Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 32, No. 4, pp.161－168, December 2009.

가장 일반화된 형태의 삼변수 운용방침 개발과 그에 따른 Busy Period 기대값 유도

이한교† ･ 오현승

한남대학교 산업경영공학과

Development of the Most Generalized Form of the Triadic Operating Policy and Derivation of its Corresponding Expected Busy Period

Hahn-Kyou Rhee† ･ Hyun-Seung Oh

Department of Industrial & Management Engineering, Hannam University

The most generalized form of the triadic operating policy for an M/G/1 queueing model is developed. It consists of three simple N, T and D operating policies and has a peculiar structure possessing concepts of dyadic policies. Using the concept of the pseudo probability density function of the busy period, its expected busy period for the controllable M/G/1 queueing model is derived. Since the obtained result is the most generalized form the triadic polity, the expected busy periods for all known dyadic policies are recovered as special cases from it.

Keywords : Expected Busy Period, Dyadic Policy, Triadic Policy, M/G/1 Queueing Model, Pseudo Probability Density Function

1. 서 론

삶의 현장 어디에서나 접할 수 있는 다양한 형태의 기다림을 과학적 방법으로 분석하여 유용한 정보를 도출하기 위해 개발된 대기이론은 오래 전부터 현재까지 많은 역할을 담당해 오고 있다. 처음에는 이론적으로 분석 가능한 영역에 속하는 단순화된 대기모형의 개발이 주된 목적이었지만, 최근에는 새로이 많은 수학적 기법들이 개발 보급되고 또한 컴퓨터의 사용으로 인해 복잡하더라도 보다 현실에 유사한 모형들이 많이 개발되어 활용되어 오고 있다. 이러한 관점에서 보면, 개발된 대기모형들은 크게 두 가지 형태로 분류할 수 있는데 초기의 단순화된 모형들을 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)이라고 분류하며, 또한 이러한 일반적인 대기모형에 보다 효율적 대기시스템의 운영을 위해 새로운 형태의 운용방침이 추가되어 복잡한 정도는 증가되었지만 효율적인 면에서 우수성을 지닌 모형들을 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)으로 분류할 수 있다. 이렇게 분류된 두 종류 대기모형의 큰 차이점은 서비스를 받기위해 기다리는 고객이 없을 때 서비스를 제공하는 server가 어떠한 상태에 있는지와 또한 서비스를 받기위해 처음으로 도착하는 고객이 언제 서비스를 받을 수 있는지에 있다. 만약 처음으로 도착한 고객이 아무런 조건없이 도착 즉시 서비스를 받을 수 있을 경우는 일반적인 대

논문접수일 : 2009년 09월 15일 논문수정일 : 2009년 10월 12일 게재확정일 : 2009년 10월 16일
† 교신저자 hkrhee@hnu.ac.kr
※ 이 논문은 2009년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

기모형에 속하며 이러한 형태의 서비스를 제공하기 위해서는 서비스를 기다리는 고객이 없어도 server는 서비스를 제공하는 창구에서 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 항상 대기상태를 유지해야만 한다. 다시 말해 서비스를 기다리는 고객의 유무에 관계없이 server는 항상 서비스 창구에서 대기상태를 유지해야 하기 때문에 고객의 입장에서는 편리성이 담보되지만 대기 시스템을 운영하는 입장에서는 server의 업무활용도가 낮아지게 됨을 감수해야 한다. 일반적인 대기모형에서 나타나는 이러한 문제점, 즉 server의 업무활용도를 향상시키기 위한 제안된 방법이 대기모형의 또 다른 형태로 분류되는 조정가능한 대기모형이라고 할 수 있다. 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 서비스를 제공하는 창구를 즉시 폐쇄한 다음 server는 다른 업무를 수행해야 한다. 이러한 규칙으로 인해 server는 서비스 창구에서의 업무 그리고 서비스 창구 폐쇄 후 또 다른 업무를 수행해야 하기 때문에 server의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 또한 일단 폐쇄된 창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 server는 다른 업무의 수행을 중단하고 서비스를 기다리는 고객들을 위하여 서비스 창구로 복귀하여 서비스 제공을 재개할 수 있다. 다시 말해 창구 폐쇄 후 도착한 고객은 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스를 제공받을 수 없다. 이러한 폐쇄된 서비스 창구를 다시 재개할 수 있도록 미리 정해진 조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 따라서 조정가능한 대기모형에서는 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 위한 시스템 상태를 규정하는 운용방침의 역할이 매우 중요함을 알 수 있다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있지만(Teghem[15]) 일반적으로 이러한 운용방침들은 시스템상태를 표현하는 입력변수의 개수에 따라 한 개인 경우 단순 운용방침(simple operating policy), 두 개인 경우 이변수 운용방침(dyadic operating policy) 그리고 세 개인 경우 삼변수 운용방침(triadic operating policy)으로 분류된다.

가장 대표적인 단순 운용방침에는 첫째, Yadin and Naor[16]가 제안한 것으로 시스템 내부에 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 받기위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 서비스 창구를 재개하여 기다리는 고객에게 서비스를 제공하는 N 운용방침(N-policy), 둘째, Heyman[5]등이 제안한 운용방침으로 서비스 창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 서비스 창구를 재개하여 서비스의 제공이 재개되는 T 운용방침(T-policy) 그리고 마지막으로 Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 서비스 창구가 폐쇄된 이후 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하는 D 운용방침(D-policy)이 있다.

고객이 없어 폐쇄된 창구의 재개를 위해 단순운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 server를 일반적인 대기모형보다는 효과적으로 활용할 수 장점이 있지만, 다양한 시스템의 상태를 표현할 수 있는 많은 조건들 중에 한 가지 시스템 상태에 의존하여 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 때문에 시스템 운영에 유연성이 부족하다고 볼 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 단순운용방침에 또 다른 하나의 시스템 내부 조건을 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee and Sivazlian[4]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스 창구가 재개될 수 있는 조건에 유연성이 추가된 이변수 운용방침은 단순 운용방침들 중 선정된 두 운용방침이 특이한 형태로 결합된 것으로 $Min(N,\ T)$, $Max(N,\ T)$, $Min(N,\ D)$, $Max(N,\ D)$, $Min(T,\ D)$ 그리고 $Max(T,\ D)$ 운용방침이 있다. $Min(N,\ D)$ 운용방침이 적용될 경우에는 N 혹은 D 운용방침에 따른 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스 창구에서 즉시 서비스 제공이 재개되어야 하며, $Max(N,\ D)$ 운용방침이 적용될 경우에는 N 운용방침과 D 운용방침 두 조건 모두가 처음으로 만족될 때 폐쇄된 서비스 창구에서 서비스 제공이 즉시 재개되어야 한다. 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]).

이변수 운용방침과 유사한 형태는 설비 교체 관리 분야의 Sivazlian과 Iyer[14]의 이변수 설비교체 운용 정책 그리고 대기이론 분야의 Rhee와 Sivazlian[13], Kella[7], Brill과 Harris[2], Kella와 Yachiali[6] 등을 예로 들 수 있다. 따라서 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 고객 혹은 server에게 어느 정도의 유연성이 부여된 것은 커다란 장점으로 평가될 수 있으며 또한 다른 영역에서도 활용될 수 있다.

최근에는 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순운용방침이 모두 결합된 $Min(N,\ T,\ D)$ 운용방침과 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee와 Oh[11, 12]에 의해 제안되었다. $Min(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 적용되는 경우 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 다음 N 혹은 T 혹은 D 운용방침의 조건 중 어느 것이나 가장 먼저 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 폐쇄된 창구에 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 재개하여야 한다. 또한 $Max(N,\ T, D)$ 운용방침이 적용되는 경우 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 다음 N과 T와 D 운용방침의 모든 조건이

처음으로 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 폐쇄된 창구에 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 재개하여야 한다. 제안된 $Min(N,\ T,\ D)$ 운용방침은 고객의 입장에서는 많은 유연성이 확보되어 있지만 대기시스템을 운영하는 입장에서는 그러하지 않을 수 있다. 또한 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침은 대기시스템 운영자에게 지나친 유연성을 제공하지만 서비스를 제공받는 고객의 입장에서는 많은 대기시간을 감수해야 하는 불편함이 따른다. 따라서 유연성을 확보하면서 고객과 대기시스템의 운영자의 입장을 동시에 고려할 수 있는 새로운 형태의 삼변수 운용방침이 개발되어 활용되면 효과적일 수 있다.

2. 연구 목적

기존의 $Min(N,\ T,\ D)$와 $Max(N,\ T,\ D)$ 삼변수 운용방침의 장단점을 서로 보완하기 위한 방편으로 두 삼변수 운용방침을 결합하는 의미를 갖는 다음과 같은 $Med(N,\ T,\ D)$ 삼변수 운용방침을 정의한다.

$Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침 : 시스템에 서비스를 받기위한 고객이 없으면 server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서비스를 기다리는 고객수가 N 명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건, $mT(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한명의 고객이 있어야 서비스가 재개되는 T 운용방침의 조건, 그리고 기다리는 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간보다 커야 서비스가 재개되는 D 운용방침의 조건 중 처음으로 두 가지의 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 서비스 창구로 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스 제공을 계속한다. 만약 $D\rightarrow\infty$이면 $Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침은 $Max(N,\ T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 만약 $D\rightarrow 0$이면 $Min(N,\ T)$과 동일하게 된다. 유사하게, 만약 $N\rightarrow\infty$이면 $Max(T,\ D)$ 운용방침, 만약 $N\rightarrow 1$이면 $Min(T,\ D)$ 운용방침과 각각 동일하게 됨을 알 수 있다. 마지막으로, 만약 $T\rightarrow\infty$ 그리고 $T\rightarrow 0$이면 $Max(N,\ D)$ 그리고 $Min(N,\ D)$ 운용방침과 각각 동일하게 된다.

$Min(N,\ T,\ D)$ 운용방침에는 $Min(N,\ T)$, $Min(T,\ D)$와 $Min(N,\ D)$ 이변수 운용방침이 특수한 경우로 포함되어 있고(Rhee와 Oh[11]) 또한 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침에는 $Max(N,\ T)$, $Max(T,\ D)$와 $Max(N,\ D)$ 이변수 운용방침이 특수한 경우로 포함되어 있다(Rhee와 Oh[12]). 따라서 새로이 제안된 $Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침에는 $Min(N,\ T,\ D)$와 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침에 포함되어 있는 모든 이변수 운용방침을 특수한 경우로 포함하고 있기 때문에 가장 일반화된 삼변수 운용방침이라고 할 수 있다.

조정가능한 대기모형을 활용하기 위해서는 정해진 운용방침이 적용되었을 경우 기대되는 총비용을 가장 적게 하는 입력변수의 최적해를 결정해야 한다. 이러한 과정에는 여러 가지 시스템 특성치가 필요하지만 그 중 구하기 가장 어려운 특성치들 중 하나가 busy period의 기댓값이다. 여기에서 busy period는 server가 폐쇄되었던 서비스 창구를 재개한 다음 첫 고객에게 서비스 제공하기 시작한 순간부터 고객이 없어 서비스 창구가 다시 폐쇄될 때까지의 시간간격을 말한다. 일반적으로 확률변수의 기대값을 구하기 위해서는 확률밀도함수를 사용하여야 한다. 그러나 조정가능한 대기모형에 관련된 busy period의 확률밀도함수는 유도과정조차도 매우 복잡하고 어렵기 때문에 그것을 사용하여 기대값을 구하기는 거의 불가능하다고 볼 수 있다. 특히 D 운용방침이 포함되어 있는 경우 더욱 그러하다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4]). 이러한 문제를 해결하기 위해 Rhee[9]는 D 운용방침이 적용되는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 가상확률밀도함수라는 새로운 개념을 개발하여 보다 쉽게 busy period의 기대값을 유도할 수 있도록 하였다. 여기에서 가상확률밀도함수란 아래의 ***가상가정***을 만족하는 확률밀도함수를 뜻하지만 D 운용방침과 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침이 적용되는 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 실제 확률밀도함수와는 전혀 다른 형태로 표현되지만 일반적인 확률밀도함수와 동일하게 사용하여 정확한 busy period의 기대값을 보다 쉽게 얻을 수 있다(Rhee[9]).

- ***가상가정(Pseudo Assumption)*** : *조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 D 운용방침이 적용되면 busy period의 크기는 최소한 D 단위시간보다 크게 되지만, N 혹은 T 운용방침이 적용되는 경우처럼, busy period가 시작되는 순간 시스템에 도착해 있는 고객수만을 고려하여 busy period를 규명할 수 있도록, busy period가 시작되기 전에 도착한 고객들의 예상되는 서비스 시간에 부여되는 조건을 무시하여, busy period가 시작된 이후에 도착한 고객의 서비스시간과 동일하게 아무런 제약 조건이 없다고 가정한다.*

Rhee[9]는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침 즉 $Min(D,\ T)$, $Max(D,\ T)$, $Min(N,\ D)$, 그리고 $Max(N,\ D)$, 운용방침의 경우에서 가상확률밀도함수를 활용하여 busy period의 기대값을 유도하였다. 최근에는 Rhee and Oh[11, 12]는 위의 가상가정을 만족하는 가상확률밀도함수를 사용하여 조정가능한

$M/G/1$ 대기모형 삼변수 $Min(N,\ T,\ D)$와 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침의 경우에도 성공적으로 busy period의 기대값을 유도할 수 있음을 증명하였다. 따라서 새로이 제안된 $Med(N,\ T,\ D)$이 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period의 기대값을 가상확률밀도함수를 사용하여 유도하는 것을 연구 목적으로 설정한다. 또한 유도된 결과를 활용하여 모든 이변수 운용방침이 적용되었을 때의 busy periuod 기대값을 도출해냄으로서 제안된 $Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 가장 일반화된 삼변수 운용방침이라는 전제의 증명을 또 다른 연구목적으로 설정한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태 (steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형에 관하여 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객들은 단위시간당 평균이 λ인 포아손과정(Poisson process)에 따른다. 다시 말해, 연속된 두 고객의 평균 도착 시간간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$ 라고 하면, $n=0,1,2,\cdots$ 에 대해 $N(t)$의 확률질량함수는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 $H_n(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$H_n(T)=P[N(T)\ge n]=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호 독립이며 동일한 임의의 분포라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\bullet)$로 표시한다. 또한 $G^{(n)}(D)$를 다음과 같이 정의한다.

$$G^{(n)}(D)=\int_0^D\left[f_S(t)\right]^{*(n)}dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\bullet)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[8] or Conolly[3]).

$$E[B_o]=\frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

(iv) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다. 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 이변수 운용방침 $Min(N,\ T)$, $Min(T,\ D)$, $Min(N,\ D)$, $Max(N,\ T)$, $Max(T,\ D)$와 $Max(N,\ D)$이 적용되었을 때 busy period의 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$, $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Max(N,D)}]$라면 다음과 같이 주어진다(Rhee[9]).

$$E[B_{Min(N,T)}]\ =\ \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \tag{5}$$

$$E[B_{Min(N,D)}]\ =\ E[B_O]\sum_{n=0}^{N-1}G^{(n)}(D) \tag{6}$$

$$E[B_{Min(T,D)}]\ =\ \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)\ \ G^{(j-1)}(D) \tag{7}$$

$$E[B_{Max(N,T)}]\ =N\ E[B_o]+\frac{\lambda TE[B_o]}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \tag{8}$$

$$E[B_{Max(N,D)}]\ =\ E[B_o]\left\{N+\sum_{n=N}^{\infty}G^{(n)}(D)\right\} \tag{9}$$

$$E[B_{Max(T,D)}]\ =\ \frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}[H_n(T)+\{H_1(T)-H_{n+1}(T)\}G^{(n)}(D)] \tag{10}$$

4. *Med(N, T, D)* 운용방침을 위한 가상확률 밀도함수 유도

$Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 적용될 경우를 분석하기 위해, 이전의 busy period가 끝난 후 첫 $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때까지 고객이 한명도 시스템에 도착하지 않았으며 다음의 T 단위시간내 최소한 한명의 고객이 도착했다고 가정하자. 이전의 busy period가 끝난 후 (i) N 번째 고객이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후 도착하고 이때 까지 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 적거나,$(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전까지 도착한 고객의 수가 N명 보다 적

으나 기다리는 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 크며 이후 N 번째 고객이$(m+1)T$ 경과 이전에 도착한 경우, (ii) $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 N 번째 고객이 도착하고 또한 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 이후 처음으로 D 단위시간 보다 크거나, $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 이전 그리고 N명의 고객이 도착하기 이전에 도착한 모든 고객의 서비스 시간의 합이D보다 크고 N 번째 고객은 $(m+1)T$ 단위시간 경과 이후에 도착할 경우, (iii) $(m+1)T$ 단위시간 경과 이전에 N 번째 고객이 도착한 후 그리고 $(m+1)T$ 단위시간 경과 이전에 최초로 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 커지거나, $(m+1)T$ 단위시간 경과 이후 N 번째 고객이 도착하기 이전에 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 커지는 경우, 새로운 busy period가 시작된다. 다시 말해, 위의 (i)의 경우에는 새로운 busy period가 N 운용방침의 적용을 받으며, N번째 고객이 도착되는 순간 새로운 busy period가 시작된다. (ii)의 경우에는 이전의 busy period가 끝난 후 $(m+1)T$ 단위시간이 경과되는 순간 새로운 busy period가 T 운용방침의 적용을 받으며 시작된다. (iii)의 경우에는 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커지는 순간 새로운 busy period가 D 운용방침에 따라 시작됨을 알 수 있다. 이러한 여러 상황을 수식으로 표현하기위해 다음과 같은 확률을 정의한다.

(i) $P[TDN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 뒤에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 다음 N 번째 고객이 도착할 확률.

(ii) $P[DTN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 전에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 N 번째 고객이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 도착할 확률.

(iii) $P[NDT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, N 번째 고객이 도착한 다음, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률.

(iv) $P[DNT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤, N 번째 고객이 시스템에 도착하고, 그 후 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률.

(v) $P[NTD]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 N 번째 고객이 도착하고, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률.

(vi) $P[TND]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후, N 번째 고객이 도착하고, 그 후 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률.

위에서 정의된 각각의 확률을 수리적으로 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} P[TDN] = & \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)] \\ & \sum_{j=n+1}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ & -\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)] \\ & \sum_{j=N}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ & +[H_N(T)-H_{N+1}(T)] \\ & [G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P[DTN] = & \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)] \\ & \sum_{j=1}^{n}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ & -[H_N(T)-H_{N+1}(T)] \\ & [G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)] \end{aligned} \tag{12}$$

$$P[NDT] = \sum_{n=N}^{\infty} H_N(T)[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)] \tag{13}$$

$$P[DNT] = H_N(T)[G^{(0)}(D)-G^{(N-1)}(D)], \tag{14}$$

$$P[NTD] = \sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D), \tag{15}$$

$$P[TND] = [H_1(T)-H_N(T)]G^{(N-1)}(D), \tag{16}$$

$Med(N, T, D)$ 운용방침이 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용될 때, 새로운 busy period가 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침에 의해 시작될 확률을 각각 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$으로 나타낸다고 가정하면, 위 식 (11)부터 (16)까지 주어진 확률을 사용하면 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$는 아래와 같이 구해진다.

$$P[N]=P[NDT]+P[NTD] \quad (17)$$
$$=H_N(T)G^{(n-1)}(D),\ N\geqq 1$$

$$P[T]=P[TND]+P[TDN] \quad (18)$$
$$=\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D)$$
$$-[H_N(T)-H_{n+1}(T)]G^{(N)}(D),\ N\geqq 1$$

$$P[D]=P[DNT]+P[DTN] \quad (19)$$
$$=\sum_{n=1}^{N}H_n(T)[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)],$$
$$-H_N(T)[G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)],\ N\geqq 1$$

$Med(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 적용되는 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수를 $B_{Med(N,T,D)}$, 그리고 $B_{Med(N,T,D)}$의 가상확률밀도함수를 $pf(t)$라 정의하면, $pf(t)$는 $Med(N,\ T,\ D)$운용방침의 정의와 식 (17), 식 (18) 그리고 식 (19)에서 주어진 확률 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$를 사용하면 다음과 같이 유도된다. 단 $N\geqq 1$이다.

$$pf(t)=\sum_{m=0}^{\infty}e^{-m\lambda T}\Big\{f_{B_0}^{*(N)}(t)[H_N(T)G^{(0)}(D) \quad (20)$$
$$+H_1(T)G^{(n-1)}(D)-2H_N(T)G^{(n-1)}(D)]$$
$$+\sum_{n=1}^{N}f_{B_0}^{*(n)}(t)[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\ \bullet$$
$$[G^{(0)}(D)-G^{(n)}(D)]$$
$$-f_{B_0}^{*(N)}(t)[H_N(T)-H_{N+1}(T)]\ \bullet$$
$$[G^{(0)}(D)-G^{(N)}(D)]$$
$$+\sum_{n=N}^{\infty}f_{B_0}^{*(n)}(t)[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D)$$
$$+\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)\ \bullet$$
$$\sum_{j=n+1}^{N+1}f_{B_0}^{*(j)}(t)[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)]$$
$$-\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)\ \bullet$$
$$\sum_{j=N}^{N+1}f_{B_0}^{*(j)}(t)[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)]$$
$$+f_{B_0}^{*(N)}(t)[H_N(T)-H_{N+1}(T)]\ \bullet$$
$$[G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)]$$
$$+\sum_{n=N}^{\infty}f_{B_0}^{*(n)}(t)H_n(T)[G^{(n-1)}-G^{(n)}(D)]$$

여기에서 함수 $f_{B_0}(t)$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period, 즉 확률변수 B_o 확률밀도함수를 나타내며 $f_{B_o}^{*(n)}(t)$는 $f_{B_o}(t)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 나타낸다.

5. Busy Period의 기대값 유도

식 (20)에 포함된 가상확률밀도함수 $pf(t)$와 $f_{B_o}(t)$의 Laplace 변환을 각각 $\overline{pf}(s)$와 $\overline{f_{B_o}}(s)$라고 하자. 즉

$$\overline{pf}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}pf(t)\,dt \qquad \overline{f_{B_o}}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f_{B_o}(t)dt$$

식 (20)의 좌우변에 Laplace 변환을 취하면 아래와 같이 주어진다.

$$\overline{pf}(s)=\frac{1}{1-e^{-\lambda T}}\Big\{-[\overline{f_{B_0}}(s)]^N H_N(T)\ \bullet \quad (21)$$
$$[G^{(0)}(D)-G^{(N)}(D)]$$
$$+\sum_{n=1}^{N}[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\ \bullet$$
$$[G^{(0)}(D)-G^{(n)}(D)]$$
$$+\sum_{n=1}^{N}[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\ \bullet$$
$$\sum_{j=n+1}^{N+1}[\overline{f_{B_0}}(s)]^j[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)]$$
$$-\sum_{n=1}^{N}[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\ \bullet$$
$$\sum_{j=N}^{N+1}[\overline{f_{B_0}}(s)]^j[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)]+\sum_{n=1}^{N}$$
$$[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[H_n(T)G^{(n-1)}(D)-H_{n+1}(T)G^{(n)}(D)]$$
$$+[\overline{f_{B_0}}(s)]^N[H_1(T)-H_N(T)]G^{(N-1)}(D)$$
$$+[\overline{f_{B_0}}(s)]^N H_{N+1}(T)[G^{(0)}(D)-G^{(N-1)}(D)]\Big\}$$

$\frac{d}{ds}\overline{f_{B_o}}(s)|_{s=0}=-E[B_o]$가 성립하기 때문에 $B_{Med(N,T,D)}$의 기대값 $E[B_{Med(N,T,D)}]$는 식 (21)을 사용하여 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{Med}(N,\ T,\ D)]=-\frac{d}{ds}\overline{pf}(s)|_{s=0} \quad (22)$$
$$=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\Big\{\sum_{n=1}^{N}H_n(T)+\sum_{n=N}^{\infty}H_{n+1}(T)G^{(n)}(D)$$
$$+\sum_{n=1}^{N}[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)\Big\}$$

여기에서 $E[B_O]$는 일반적인 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다. 또한 식 (22)을 사용하면 다음의 관계식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\lim_{D\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,T)}]$$
$$\lim_{D\to 0} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,T)}]$$

$$\lim_{N\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(T,D)}]$$
$$\lim_{N\to 1} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(T,D)}]$$

$$\lim_{T\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,D)}]$$
$$\lim_{T\to 0} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,D)}]$$

여기에서 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Max(N,D)}]$는 $Min(N, T)$, $Min(T, D)$ $Min(N, D)$, $Max(N, T)$, $Max(T, D)$ 그리고 $Max(N, D)$ 운용방침이 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때의 busy period의 기대값을 뜻하며 식 (5)부터 (10)에서 주어진다. 이는 유도된 삼변수 $Med(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 때의 busy period의 기댓값이 정확하게 유도되었음을 의미한다. 다시 말해, 가상확률밀도함수를 $Med(N, T, D)$ 삼변수 운용방침에 적용하더라도 busy period의 기대값을 정확하게 유도할 수 있음을 확인하였다. 또한 삼변수 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 모든 단순 그리고 이변수 운용방침들의 가장 일반적인 형태이기 때문에 보다 광범위한 영역에 적용할 수 있음을 확인하였다.

6. 결 론

새로운 형태의 삼변수 운용방침 $Med(N, T, D)$이 적용되는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 가상확률밀도함수를 사용하여 성공적으로 유도되었다. 또한 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 기존의 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침 보다 더 일반화된 형태임이 증명되었다. 본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 D 운용방침이 포함된 어떠한 형태의 운용방침이 적용되더라도 가상확률밀도함수를 활용하면 쉽게 busy period의 기대값이 유도됨을 확인하였다. 삼변수 운용방침은 이변수 혹은 단순 운용방침의 일반화된 형태이기 때문에 삼변수의 운용방침에 따른 특성치가 유도되면 특수한 경우로 나타나는 이변수 운용방침의 특성치를 도출할 수 있지만 실제 어떠한 형태로 결합되어 있는지는 아직 미지의 문제로 남아 있다. 따라서 복잡한 형태로 나타나는 삼변수 운용방침의 특성치를 다른 각도에서 이변수 혹은 단순 운용방침의 특성치들이 어떠한 형태로 결합되어 있는지를 분석하여 더 많은 정보를 얻는 것이 앞으로 수행되어야 할 또 하나의 과제로 제시한다.

참고문헌

[1] K. R. Balachandran and H. Tijms; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] P. H. Brill and C. M. Harris; "Waiting Timrs for M/G/1 Queues with Service Time or Delay-Dependent Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 39 : 775-787, 1992.

[3] B. Conolly; Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY, 1975.

[4] K. G. Gakis, H. K. Rhee and B. D. Sivazlian; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[5] D. Heyman; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[6] O. Kella and U. Yechiali; "Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 35 : 23-34, 1998.

[7] O. Kella; "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[8] L. Kleinrock; Queueing Systems, Theory, John Wiley and Sons, New York, NY, 1 : 1975.

[9] H. K. Rhee; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies: Concepts and Application to the Dyadic Policies," *대한산업공학회지*, 23(4) : 729-739, 1997.

[10] H. K. Rhee; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침(Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교 논문집, 32 : 141-153, 2002.

[11] H. K Rhee and H. S. Oh; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[12] H. K. Rhee and H. S. Oh; "가상확률밀도함수를 사용하여 Max(N, T, D) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 31(4) : 86-92, 2008.

[13] H. K. Rhee and B. D. Sivazlian; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[14] B. D. Sivazlian and S. N. Iyer; "A Dyadic Age-Replacement Policy for a Periodically Inspected Equipment Items Subject to Random Deterioration," *European Journal of Operational Research*, 6 : 315-320, 1981.

[15] J. Teghem; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[16] M. Yadin and P. Naor; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963.