하는 과정을 가능케 하였고, 끊임없는 질문과 의문을 통해 문제 해결 전략을 세우고 그 문제를 해결하고 다시 정리하고 반성하는 전반에 걸친 원동력이 되어주었다. 또한 이 연구는 Polya의 문제해결 전략 4단계를 보완하는 모델을 제공하였다.

주요용어 : 문장제, 문제해결 지도 전략, 숙련교사, 의사소통

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

현재의 수학교육은 수학의 기초적인 개념과 원리를 이해하여 이를 바탕으로 자유롭고 창의적인 사고를 함으로써 일상생활에 관련된 다양한 문제를 합리적으로 해결하는데 중점을 두고 있다. 그러므로 단순한 지식의 전달에서 탈피하여 문제에 직면했을 때 합리적으로 대처할 수 있는 능력을 갖도록 지도하여야 한다.

하지만 지금까지의 우리나라 수학교육은 입시 위주의 교육으로 진행되어 왔다. 교사는 학생들에게 문제를 척척 풀어주기만 하면 되고, 문제를 접하게 되는 학생들은 하나의 공식을

---

1) 본 논문은 2008학년도 목포대학교 학술 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 한국교원대학교 (paransol@knue.ac.kr)
3) 강원대학교 (hsshin@kangwon.ac.kr)

떠올려 그 공식에 대입하여 답을 구한다. 공식에 맞지 않는 문제이거나 문제에 맞는 공식을 떠올릴 수 없으면 학생들은 문제해결을 포기하고 마는 것이 현실이다.

문제 해결은 수학의 보편적인 영역의 하나로 인식되어 왔으며 문제해결력의 신장은 수학교육의 중요한 목적으로 여겨져 왔다. 문제해결에서 대부분의 문제는 문장제 문제의 형태로 나타내고, 문제 해결능력은 주로 그러한 문장제 문제의 풀이를 통해서 길러질 수 있다고 하였다(김영국 · 주익한, 1997). 하지만 문장제 문제해결은 학생들이 곤혹스러워할 뿐만 아니라 교사들 또한 가르치는데 있어 가장 어려워하는 분야이기도 하다 (지재근 · 오세열, 2000; Manes, 1996; Schoenberger & Liming, 2001; Kameenui & Griffin, 1989).

많은 연구자들(방승진 · 이상원 · 황동주, 2001; 이정은 · 김원경, 1999)이 문제해결에 대한 연구를 Polya(1985)의 문제해결 과정 4단계를 이용하여 연구해 왔다. Polya의 문제해결 과정 4단계가 학생들의 학업 성취 및 문제해결력의 신장에 도움이 되었다고 하였다. 하지만 이러한 많은 연구들에도 불구하고 학생들은 여전히 문장제 문제를 해결하는 것에 대해 어려워하고 문제를 읽기조차 꺼려한다. 문제해결에 있어서 수학적 사실 뿐만이 아니라 언어적 지식이 결여되어 있을 때 학생들은 문제에 대한 흥미가 없어지고 해결의지마저 저하된다. 문장제 문제에서는 수학적 사실에 대한 지식과 아울러 언어적 지식도 함께 필요하다(양순열, 1991). 기존의 연구들은 문제해결 지도에 있어서 수학적 사실에 대한 지식과 언어적 지식을 함께 강조하기 보다는 Polya의 문제해결 과정 4단계만을 강조하면서 학생들에게 4단계의 형식에 맞추어 문제를 해결할 것을 강조하여 연구를 하였다.

문장제 문제를 접하고 해결하는데 있어서 학업성적이 상위권인 학생들마저도 막연하고 두려운 마음을 가지고 있다(지재근 · 오세열, 2000).이러한 두려움은 문장제 문제해결의 실패 원인이 될 수 있다. 학생들의 문장제 문제 해결에서 가장 많은 실패를 보이는 원인은 문제를 읽고 이해를 하지 못하는 데 있다(Benko, et al., 1999; Jitendra, et al., 1998). 학습자들이 문장제 문제를 접하여 겪는 최초의 어려움 또한 문제를 정확히 이해하는 것이다. 올바른 문제해결 전략을 구사하기 전에 이러한 문제점이 해결되어야 할 것이다. 그렇지 않고서는 올바른 문제해결 전략을 구사하기조차 힘들 것이다. 따라서 올바른 문제 이해가 문장제 문제 해결에서 선행되어야 한다.

이 연구는 문장제 문제에 대해 바르게 이해하는 것이 문제해결 전략의 구사에 지대한 영향을 주는 것임을 감안하여 문제에 대한 올바른 이해를 하도록 하기 위해 미국의 숙련된 수학교사들은 어떻게 지도하는지에 대해 연구하였다.

우리나라의 중 · 고등학교의 수학교육에서 문장제 문제 해결의 지도는 학생들의 수학적인 사고와 유추, 창의적인 사고를 통하여 이루어지기 보다는 입시위주의 교육으로 인하여 교사중심의 주입식 교육이 이루어지고 있다. 이러한 교육방법의 개선을 위해 외국의 문장제 문제해결 지도 방법을 연구하여 모델을 제시하는 것은 큰 의의가 있다.

2. 연구문제

본 연구를 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1) 미국의 숙련된 수학교사들은 문장제 문제를 지도할 때 어떤 전략을 이용하는가?

2) 그러한 문장제 문제 지도가 학생들의 문제 해결에 어떤 영향을 미치는가?

II. 이론적 배경

1. 문제해결력과 문장제 문제

미국의 National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)은 Principles and Standards for School Mathematics에서 규준을 제시하면서 문제해결(problem solving)분야를 수학 지도의 한 영역으로 제시하여 문제해결의 중요성을 강조하고 있다. 우리나라 수학과 7차 교육과정 및 2007년 개정 교육과정에서도 역시 '실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결 할 수 있는 능력과 태도를 기른다.'라고 명시를 함으로써 문제해결력의 중요성을 수학교육의 목표로 제시하였다. 하지만 문제해결에서 간과하기 쉬운 하나의 중요한 부분은 상식이다. Saul (1997)은 국가 규준이 그러한 상식을 간과한 것을 우려하였다. Chappel과 Thompson(1999)은 문제해결력의 증진에 있어서 학생들이 자기 스스로 문장제 문제를 만들어 보도록 하는 것 또한 매우 중요하다고 역설하였다.

최근의 수학교육 과정은 문장제 문제가 더욱 많아지고 단순한 계산위주의 문제는 적어지는 경향을 보이고 있다. 이를 통하여 문장제 문제가 문제 해결에 있어서 갈수록 강조되고 있음을 알 수 있다(McIntosh, 1997). 문제해결 능력은 문장제 문제의 해결을 통해서 길러질 수 있다(Adamovic & Hedden, 1997). '문장제 문제'란 수를 포함한 문제 상황을 서술해 놓은 문장으로 구성된 수학문제를 말하는 것으로 영어로는 'Written problem, word problem, verbal problem' 등과 같이 다양하게 표현 된다(서화자・권명옥・김춘미, 2004). 문장제 문제는 읽기, 논리, 그리고 수학이라는 영역의 총합이다. 이러한 문장제 문제는 학생들이 가장 어려워하고 해결하기 싫어하는 문제이므로 신중한 접근을 통하여 학생들의 문장제 문제 해결에 대한 동기를 유발시키며 문제 해결에 있어 발생되는 오류를 최소화해야 한다. 특히 학습자들이 문제를 접할 때 가장 먼저 접하는 어려움은 문제에서 제시하는 의도와 조건을 정확히 이해하는 부분이다(지재근・오세열, 2000). 이러한 어려움을 극복 했을 때 바른 문제해결 전략을 구사할 수 있을 것이고, 올바른 해를 구할 수 있을 것이다. 따라서 문제를 바르게 이해하는 것이 문제해결 전략의 구사에 지대한 영향을 미친다고 할 때, 문장제 문제의 해결의 가장 중요한 관건은 문제를 올바르게 이해하는 것이다.

문장제 문제를 이용하여 가르치는 것은 학생으로부터 단순히 옳은 답을 얻는 것 이상을 의미한다. 학생들이 문제의 답을 얻기 위해 사용하는 방법이 중요시되고 강조되어야 한다. 문제해결에 사용될 수 있는 방법이나 전략은 다양하다. 과거의 지식과 경험들, 의사소통, 새로운 것을 경험하고자 하는 의지, 하나의 방향에서 보기 보다는 다양한 각도로 보려는 사고 등은 모두 문제해결의 부분이 된다. 탐험과 실험에 이러한 것들의 이용은 문제 해결능력을 높일 수 있다(Moore, 1999).

2. 문장제 문제 해결

문장제 문제를 해결하기위해서 무엇보다 우선이 되는 것이 문제의 이해일 것이다. 문제를 바르게 이해하고 문제 상황을 대수적 구조로 표현할 수 있을 때 문제를 더욱 잘 해결할 수 있다(Coy, 2001). 문제에서 주어진 정보를 자기 나름대로의 방법으로 해석하는 과정이 '문제 이해'이며, 학습자마다 그 접근하는 방식이 각각 특별한 방법으로 다를 수 있다. 학생들은

자신이 가지고 있는 지식과 문제에서 주어진 정보의 상호작용이 문제를 해결하는데 사용된 접근방법과 관련이 있음을 알고 나름대로의 해결 방법을 찾는다. 이 때 교사는 학생들이 자신의 지식과 문제에서 주어진 정보를 보다 쉽고 빠르게 관련지을 수 있도록 해주는 역할이 필요하다.

1) Polya의 문제 해결 과정

문장제 문제 해결을 위한 전략으로 Polya(1985)는 문제해결과정을 이해단계, 계획단계, 실행단계, 반성단계의 4 단계로 나누고 각 단계에 필요한 유효하고 적절한 발문 및 권고사항들을 제시하고 있다. 방승진・이상원・황동주(2001)는 Polya의 문제해결 전략을 통하여 학생들이 계획을 세워 차근차근하게 식을 세우는 습관을 길러주었을 때 학생들은 포기하지 않고 문제를 해결하려는 과제집착력이 향상 되었다고 하였다. 또한 교사의 적극적인 지도와 지도단계에서의 섬세한 발문과 권고가 있어 문제를 충분히 검토하고 이해 할 수 있는 학습지도가 도움이 된다고 하였다. 여기서 학생들은 Polya의 문제해결 과정 4단계를 그대로 답습 하였다기보다는 교사의 충분한 안내와 지속적인 지도가 있었음을 알 수 있다. 교사의 충분한 안내와 지속적인 지도에서는 특히 소집단 토의 학습에서 효과가 크게 나타났다. 그룹별 학습활동이 자유스럽도록 유도하며 상호 정보교환이 잘 이루어지도록 하여 학생들이 수학적 아이디어를 탐구하도록 하였다. 교사는 Polya의 문제해결 과정 4단계를 철저히 강조하면서 수업을 하였다. 정형화 된 문제 해결에 있어서 교사는 학생들이 Polya의 문제해결 과정 4단계를 좇게 하면서 문제 속에 나타난 내용만을 이해하도록 하고 그것을 이용하여 문제를 해결하도록 하고 있다. 여기서 Polya의 문제해결 과정 4단계는 문장제 문제 자체의 이해에 도움이 된다고 할 수 있지만 전체적인 문맥 파악과 다른 문제의 적용에 큰 영향을 미친다고 보기에는 어렵다. 학생은 문장제 문제 자체에서 지식을 획득할 수 있으며 그것은 유사한 상황의 문제 적용에 도움을 준다고 할 수 있다.

2) Travers의 문제해결 단계

지재근과 오세열(2000)은 Travers의 문제해결 전략 도입을 위한 12가지 단계를 설명하고 있다. 제1단계 적절한 기호를 선택하기(Select Appropriate Notation), 제2단계 그림, 표, 그래프 그리기(Make a Drawing, Figure, Graph), 제3단계, 원하는 주어진 필요한 정보를 확인하기(Identify Wanted, Given and Needed Information), 제4단계, 문제를 다시 진술해 보기(Restate Problem), 제5단계, 수학적인 식으로 나타내기(Write an open sentence), 제6단계, 전시학습을 상기하기(Draw from a Cognitive Background), 제7단계, 표를 만들기(Construct a Table), 제8단계, 추측하고 확인하기(Guess and Check), 제9단계, 조직화하기(Systematize), 제10단계, 보다 간단한 문제로 만들기(Make a Simpler Problem), 제11단계, 물리적인 모델을 만들기(Construct a Physical Model), 제12단계, 거꾸로 풀어보기(Work Backwards)로 제시하고 있다. 이러한 전략은 학생들이 문제 자체만을 이해하여 해결하는데 도움이 되지만 전체적인 개념적 이해 (Overarching conception)를 통하여 문제를 해결하는데는 역시 조금 미흡하다. 그리하여 학생들은 지엽적으로 해당된 문제에만 초점을 두어 다른 문제의 응용에는 많은 도움을 주지 못한다.

3) 문제해결 오류 및 지도

김영국과 주익한(1997)은 문제해결의 오류 요인을 제시하고 있다. 오류 요인으로는 학생들

이 문제를 철저히 분석하지 않으며, 찾고 싶은 해답만을 찾으려 하고, 문제 해결 방법에 대하여 한 가지 방법에 얽매이며, 쉽게 떠오르는 정보에 의존하는 것이라고 하였다. 김옥경(1990)은 고등학교 수학에서 발생하는 오류에 대해 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 곡해된 정리나 정의, 요구되지 않은 해답, 기술적 오류, 문제 풀이 과정의 생략 등을 제시하고 있다. 또한 오세경(1995)의 오류 유형으로 수학과목 자체에 대한 두려움, 새로운 용어를 정의하는 어려움, 기호 사용 미숙, 문제 이해보다는 암기하려는 성향으로 인한 응용력의 저하, 집중력 부족 및 논리적 사고력 저하 등을 제시하고 있다. 대체적으로 문제 해결의 주요 요인은 문제 이해의 어려움이 공통점으로 발견 되었다. 많은 교사들이 Polya의 문제해결전략 4단계를 알고 있으며 그것을 적용하여 문제이해에 많은 도움을 주고 있음에도 불구하고 여전히 학생들은 문제해결에 대한 두려움과 어려움을 말한다.

문장제 문제를 잘 해결하기 위해서는 문장제 문제가 제시되면 주어진 문제와 문제 영역에 관하여 현재 문제와 관련이 있을 수도 있는 또는 과거에 본 적이 있을 수 있는 저장된 문제를 인출하려고 해야 하며(Rattermann, 1997), 주어진 문제와 관련이 깊은 다양한 지식들을 수집해야 한다. 그와는 반대로 많은 학생들은 문장제 문제에서 내용과 구조 사이의 관계를 이해하려고 하지 않고 문제를 해결하는데 구문론적인 실마리나 키워드를 사용하여 문제 내용을 식으로 변형하려고 한다(Bassok, 1997).

이종희(2003)는 문장제 문제해결에 있어서 현재 제시되고 있는 문제와 유사한 문제들을 기억해 내어 적용하는 유추의 방법을 제시하고 있다. 하지만 유추는 다양한 문제를 많이 해결해 보아야 한다는 전제를 내포하고 있다. 이러한 유추가 항상 학생들이 전혀 접하지 못한 새로운 문제를 해결하는데 도움이 된다고 할 수 없다. Higgins(1997)는 문제해결의 지도 방안으로 첫째, 다양한 문제를 통해 많은 경험과 기회를 부여하고, 둘째, 충분한 동기유발을 주고, 셋째, 문제해결 접근방법을 제공하여야 한다고 주장하였다. 여기서 문제해결 접근방법의 제공은 문제해결을 도와주는 안내자의 역할을 한다. Higgins역시 다양한 문제의 해결을 전제로 하고 있으며 많은 경험이 문제해결력을 길러 준다는 가정을 하고 있는 것이다. 하지만 이러한 문제해결 방법은 전혀 다른 새로운 문제의 해결에 있어서 도움이 되지 못한다.

문제해결은 수학교육에 있어서 최근 가장 강조되는 분야이며 특히 문장제 문제의 해결은 문제 해결의 핵심이라고 할 수 있다. 하지만 문장제 문제 해결에 있어서 학생들이 겪는 어려움은 교사들이 생각하는 것 이상이다. 숙련된 교사들은 위에서 제시되는 해결 방법과 지도법 외에 또 다른 Know how를 지니고 있다고 볼 때 그것을 찾아내는 것은 상당한 의의가 있다고 하겠다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 내용

본 연구는 숙련된 중학교 수학 교사들(특히 미국의 북서부 지역)이 학생들의 문장제 문제해결을 지도함에 있어서 어떠한 전략을 사용하는지 알아보고, 그러한 전략들을 이용한 학습이 학생들의 문장제 문제 해결에 어떠한 영향을 미치는지 조사함으로써 문장제 문제 해결 지도에 대한 모델을 제공한다.

학생들이 문장제 문제해결을 보다 실패 없이 유창하게 할 수 있으려면 무엇보다 높고 유

연한 수학적 사고력을 기르는 것을 우선으로 해야 한다. 이를 위해서는 아동들이 이해하고 생각하는 것을 보다 잘 구조화 시켜 보다 높은 수준의 사고에 이를 수 있도록 도와야 한다. 그것은 아동들의 적극적인 표현과 교사의 열린 태도 및 학습 환경에서의 자유롭고 적극적인 발문을 할 수 있는 분위기가 뒷받침 되어야 가능할 것이다. 이에 숙련된 교사들이 학생들의 문장제 문제를 해결하는데 실패 없이 유창하고 유연한 수학적 사고력을 기르도록 하기 위해 어떠한 전략을 사용하는지 그들의 수업내용과 인터뷰를 통하여 알아보았다. 학생들이 가장 어려워하고 가장 많은 실수를 범하는 문장제 문제의 이해를 돕기 위해 어떠한 전략을 이용하는지에 중점을 두고 두 숙련된 교사의 공통점을 찾기 위해 그들의 수업과 인터뷰를 모두 활자화 하여 분석하였다.

두 번째로, 교사들이 사용하는 전략은 학생들의 문제해결에 직·간접적으로 나타나기 때문에 학생들이 문장제 문제 해결하는데 있어서 교사들이 사용한 전략이 어떠한 도움을 주고 그들의 문장제 문제 해결에 어떻게 나타나는지를 알아보았다.

2. 연구 대상

본 연구를 위하여 미국 북서부에서 수학교육자, 수학자 그리고 학교장의 추천을 받아 17명의 연구대상 교사를 1차 선발하였다. 다시 17명 중 9명의 교사들이 6년 이상의 교육경력과 한 학년을 3년 이상 가르친 경험이라는 기준에 적합하여 2차 선발 되었다. 2차 선발된 9명의 교사들은 이메일을 통하여 다시 설문지에 응답하였고 이 응답에 대한 분석을 토대로 본 연구에 가장 적절하게 답을 한 4명의 교사들을 3차로 선발하였다. 4명의 교사들은 수업 전 인터뷰를 통해 그들의 문장제 문제 해결 지도 방법에 대하여 진술하였고, 그 뒤 수업 관찰을 통해 진술 내용과 지도 내용이 가장 잘 부합되는 2명의 교사(J, S)를 최종 선택하였다. 두 명의 교사가 가르치는 학급들 중 문장제 문제 해결에 학생들의 자유스러운 의견 교환이 있는 각각의 한 학급을 각 교사들의 추천을 통해 선정하여 그 반의 학생들을 관찰하였다. 교사와 학생의 이름은 교사J 와 교사S 그리고 학생1, 학생2 등의 알파벳과 숫자로 처리 하였다.

3. 연구 절차 및 방법

본 연구에서는 두 가지 연구 문제를 중심으로 숙련된 두 교사의 수업을 관찰하여 그들의 교수 전략을 분석하였다. 이 연구 문제를 해결하기 위한 방법으로 두 명의 숙련된 교사를 선발하는 과정과 두 교사의 수업을 관찰하고 그 관찰한 자료들을 분석하는 부분으로 연구 방법을 제시하였다. 수업 관찰은 교사의 문장제 문제 해결 지도 전략과 학생들의 문장제 문제 해결에 초점을 두고 시행하였다.

교사 선발을 위한 방법으로 연구자는 먼저 추천이 된 17명의 교사들에게 이메일을 통하여 설문을 하였고 그 중 9명의 교사들이 이메일로 답을 하였다. 9명의 교사들은 5년 이상의 교수 경험과 최소한 3년 이상 같은 학년을 가르친 경험을 가지고 있었다. 교사들의 설문지를 분석하여 그 중 설문에 가장 자세하게 반응을 하고, 이 연구에 가장 적합하다고 판단되는 4명의 교사들을 선발하였다. 4명의 교사들은 연구자와 시간 조정을 통하여 연구자가 인터뷰를 실시한 후 그들의 교실 수업을 관찰 하였다. 그 중 본 연구 목적에 가장 알맞은 두 교사

를 선발하였다.

선발된 두 교사(S, J)는 문장제 문제 해결 수업을 하였으며 연구자는 관찰을 통하여 그들이 사용하는 전략들을 분석하였다. 연구자는 그들의 수업을 녹화하고 녹화하는 동안 field note를 작성하였다. 교사와의 인터뷰는 수업 전과 후에 이루어졌다. 수업 전에는 수업의 의도에 대해 인터뷰를 하였으며 수업 후에는 수업에서의 어려움, 학생들의 어려움과 문제해결 지도에서의 어려움 등에 대하여 인터뷰가 이루어졌다. 설문, field note, 녹화된 수업과 인터뷰 등 다양한 자료를 통한 triangulation은 정성연구의 타당성과 신뢰성을 높인다. 녹화된 수업의 모든 대화는 활자화하여 분석을 하였다. 연구자는 활자화 된 자료를 여러 번 읽으면서 수업에서의 규칙성을 찾는데 주력하였다.

자료들은 모두 영문으로 되어 있기 때문에 연구자의 분석을 통하여 규칙성을 찾고 특히 인용이 되는 부분은 한글로 번역을 한 후 영어 전공자에게 다시 영문으로 번역을 하게 하여 native speaker를 통하여 의미의 차이가 없음을 밝혔다. 의미의 차이가 있을 때에는 영어 전공자와 의견교환을 통하여 100% 합의에 이를 때까지 반복 하였다.

IV. 연구 결과

본 연구 결과는 최종적으로 선발된 교사 S 와 J의 교실 수업 관찰과 수업 전 후의 면담을 중심으로 기술한다.

1. 미국의 숙련된 수학교사들은 문장제 문제를 지도할 때 어떤 전략을 이용하는가?

교사S와 교사J의 문제해결 전략 지도 과정

교사 S는 교육경력이 30년이었으며 7학년과 8학년 학생들이 혼합된 학급을 지도하였다. 교사 S는 교실에서 책상들을 교실 앞쪽으로 향하게 하였으며 전통적인 교실에서 볼 수 있듯이 가지런히 정열 하여 배치하였다. 이 반 학생들의 구성은 24명으로 남학생이 14명 여학생이 10명이었다. 대부분의 학생은 Hispanic 계통이었다. Caucasian에 비해 이들은 언어적 어려움을 갖고 있었다. 학생들은 문장제 문제 해결에서 두 명이 짝을 이루어 문제를 해결하였으며 언제든 필요할 때에는 자신의 자리를 이탈하여 다른 조의 학생들과 토의를 할 수 있었다. 교재는 Connected Mathematics를 주로 하였으며 이 교재는 실생활 문제를 중심으로 문장제 문제들로 구성되었다.

교사 S의 수업은 항상 일정한 틀을 유지하고 있었다. 수업 시작과 함께 기본적인 계산 기능들이나 단순한 수학적 개념을 연습할 수 있는 warm up 활동을 하였으며, 히스페닉 계통의 학생들이 갖는 언어적 어려움 때문에 영어단어에 대한 설명을 하는데 간혹 시간을 할애하였다. 문장제 문제 해결에서 언어적 이해의 장애가 하나의 큰 장애가 된다는 것을 교사S는 잘 알고 있었기 때문이었다.

교사S: 무엇을 먼저 하지요?
학생1: 6더하기2요.
교사S: 좋아요. 그럼, 답은 무엇이지요? (교사S, 3월 2일 수업 중에서-Warm up)

교사S: 5개의 노란색 칩과 5개의 파란색 칩이 주머니에 담겨있다. 여기서 2개의 노란

> 색 칩을 꺼내 다시 넣지 않는다고 할 때 파란색 칩을 꺼낼 확률은 얼마인가요? (교사S, 3월 15일 수업 중에서-Warm up)

> 교사S: 저는 종종 문제를 읽고 단어들의 뜻을 이해하는 것으로부터 학생들이 문제해결을 시작하도록 합니다. (교사S, 설문 중에서)

이러한 Warm up 활동이 끝나면 교사S는 학생들에게 문제를 제시 해 주기 전에 문제에 대한 배경지식을 먼저 설명해 주었다. 문제에 대한 배경지식은 문제에 해당되는 전반적인 지식을 말한다. 교사S는 학생들에게 구조불꽃을 쏘아 올렸을 때의 시간과 높이 구하기 문제를 제시하기 전에 그 문제의 배경지식이 될 수 있는 중력과 가속도 그리고 높이 뛸 수 있는 힘에 대하여 설명하고 있다. 또한 구조불꽃이 어떤 가속을 내며 내려올지에 대한 간단한 설명이 될 수 있는 배경 지식들을 여러 가지 예를 들면서 설명하고 있다. 이 때 단순하게 교사혼자서 설명하기 보다는 학생들의 흥미를 자극할 수 있는 내용으로 학생들이 쉽게 접할 수 있는 지식과 타 교과에서 학습할 수 있는 지식들로 학생들과 의사소통을 하면서 수업을 진행해 갔다.

> 교사S: 보통 사람들은 20에서 30인치 정도를 수직으로 뛰는데 어떤 사람들은 매우 높이 점프를 할 수 있다. 농구선수들 중에 우리가 알고 있는 마이클 조던은 50인치 이상을 점프한다는 것을 기억하지요? … 여러분들이 달에 간다면 얼마나 높이 뛸 수 있을까요? … 달의 중력은 지구의 6분의 1이기 때문에 더 높이 뛸 수 있을 것입니다… 공을 공중으로 높이 던지면 그것이 최고점에 올라갔다가 다시 내려올 것입니다. 왜냐하면, 나는 그것을 지구 바깥으로 던질 만큼 충분히 힘이 세지 못하니까요.…그것이 내려올 때 천천히 내려올까 아니면 내려올 때와 같은 가속도를 가지면서 내려올까요? (교사S, 3월 2일 수업 중에서)

교사S는 학생들에게 어려운 내용의 수학적 용어를 과감하게 적용하였다. 학생들의 토론 속에서 구조불꽃을 수직으로 쏘아 올릴 때와 약간 비스듬히 쏘아 올릴 때 최고의 높이가 다르다고 제시한 학생에 대한 설명에서 '벡터'라는 용어를 사용하였다. 벡터의 용어에 대한 설명과 동시에 학생들에게 제시된 문제와 어떤 관련이 있는지 설명을 하였다. 이러한 내용 역시 학생들에게 수학적 배경 지식을 제시해 주고 있는 것이다. 학생들이 문제 해결에서 다양한 배경 지식을 통해 문제에 대한 이해를 쉽고 정확하게 할 수 있도록 하는 것이다.

교사S: 이제 왜 그런지(구조 불꽃을 수직으로 쏘아 올렸을 때와 비스듬히 쏘아 올렸을 때 이르는 최고 높이는 같다) 이야기 해 봅시다. … 오늘 심각하게 가고 싶지 않지만 그래도 우린 그것을 '벡터'라고 부릅니다. 벡터의 의미는 물체가 한 방향 이상으로 운동하는 것입니다. … 그리고 그것은 위로의 움직임과 옆으로의 움직임입니다. … 얼마나 많이 옆으로 움직이고자 하는 것이 관건이 아닙니다. 우리는 한 방향의 벡터만을 재고자 하는 것입니다. 우리는 이 문제에서 옆으로 움직이는 벡터를 무시합니다. (교사S, 3월 2일 수업 중에서)

이러한 배경지식에 대한 설명이 끝난 후 교사S는 학생들에게 다음과 같은 문제를 제시하였다. 교사S는 문제중심 수업을 진행 하였으므로 연구자가 연구를 진행하는 동안 항상 문장제 문제를 제시하였다. 이 문장제 문제는 교재 Connected Mathematics에 제시되는 문제들이었다.

문제1) 구조 불꽃

구조 불꽃이 바다에서 초기 속력 초당 144피트로 쏘아 올려졌다. 그 구조 불꽃이 바다로 다시 떨어지는데 몇 초가 소요되겠는가? (교사S, 3월 2일 수업 중에서)

문제2) 최대직사각형 만들기

둘레가 20m인 직사각형을 생각하여보자.

a) 이 상황을 대표할 수 있는 사각형을 그려라. 한 변을 L 그리고 다른 한 변을 L을 이용한 식으로 나타내보자.
b) 면적을 L을 이용하여 A의 방정식으로 나타내보자.
c) 방정식의 표를 만들어라. 표를 이용하여 둘레의 길이가 20m인 가장 큰 면적의 사각형을 어림하여보아라. 이 사각형의 한 변의 길이를 찾아보자.
d) 한 변의 길이와 면적과의 관계를 그래프로 나타내어 보자.
e) 최대면적을 찾기 위해 어떻게 그래프를 이용하였는가? (교사S, 3월 15일 수업 중에서)

학생들은 문제가 제시 되었을 때 교사로부터 얻었던 배경 지식을 이용하여 문제를 해결하는 전략을 세우는 활동을 짝과 함께 하였다. 교사S는 항상 두 사람을 짝으로 하여 문제를 해결 하도록 하였다. 그는 네 사람이 활동을 할 때보다 두 사람이 활동을 할 때 100% 활동에 참여를 하게 됨으로 짝과 활동하도록 하는 것을 선호 하고 있었다. 이 때 교사S는 각 그룹을 궤간 순시 하면서 그들의 전략을 듣고 발문을 통한 조언과 힌트를 제공하였다. 또한 두 학생이 서로 동의 하는지를 알아보았다. 이것들을 통해 교사는 학생들의 모든 전략을 정리 단계를 위하여 머릿속에 기억하고 있었다. 또 어떤 그룹이 어려움을 겪고 있는지 그래서 그 그룹에 시간을 좀 더 투여하여 어려움을 이겨내도록 발문을 통하여 도와주었다. 교사S는 학생들과 의사소통뿐만 아니라 학생과 학생의 의사소통을 적극 장려하였다.

학생2: 둘레가 20이기 때문에 그리고 두개의 길이를 가지고 있기 때문에 빼야(20-2L) 하고 그래서 두개의 길이가 남으며 그것을 2로 나누면 한쪽의 길이와 같게 됩니다.
교사S: 그래서 너희 둘 다 동의하니?
학생3: 예.
…
교사S: 이 조는 어떻게 되어가고 있니?
학생4: 저희는 L(가로)과 W(세로)를 써서 A(면적)을 나타내었습니다.
교사S: 잠깐, 우리가 가로를 L로 하면 세로를 L을 이용하여서 나타낼 수 있지 않을까? (교사S, 3월 15일 수업 중에서)

교사S는 궤간순시를 통하여 학생들의 다양한 해결 전략을 알아낼 뿐만 아니라 학생들의 오개념을 발견하기도 하였다. 오개념을 발견하였을 때 그는 학생들과 의사소통을 통하여 충분히 전체가 이해 할 수 있도록 전체 학습을 실시하였으며 상당한 시간을 투여하기도 하였다. 문제2에서 학생들 중 한 그룹이 10m로 한 변을 정했을 때 다른 한 변이 10m이므로 이 때 넓이를 $20m^2$로 계산을 하였다. 여기서 이 조의 학생들은 점과 선의 개념을 명확히 이해하기 못하고 있음을 알고 학급 전체와 의사소통을 통하여 선은 표상이지 면적을 가지고 있

지 않으므로 여기서 면적은 없음으로 결론을 내렸다. 이 때 교사는 일방적인 설명을 하기보다는 발문을 통하여 학생들이 사실을 발견하고 그들 스스로 개념을 이해 할 수 있도록 유도 하였다. 문제해결에 있어서 오류를 통한 지도는 학생들의 개념이해를 명확하고 분명하게 해 주는 중요한 단서가 될 수 있다.

학생5: 이것(선)은 아주 아주 정말로 작은 사각형들로 채워져 있습니다.
교사S: 그럼 너(학생6)는 어떻게 생각하니?
학생6: (곰곰이 생각하다가)너(학생5), 여기에 사각형을 그린 것이니 아니면 선을 그린 것이니?
학생5: 내가 그린 것은 세로가 0이고 길이가 20인 선을 그렸어.
(학생6은 이 과정을 통해 개념이해를 명확하게 함.)
…
학생7: 그래서 우리는 기호를 발명했어요.
교사S: …그래서 우리가 기하학을 공부할 때 선이 실제로 존재하나요? 단지 기호에서만. 그것은 단지 기호일 뿐이지요, 그렇지요? (교사S, 3월 15일 수업 중에서)

교사S는 복잡한 문제 특히 문장제 문제를 학생들이 조그마한 부분으로 나누어 각 부분을 자세히 학습한 후 전체적인 맥락을 파악하여 문제를 해결하도록 지도 하였다. 그는 학생들이 다이어그램, 그림, 표를 그리고 그래프를 그림으로써 문장제 문제 해결하는 것이 좋은 전략이라고 믿고 있으며 학생들이 항상 그러한 전략을 이용하여 문장제 문제를 해결하도록 유도하였다.

교사S: 그래서 나는 좋은 문제해결 전략이란 문제를 다이어그램, 그림, 표, 그래프 등을 통하여 문제해결에 접근하는 것이라고 생각합니다. 문제를 조그마한 부분으로 쪼개고 그것의 각 부분에 관해 자세하게 학습함으로써 학생들은 전체적인 그림을 그리면서 문제를 해결할 수 있습니다. (교사S, 3월 2일 수업 후 면담 중에서)

교사S는 학생들이 그림 등의 전략을 이용하여 문제를 해결하는 실마리를 또는 근접하는 답을 구하였을 때 대수적으로 식을 세워 문제를 해결하도록 하였다. 이러한 활동은 궤간 순시동안 모두 동시에 이루어지는 경우가 많았다.

교사S는 학생들이 문제를 자신만의 독특한 해결 전략으로 풀이하였을 때 그들의 전략을 정리하여 발표하도록 하였다. 그는 이러한 정리 발표 과정에서 학생들의 추론에 대한 설명이 문제해결에서 매우 중요한 부분임을 강조하고 있다. 폴리아의 문제해결 4단계 중에서 반성단계에 해당하는 이 부분은 타당한 답을 결정하는데 있어서 매우 필요한 부분이나 대부분의 학생들은 이를 간과하는 경우가 많다. 수업에서 항상 반성의 단계를 짚어준다면 학생들은 혼자서 문제를 해결 할 때에도 반성단계를 잊지 않고 거치게 될 것이다.

교사S: … 나는 문제해결의 중요한 부분이 정리라고 생각합니다. 그래서 모든 학생들은 그들이 수행 했던 방법들을 제시하고 어떻게 그들이 문제를 해결 했는지에 대한 그들의 추론을 설명하는 것이 수업에서 중요한 부분입니다. 그것(정리과정)은 꼭 필요합니다. (교사S, 2월 27일 수업 후 면담 중에서)

교사J는 교육경력이 20년이었으며 7학년 학생들로 구성된 학급을 지도하였다. 이 반의 구성은 27명으로 남학생이 10명 여학생이 17명이었으며 모두 Caucasian들로 구성되었다. 교사J는 문장제 문제 해결에서 반 전체학생들과 함께 문제를 해결해 가는 교사 주도형 교수전략을 사용하였으며 학생들에게 언제든 자신의 수학적 생각과 의견을 표현할 수 있도록 자유스러운 분위기를 제공하였다. 문제의 대부분은 여러 가지 교재 중에서 선택을 하거나 인터넷을 통하여 자료를 수집하여 '보기'를 제시하고 학생들이 문제를 만들어 함께 해결하는 방법을 사용하였다. 이 수업은 오후 2시부터 시작하여 45분 동안 이루어졌다. 교사J의 학생들은 모두 Caucasian들로 읽기와 언어에 대한 문제는 전혀 없었다. 그래서 교사J는 어휘에 대한 설명을 따로 하지는 않았다.

교사J는 학생들이 접해보지 못했던 내용의 문장제 문제라고 생각하는 문제에 대하여 학생들이 더 잘 이해하여 문제해결 전략을 세울 수 있도록 문제를 제시하기 전에 문제의 배경지식에 대한 설명을 하였다. 배경 지식은 문제와 직접적으로 관련이 되지 않지만 문제이해에 있어서 도움이 되는 내용이었다. 교사J는 세금문제를 제시하기 전에 자신의 경험과 세금의 제도에 대하여 설명을 하였다. 세금 운영이 어떻게 되고 세금이 어떻게 걷히는지 그리고 되돌려 받는지에 대한 설명을 하였다. 여기서 배경 설명에 대한 시간을 교사J는 약 10여분 정도의 상당히 많은 시간을 할애 하였다. 교사J는 문제를 보고 바로 해결하는 것보다 문제의 배경에 대한 이해가 선행이 되어야 한다고 생각하였기 때문에 배경에 대한 설명 시간이 항상 길었다.

> 교사J: 국가의 행정은 세금으로 운영이 됩니다. 여러분이 회사에 가면 세금을 내고 연말에 여러분은 세금 계산을 해야 할 것입니다. 연말의 세금 계산은 너무 많이 냈을 경우 연방정부와 주정부로부터 돌려받고 너무 적게 냈을 경우 더 내야 합니다. 그래서 여러분은 얼마나 세금을 지불해야 하는지 알아야 할 것입니다. … 세금 제도에서 일정부분을 연방정부에 그리고 또 일정부분은 정년을 위하여 지불을 해야 합니다. 이렇게 지불한 세금을 연말에 정산을 하는데 올해 정산을 잘해서 69달러를 돌려받았습니다. 그러나 보통 나는 내가 얼마나 지불해야 하는지 물어봅니다. 그리고 100달러 정도 감면을 받습니다. 그러나 작년엔 계산을 잘못하여 259달러를 더 내야 했습니다. (교사J, 2월 27일 수업 후 면담 중에서)

교사J는 문제에 대한 배경설명을 한 후 문장제 문제를 제시하였다. 교사J는 문장제 문제들을 학생들의 수준과 학습해야 할 내용에 맞추어 다양한 곳으로부터 발췌하였다. 아래 문제들은 교사J가 학생들에게 제시한 문제의 일부분이다. 문제1의 세금 계산 문제는 다른 교재에 제시된 것을 조금 변형하여 만들었으며 문제2는 인터넷에서 자료를 받아와서 자료의 사실만을 제공하였다.

문제1) 세금계산

난 나의 세금계산을 바로 전에 끝냈습니다. 그리고 난 69달러를 연방정부로부터 돌려받을 것입니다. 하지만 242달러를 주정부에 지불해야 합니다. 난 IRA에 1500달러를 기부할 수 있습니다. 만약 그것을 기부한다면 난 다시 294달러를 연방정부로부터 되돌려 받을 것이고 127달러를 주정부로부터 되돌려 받을 것입니다. 얼마를 내가 IRA에 기부를 하면 0달러가 될까요? 다른 말로 언제 연방정부로부터 되돌려 받는 돈과 주정부에 지불해야 하는 돈이 같아질까요? (교사J, 2월 22일 수업 중에서)

문제2) 모래알갱이 개수와 별의 개수

우리 은하계의 별은 약 10^{11}개입니다. 우리 지구에 있는 모래알갱이의 개수는 약 10^{20} 개입니다.(교사J, 3월 7일 수업 중에서)

모래알갱이 개수와 별의 개수에 대한 문제에서 교사J는 인터넷에서 찾아온 자료만을 제공하면서 학생들이 문제를 만들도록 하였다. 학생들은 여러 가지 문제를 만들어 발표하였으나 교사J가 바라는 지수법칙을 이용할 수 있는 문제가 나타나지 않아서 모래알갱이 개수와 별의 개수의 차이를 구하는 문제를 선택하였다. 선택된 문제는 교사와 반 학생 모두가 함께 해결해갔다. 자신들이 만든 문제였기 때문에 학생들은 적극적으로 문제를 해결하려고 노력하였다.

교사J: 모든 자료를 이용해서 여러분이 만들 수 있는 문제가 나오기를 바랍니다.
학생1: 선생님은 두 가지 사실을 모두 이용하기를 바라십니까?
교사J: 그렇습니다.
학생2: 우리 은하계의 별들의 수가 약 10^{11}개이고 우리 지구의 모래알갱이의 개수가 10^{20}개라면 이 둘의 차이는 무엇입니까?
교사J: 좋아요, 여기 좋은 문제가 있습니다.

문제를 해결하기 전에 교사J는 학생들에게 문제에 대한 자신들의 이해를 발표하게 함으로써 문제의 이해를 도왔다. 문제를 제시하기 전에 문제의 배경지식을 교사가 설명을 했기 때문에 학생들은 문제 자체에 대한 이해를 분명히 할 수 있었다. 그녀는 좀 더 분명하게 이해한 학생에게 문제에 대해 설명 할 수 있는 기회를 줌으로써 반 학생들 모두가 분명하게 이해할 수 있도록 지도하였다. 이것은 Polya의 문제해결 4단계 중 문제이해 단계에 해당하며 그것을 분명하게 한다는 것을 알 수 있다.

교사J: 문제에 대해 이해한 것을 다른 학생들에게 설명해 줄 수 있니?
학생3: 좋아요, '은하계의 별들의 수와 지구의 모래알의 수의 차이는 무엇인가?'입니다. (교사J, 3월 7일 수업 중에서)

교사J: 다른 친구에게 설명해 주겠습니까?
학생4: 우리는 생활에 대한 비용이 3% 오를 때 백만 달러가 1년, 2년, 3년, … 후에 얼마만한 가치가 있는지 알아내는 것입니다. (교사J, 3월 16일 수업 중에서)

학생들이 문제를 이해했다고 판단이 되었을 때 교사J는 학생들이 혼자서, 짝과 또는 그룹별로 문제를 해결하도록 독려하였다. 학생들이 스스로 문제를 해결하는 동안 교사는 궤간순시를 통하여 학생들의 문제해결 전략을 파악하고 그것이 끝난 후 전체 학생들과 토의를 통하여 문제를 해결하였다. 모래알갱이 개수와 별의 개수 문제에서 교사J는 학생들이 만든 문제를 통해서 지수의 뺄셈(m-n)이 9의 개수를 의미하고 거기에 10^{m-1}을 곱하는 것을 답으로 유도하였다($10^m - 10^n = 9.9 \cdots 9 \times 10^{m-1}$). 하지만 다른 학생의 반박으로 새로운 일반화의 과정을 시작할 수 있었다. 이렇듯 전체 학생들과 문제를 해결 하는 동안 교사J는

Lakatos의 '증명과 반박'의 수업 방법을 부분적으로 적용하였다. 학생들이 가설을 세우고 교사가 학생들의 설명에 반박을 하거나 학생들 스스로 그 가설을 반박해 가면서 문제해결 후 일반화를 이루는 과정으로 수업을 진행하였다.

> 교사J: 만약 우리가 10^m 마이너스 10^n을 계산한다면 어떻게 우리는 답을 얻을 수 있나요? 우리가 만약 공식을 만들 수 있다면...
> 학생5: m-n이 9의 개수라는 것을 우리는 알고 있습니다.
> 학생6: 그리고 10^{m-1}을 곱합니다.
> 학생7: 그렇다면 m이 n보다 작을 때는 어떻게 하나요?
> 교사J: 그래요 우리가 계속 보았던 문제들은 모두 m이 n보다 큰 것들이었습니다. 그러나 나도 잘 모르겠습니다. 여러분은 어떻게 생각하나요? (교사J, 3월 7일 수업 중에서)

많은 토론 끝에 한 시간 동안 학생들이 세운 잠정적 결론은 다음과 같다.

m이 n보다 클 때 $10^m - 10^n = \underbrace{9.9 \cdots 9}_{(m-n)\text{개의 } 9} \times 10^{m-1}$

학생들이 한 시간 동안 끌어낼 수 있는 결론까지 만으로 마무리를 짓고 다음 결론은 뒤로 미루어두었다.

결국 교사J는 학생들의 문장제 문제해결에서 문제해결 뿐만 아니라 일반화의 과정까지 지속시켜 가면서 학생들의 반성 및 적용까지를 겸하였다.

교사S와 교사J의 공통점 및 차이점

교사S와 교사J 모두 문장제 문제 해결 지도에 있어, 학생들의 문제 자체의 이해보다는 그에 앞서 문제의 배경지식에 대하여 먼저 충분히 설명 해 주었다. 문제의 배경을 이해함으로써 학생들은 문제 해결에 대한 동기를 갖게 되고 문제해결 후 답을 결정할 때 논리적으로 할 수 있다.

두 교사 모두 문제의 배경지식의 이해 후 문제 자체에 대한 이해를 하도록 다른 학생들을 통하여 인식 시켰다. 문제가 이해되었을 때 두 교사는 학생들 스스로 문제해결 전략을 세우도록 독려를 하였고 두 교사 모두 학생들의 문제해결 전략을 파악하였다. 학생들의 문제해결 전략을 파악한 교사는 식을 세우고 또는 그림을 그리고 표를 만들어서 문제를 해결하도록 하였다. 두 교사 모두 문제해결 후 각기 다른 방법이지만 반성단계를 거쳐 학생들이 자신들의 해결 방법에 대해 조사하도록 유도하였다.

이렇게 큰 공통점을 갖고 있으면서도 두 교사가 보였던 차이점은 다음과 같다.

교사S는 문제해결 지도에 있어서 철저히 두 학생을 한 조로 만들어 토의하게 하였으며 개별 지도를 통하여 학생들이 문제를 해결하도록 하였다. 또한 학생들이 자신들의 문제해결 전략과 결과를 발표함으로써 다른 학생들의 비평을 통하여 또 자신의 문제해결과 다른 사람의 문제해결을 비교해봄으로써 반성의 단계를 거치도록 하였다.

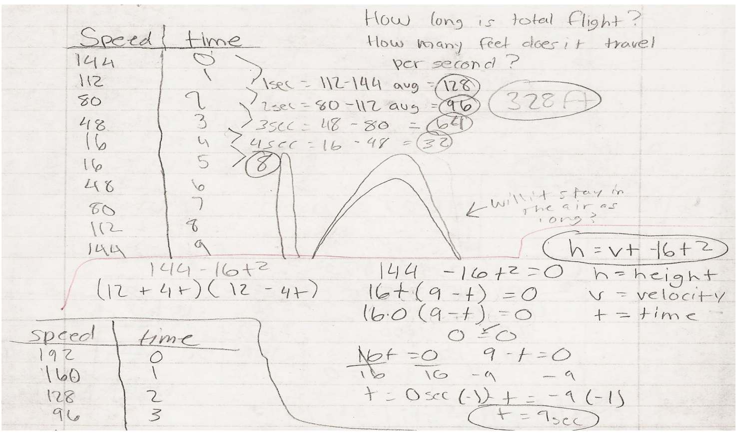
한편 교사J는 문제해결에 있어서 정보를 제공하고 그 정보를 이용하여 학생들이 문제를 만들도록 유도하여 동기를 유발하였다. 또한 개별지도보다는 전체 학생과 교사의 토의 토론을 통하여 문제를 해결하고 문제를 해결한 후 새로운 문제제기, 또 증명과 반박을 통하여 일반화를 유도하였다.

2. 그러한 문장제 문제 지도가 학생들의 문제 해결에 어떤 영향을 미치는가?

학생들은 문제에 대한 배경지식을 알게 됨으로써 더 적극적으로 문제를 해결하려는 자세를 갖게 된다. 또한 문제해결에 대한 새로운 전략 또는 아이디어를 가질 수 있다. 학생들은 문제에 대한 배경지식을 이해함으로써 자신만의 독특한 문제해결 전략을 구사할 수 있고 수학적 추론이나 조금 더 논리적인 사고를 할 수 있게 된다고 교사S는 말한다. 배경 설명은 학생들의 동기유발을 이끌며 흥미를 자극하여 문제해결을 장려하며 다른 문제의 적용에서 효과를 발휘한다고 하였다. 단순히 문제 자체만을 이해하기 보다는 문제 속에 담긴 여러 가지 배경 지식을 이해함으로써 다른 문제 해결에서도 도움을 준다고 하였다. 우리들이 흔히 문제에 대한 배경 지식을 충분히 이해를 한다면 문제 해결에서 수학적 추론을 더 쉽게 할 수 있으며 문제 해결 전략이 좀 더 다양해 질 수 있다. 또한 문제해결 후 타당성을 검토할 수 있으며 그러한 타당성의 검토는 타당한 결론을 내릴 수 있게 한다. 하지만 두 교사 모두 교재에서는 배경 설명이 될 수 있는 실제적인 것은 잘 나타나 있지 않으므로 교사의 배경 설명이 절실히 필요하다고 면담을 통하여 역설하였다.

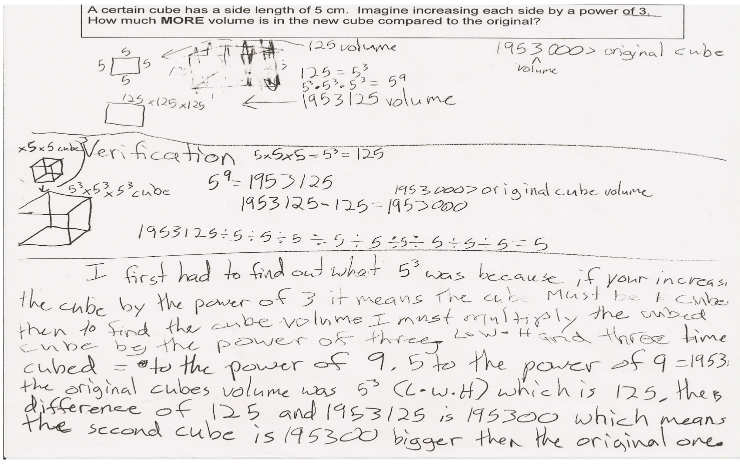
> 교사S: 좋습니다. 저는 학생들에게 조금의 힘과 중력에 관한 지식을 주려고 노력하였습니다. … 중력이 공중에 쏘아 올린 물체에 어떤 영향을 미치는지에 대한 조금의 아이디어를 얻도록 해 줌으로써 학생들은 문제해결을 완성할 수 있기 때문에 학생들에게 약간의 배경 설명을 해 주었습니다. 그래서 그들은 문제를 해결했고 또 다른 유사한 문제들도 해결 했습니다. (교사S, 3월 2일 수업 후 면담 중에서)

교사S의 학생들은 문제해결에 있어서 문제의 배경 지식을 충분히 습득하였기 때문에 문제에 적당한 그림을 그려서 문제를 해결하려고 하였다. 그림으로 충분히 나타내었을 때는 방정식을 세워 문제를 해결하였고 결정을 내리기 전에 반성단계인 검사를 해보는 학생들이 많았다. 구조 조명 문제에서 24명의 학생 중 17명(70.8%)의 학생이 그림을 그려서 문제를 해결하려고 하였으며 13명(54.2%)의 학생들이 표를 이용하여 문제를 해결하려 하였다. 두 가지 모두 사용한 학생들은 6명(25%)이었다. [그림 1]은 문제 해결에 두 가지 모두를 이용한 학생이다. 속력과 시간의 관계를 표로 나타내었으며 구조조명의 자취를 그림으로 나타내었다. 시간의 흐름에 따라 속력을 나타냄으로써 구조조명의 체공 시간을 나타내주고 있으며 9초 후에 출발할 때와 같은 속력일 때 구조조명은 높이가 0이라는 개념을 이용하여 검산을 하는 방법을 제시해 주고 있다. 교사의 배경 지식에 대한 설명은 학생들이 문장제 문제를 그림이나 표로도 나타낼 수 있도록 도와주고 있음을 알 수 있다.



[그림 1] 교사S의 학생 문제해결 중에서

교사J의 학생들은 새로운 문제가 제공되었을 때 문제를 해결하기 위해 27명 중 23명(85.2%)의 학생들이 역시 그림으로 나타내기를 먼저 하였으며, 그림으로 나타낸 것을 다시 식으로 나타내어 좀 더 간명하게 제시하였다. 또한 자신의 해결 방법에 대하여 폴리아의 반성단계인 검사 과정을 항상 거쳤으며, 자신의 문제해결 전략과 방법에 대한 설명도 놓치지 않았다.



[그림 2] 교사J 학생의 문제 해결 중에서

[그림 2]에서의 문장제 문제는 '한 변의 길이가 5cm인 정육면체와 각 변의 길이를 세제곱만큼 늘였을 때 늘인 정육면체의 부피는 원래 정육면체 부피보다 얼마나 많은가?'이다. [그림 2]에서처럼 학생들은 그림으로 먼저 시작해서 식을 세워 문제를 해결하고, '각 변의 세제곱이므로 5가 9번 곱해 진다'는 생각으로 1,953,125를 5로 아홉 번 나누는 과정을 밟았다. 그리고 자신의 해결 방법을 말로 표현하여 문장제 문제 해결에서도 의사소통의 과정을 거치고 있었다. 이와 같이 교사와 학생들은 문제해결에 있어 수많은 의사소통을 통하여 자신들의 문제해결 전략과 방법을 줄글로 표현할 수 있었다. 학생들은 문제해결에 대해 적극성을 보

여주었으며 문제해결 전략을 여러 가지 방법으로도 표현을 하였고 검사 또는 검증 과정을 항상 거치어 자신의 결론을 명확하게 내림을 볼 수 있었다.

V. 결론 및 제언

교사S는 문장제 문제해결 지도에 있어 학생들에게 문제에 대한 배경 지식을 자세히 설명해 준 후 문제 자체에 대한 이해가 되었을 때 학생들이 짝과 함께 의사소통 과정을 통하여 문제를 해결하도록 하였다. 궤간 순시를 통하여 학생들의 문제해결 전략에 대하여 파악을 하였으며 그것들을 학생들이 전체 학생들에게 설명할 수 있는 기회를 제공하여 반성의 단계를 거치도록 하였다.

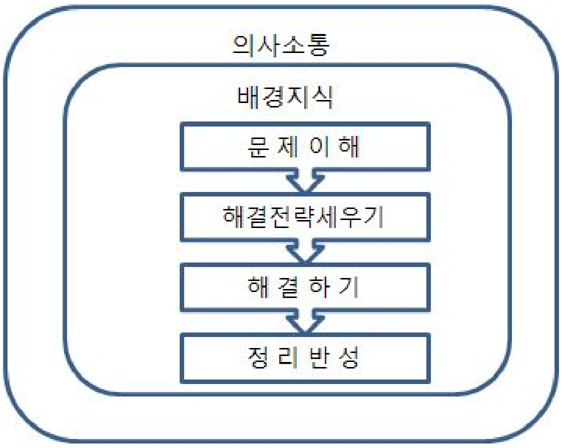
교사J 역시 문장제 문제를 제시하기 전에 문장제 문제에 대한 배경지식을 설명하였다. 학생들과 함께 자유스러운 분위기에서 학생들은 언제든 자신의 수학적 아이디어를 말할 수 있도록 하였다. 또한 교사J는 학생들에게 의사소통의 기회를 충분히 제공해 주었다. 문제해결에 있어서 라카토스의 증명과 반박의 과정을 거침으로써 폴리아의 문제해결 4단계 중 반성의 단계를 일반화로 이끌어 가면서 자연스럽게 접하도록 하였다.

교사S는 짝과 함께 문제해결을 하도록 유도하였으며 학생들의 발표를 통하여 반성을 하도록 한 반면에 교사J는 전체와 함께 토론을 통하여 문제를 해결하였으며 라카토스의 증명과 반박이라는 방법을 이용하여 학생들과 함께 단순한 문장제 문제의 해결을 일반화까지 이끌어 내는 수업으로 진행을 했었다. 이 두 교사는 다양한 과정을 통하여 선발되었기 때문에 수업의 질과 성취도면에서 우수하다는 가정을 내포하고 있다. 이를 볼 때 짝과 문제를 해결하는 방법이나 전체와 함께 교사의 주도로 진행되는 문제해결 수업 전략은 결과에 있어서 크게 차이가 나지 않음을 알 수 있다.

[그림 3] 모델은 교사S와 교사J의 문장제 문제 해결 지도 전략의 공통점을 바탕으로 폴리아의 문제해결 4단계를 보완한 것이다. [그림 3]의 모델을 통해 알 수 있듯이 '의사소통'은 전체 교실에서 보이지 않게 자연스럽게 이루어지며, 문제 자체 하나를 이해하기 보다는 문제에 대한 전체적인 배경 지식을 제공하고 이를 이해시키는 것을 가능하게 하며, 폴리아의 문제해결 4단계로 문제를 해결해가는 과정을 밟을 수 있게 하는 문제해결 지도의 커다란 원동력이 되어 주고 있기 때문에 수업의 전반을 통해 의사소통은 무척 중요하게 다뤄지고 강조되었다.

교사S와 교사J는 문장제 문제 해결 지도과정에 있어서 공통적으로 문제의 배경에 대한 설명을 자세히 함으로써 학생들의 수학 문제해결에 대한 동기를 유발하였고, 학생들이 문제 자체에 대해 분명히 이해할 수 있도록 만들었으며 더 나아가 학생들 자신이 다양한 해결 전략을 이용하여 문제를 해결하는 것이 가능케 하였다.

또한, 교사와 학생들 그리고 학생과 학생의 '의사소통'을 강조하여 언제든 자신의 수학적 아이디어를 제시할 수 있는 자유스러운 분위기를 제공하였다. '의사소통'은 교사와 학생 그리고 학생들이 문제 풀이 자체에만 얽매이지 않고 배경지식을 활용하여 문제를 이해하는 과정을 가능케 하였고, 끊임없는 질문과 의문을 통해 문제 해결 전략을 세우고 그 문제를 해결하고 다시 정리하고 반성하는 전반에 걸친 원동력이 되어주었다. 이것은 문제 해결에 있어서 의사소통의 중요성을 다시 한 번 보여주는 것이다.



[그림 3] 문장제 문제 해결 지도 전략에 관한 모델

미국 교사들의 문장제 문제해결 지도에서 배경지식의 설명은 학생들의 문제해결에 대한 동기를 유발할 뿐만 아니라 문제해결의 다양한 아이디어와 다양한 해결 전략을 이끌어 내는데 도움을 제공한다. 이러한 배경 지식을 설명하기 위해서 교사는 과학적 지식, 사회 현상학적 지식, 예술적 지식 등 다양한 분야에서 고루고루 지식을 갖추고 있어야 할 것이다. 이러한 지식은 단시간에 이루어지는 것이 아니므로 현직 교사들이 다양한 지식을 쌓을 수 있도록 과학, 사회, 예술 및 체육 등 다양한 연수 자료를 제공해 주거나 웹사이트를 통하여 수학 교과서에서 사용할 수 있는 지식과 정보를 제공해 주는 것도 좋은 방법이 될 것이다. 예비교사들 역시 수학 내용학적인 것뿐만 아니라 다양한 정보를 또는 다양한 지식을 습득할 수 있도록 교사교육 프로그램에서 교과서의 문장제 문제와 관련된 지식과 정보를 제공하거나 스스로 찾아 포트폴리오를 제작할 수 있도록 해야 할 것이다.

짝과 함께 또는 전체 학생들을 대상으로 교사의 주도로 이루어지는 문장제 문제해결 지도이든 학생들이 자유롭게 수학적으로 대화를 할 수 있도록 유도하는 것은 매우 중요하다. 학생들은 자연스럽게 수학적 의사소통을 하고 교사는 그러한 의사소통이 이루어질 수 있도록 항상 학생들을 이해하려 해야 할 것이다. 의사소통은 강요 속에서 이루어지는 것이 아니라 부지불식간에 학생들이 편안한 마음을 가지고 있을 때 가능하다. 교사는 학생들과 항상 대화를 하려고 노력해야 할 것이며 정답만을 요구하는 것이 아니라 자신의 생각을 또는 수학적인 아이디어를 표현 하도록 해야 할 것이다. 또한 수학적 의사소통은 식으로만 나타나는 것이 아니라 수학을 말로 표현하는 방법, 그림으로 표현하는 방법 등 다양함을 교사는 항상 강조하여 학생들이 자신의 생각을 다양하게 표현할 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다.

제언으로 우리나라의 숙달된 수학 교사들의 수업과정을 분석하여 그들이 어떻게 문장제 문제해결을 지도하는지 조사하여 미국의 교사들과 어떻게 다른지 비교하여 보고 그것에 따른 학생들의 문장제 문제 해결 전략은 어떻게 다른지 비교하여 보는 것은 예비교사뿐만 아니라 현직 교사들의 문장제 문제 해결지도에 큰 도움을 제공해 줄 것이다. 또한 배경지식의 설명을 제시한 학생들의 문장제 해결과 그렇지 않는 학생들의 문장제 해결 방법의 차이를 분석해 보는 것도 의의가 있을 것이다.

참고문헌

김영국, 주익한, (1997). 문장제 문제 풀이의 실패 유형 분석과 그 지도 방안. 서원대학교 교육대학원 교육논총, 1. 75-99.

서화자, 권명옥, 김춘미, (2004). 표상학습전략 훈련이 수학학습부진아의 문장제 문제해결력 향상에 미치는 효과. 정서 · 행동장애 연구, 20(4). 353-376.

지재근, 오세열, (2000). 문장제에 대한 이해정도가 문제해결력 신장에 미치는 영향에 대한 연구. 한국수학교육학회논문집, 3(1). 189-200.

양순열, (1991). 문제표상과 효율적인 문장제 지도방안 연구. 한국수학교육학회지, 30(2), 87-96

오세경, (1995). 수학 학습지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안, 충북대학교 석사학위 논문.

이종희, (2003). 수학 문장제 해결과 유추. 교과교육학연구회, 7(2), 63-79.

Adamovic, C. & Hedden, C. (1997). Problem-solving skills. The Science Teacher, 64(6), 20-23.

Bassok, M. (1997). Two types of reliance on correlation between content and structure in reasoning about word problems, L. D. English(ed), Mathematical Reasoning-Analogies, Metaohors, and Images (pp. 221-246), Lawrence Erlbaum Associates.

Benko, A., Loisa, R., Long, R., Sacharski, M. & Winkler, J. (1999). Math word problem remediation with elementary students. Saint Xavier University.

Coy, J. (2001). Teaching fifth grade mathematical concepts: Effects of word problems used with traditional methods. Master of Arts Action Research Project, Johnson Bible College.

Chappell, M. & Thompson, D. (1999). Modifying our questions to assess students' thinking. Mathematics Teaching in the Middle School, 4(7), 470-474.

Higgins, K. (1997). The effect of year-long instruction in mathematical problem solving on middle-school students' attitudes, beliefs, and abilities. Journal of Experimental Education, 66(1), 5-28.

Jitendra, A.K., Griffin, C.G., McGoey, K., Gardill, M.C., Bhat, P. & Riley, T. (1998). Effects of Mathematical Word Problem Solving by Students at Risk or with Mild Disabilities. The Journal of Educational Research, .91(6), 345-355.

Kameenui, E. J. & Griffin, C. C. (1989). The national crisis in verbal problem solving in mathematics: A proposal for examining role of basal mathematics. Elementary School Journal, 89(5), 575-593.

Manes, M. (1996). Student learning in linear algebra: the gateways to advance mathematical thinking project. Educational Centre Development, Inc. Newton, MA

McIntosh, M. (1997). Guide students to better comprehension of word problems. The Clearing House, 71(1), 26-32.

Moore, J. (1999). Getting an answer right. Journal of Chemical Education. 76(7), 877-879.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Rattermann, M. J. (1997). Mathematical reasoing and analogy. In L. D. English(ed), Mathematical Reasoing-Analogies, Metaphors, and Images (pp. 247-264) Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Saul, M. (1997). Common sense: The most important standard. The Mathematics Teacher, 90(3), 182-184.

Schoenberger, K.M. & Liming, L.A. (2001). Improving student's mathematical thinking skills through improved use of mathematics vocabulary and numerical operations. Saint Xavier University and Skylight Professional Development.

Exemplary Teachers' Teaching Strategies for Teaching Word Problems

Lee, Kwang Ho[4] · Shin, Hyun Sung[5]

Abstract

This study investigated the teaching strategies of two exemplary American teachers regarding word problems and their impact on students' ability to both understanding and solving word problems. The teachers commonly explained the background details of the background of the word problems. The explanation motivated the students' mathematical problem solving, helped students understand the word problems clearly, and helped students use various solving strategies. Emphasizing communication, the teachers also provided comfortable atmosphere for students to discuss mathematical ideas with another. The teachers' continuous questions became the energy for students to plan various problem solving strategies and reflect the solutions. Also, this research suggested a complementary model for Polya's problem solving strategies.

Key Words : Word problems, Teaching strategies for problem solving, Exemplary teachers, Communication

4) Korea National University of Education (paransol@knue.ac.kr)
5) Kangwon National University (hsshin@kangwon.ac.kr)