

Mean-Variance

김 태 영[†]

동양공업전문대학 경영학부

The Optimal Mean-Variance Portfolio Formulation by Mathematical Planning

Tai-Young Kim[†]

Department of Business Management, Dongyang Technical College

The traditional portfolio optimization problem is to find an investment plan for securities with reasonable trade-off between the rate of return and the risk. The seminal work in this field is the mean-variance model by Markowitz, which is a quadratic programming problem. Since it is now computationally practical to solve the model, a number of alternative models to overcome this complexity have been proposed.

In this paper, among the alternatives, we focus on the Mean Absolute Deviation (MAD) model. More specifically, we developed an algorithm to obtain an optimal portfolio from the MAD model. We showed mathematically that the algorithm can solve the problem to optimality. We tested it using the real data from the Korean Stock Market. The results coincide with our expectation that the method can solve a variety of problems in a reasonable computational time.

Keywords : Portfolio Investment, Financial Engineering, Integer Programming, MAD

1. 서 론

투자란 미래의 수익을 위한 현재의 경제적인 희생이라고 말할 수 있다. 그러나 여기서 중요한 것은 현재의 경제적 희생은 확실한 것이지만 미래의 수익은 아무도 확신할 수 없다는 점이다. 따라서 투자란 확실한 현재의 소비를 희생하여 이에 대한 보상으로 불확실한 미래의 수익을 바라는 행위이다. 특히나 주식과 같은 위험자산에 투자했을 때의 보상은 다른 어떤 보상들보다 미래의 불확실성으로 인하여 그 위험에 대하여 더욱더 적절한 보상을 요구할 것이다. 이때의 보상은 위험이 없는 투자에 대한 보상보다 많아야 할 것이며 그 보상정도는 투자대상의 위험 정도에 따라 달라질 것이다. 투자자가 어

떤 투자 안을 평가할 때에는 그 투자로부터 예상되는 수익과 투자에 따른 위험의 관점에서 평가한다. 위험이 적은 투자대상은 기대수익률이 낮으며, 반대로 기대수익률을 높이기 위해서는 위험을 추가로 떠맡아야 하는 상충관계(risk-return trade-off)가 존재한다. 그러므로 투자자 입장에서 가능하면 주어진 위험 하에서 기대수익이 높은 또는 주어진 기대수익 하에서 위험이 적은 효율적인 투자대상을 찾고자 할 것이다.

투자자들은 이러한 목적을 이루기 위해서 하나의 자산이 아닌 여러 개의 자산, 즉 포트폴리오(portfolio)를 구성하여 투자를 하기 때문에 개별자산의 기대수익과 위험의 관계보다는 포트폴리오 전체의 위험과 기대수익의 관계가 중요한 관심사가 된다. 전통적인 포트폴리오 최적화

문제는 수익률과 위험률이 합리적으로 균형을 이루는 투자 계획안을 찾아내는 문제이다. 이 분야 연구의 시초인 Markowitz[10]의 Mean-Variance 모형은 위험률을 최소화시키면서 지정된 평균 수익률을 보장해 주는 포트폴리오를 찾기 위한 단일기간의 정적모형이다. Markowitz의 연구 이후, 같은 문제에 대하여 Speranza[15], Mansini and Speranza [8, 9], Mansini[7]와 같은 수많은 대안 모형들이 제시되어 왔다. 이러한 대안 모형들의 주요 목적은 원 문제인 이차수리계획법(quadratic programming) 모형이 풀기에 너무 복잡하다는 단점을 해결하기 위한 것이며, 그 대표적인 모형들로는 구역별 선형 근사화(piecewise linear approximation), 평균절대편차(MAD : mean absolute deviation), 가중 목표계획법(weighted goal programming), 최소최대(MM : minimax) 모형들을 들 수 있다.

본 논문에서는 여러 포트폴리오 모형 중 MAD 모형에 대하여 다룰 것이다. MAD 모형은 Konno와 Yamazaki [6]가 분산 대신 절대편차를 이용하여 위험함수를 표현한 선형계획법 모형이며, Speranza[15, 16]가 보다 유연한 형태로 정리하여 제시하였다. 이 모형은 최적의 포트폴리오 해를 제시하지만 계산상의 어려움이 있다. 때문에 Mansini와 Speranza[9]의 연구에서는 휴리스틱 알고리즘을 제안하여 풀이하고 그 효용성을 평가하였다. Kim et al.[5]은 MAD 모형을 개선하여 최적해를 도출해 낼 수 있는 한계값들(bounds)을 활용한 알고리즘을 제안하였으며, 제안 알고리즘이 최적해를 보장해 줄 수 있음을 수리적으로 증명하였다.

포트폴리오 최적화 모형에 대한 최근 연구로는 Ballestero et al.[2]는 제한된 불확실성하에서의 다기준 해법을 제안하였고, 프랑크푸르트와 빈에서의 주식시장에서의 데이터를 이용하여 이를 검증한 것을 들 수 있다. 또한 Cenci와 Filippini[3]는 이중 기대 효용을 통하여 선형으로 접근하는 포트폴리오 해법을 제안하였다. Guastaroba et al.[4]는 그동안 진행된 Mansini[7], Mansini와 Speranza [8, 9], Speranza [15, 16] 등의 연구를 확장하여 단일시점에서의 최적 포트폴리오 해법에 대하여 다각도의 검증을 실시하였다. Miller와 Rusczyński[11]는 일관된 척도로 위험을 다루면서 확률적으로 위험을 고려하고 있는 새로운 포트폴리오 해법을 제안하였다. Rockafellar et al.[12]는 분할된 척도의 포트폴리오 투자에 대하여 연구하였다. Soleimani et al. [12]는 Markowitz[10]의 연구를 기반으로 하여 최소의 거래로트 크기 설정을 갖는 포트폴리오 선택 해법을 유전 알고리즘을 이용하여 풀었다.

포트폴리오 최적화 모형은 그 대상이 되는 실제문제가 매우 크기 때문에 최적해를 구하는 것이 실질적으로 불가능하다. 이러한 경우 최적화 모형을 이용해서 효율적인 포트폴리오를 제시하는 해법이 필요하다. 본 연구

에서는 투자자들의 효율적 포트폴리오 선택을 위하여 포트폴리오 최적화 모형들 가운데 수리 계획을 이용한 몇 가지 모형들을 제시하고자 한다. 그리고 이렇게 제시된 각 모형을 바탕으로 최적의 포트폴리오를 구성한 다음 우리나라 상장주식의 수익률 자료를 이용하여 이들의 성과를 비교 분석해보고 어떤 모형이 우리나라의 주식 시장을 대상으로 했을 때 가장 적합한 모델이 될 것인가를 도출해 보고자 한다. 또한 이렇듯 실험을 통하여 얻어낸 결과들을 바탕으로 투자자들에게 증권시장에서 효율적인 포트폴리오 선택을 쉽게 할 수 있도록 도와주는 한편 높은 수익을 보장하는 것을 목표로 한다.

2. 수리 모형

투자자는 현재의 투자에 대한 위험률이 과거에 대한 위험률보다 점점 적어지기를 바란다. 따라서 이 연구에서 이러한 투자자의 요구가 반영될 수 있는 포트폴리오 모형이 필요하다. 많은 불확실성이 존재하는 주식시장에서 우리가 투자 종목을 선택하는 것과 같은 의사 결정을 함에 있어 수많은 대안들 중에서 최상의 결과를 가져오는 대안을 선택을 한다는 것이 얼마나 어렵고 힘든 일인지 투자자들은 인지하고 있다. 따라서 이러한 주식 시장에는 항상 위험이 따른다. 그러나 체계적 위험과 비 체계적 위험으로 나눌 수 있는 주식투자에 있어서, 특히 비체계적 위험은 투자로 인한 수익과 이상적인 절충을 얻기 위해 구성하는 포트폴리오를 통한 분산투자를 함으로써 낮출 수 있다. 따라서 이러한 경우 위험을 분산시키기 위해 어떻게 포트폴리오를 구성하는가가 투자자의 지대한 관심을 끌게 된다.

본 논문은 Speranza[16]가 정리한 포트폴리오 모형과 Kim et al.[5]이 제안한 알고리즘을 바탕으로, 두 가지 서로 다른 관점에서 기존 연구들이 미처 고려하지 못했던 부분을 개선한 개선된 모형을 제안하고자 한다. 그 중 한 가지는 투자비용에 대한 제한 비율을 갖도록 하는 모형을 통하여 주식 종목별로 포트폴리오 투자를 하도록 유도하는 것이며, 기존의 연구에서는 고려되지 않았던 것으로 이를 통해 포트폴리오 분산 투자가 강제성을 갖도록할 수 있다. 또한 두 번째 제안하는 위험률 하향 투자모형은, 각각의 주식 투자 시점별로 되도록 위험률이 적어지는 방향으로 투자를 하도록 유도함으로써, 학습효과를 반영한 보다 현명한 투자가 가능하도록 하는 모형이다.

2.1 투자비용 제한 비율 모형

본 논문에서 제안하는 개선된 첫 번째 MAD 모형은, 현

재 투자량의 상한과 하한으로 된 한계값을 단위 주식 당 투자비용의 제한 비율로 하여 포트폴리오의 의미를 더욱 강화시킨 것이다.

수리 모형에 사용되는 기호는 다음과 같다.

[첨자(indices)]

- j : 투자 가능한 주식을 나타내는 첨자
($j = 1, 2, \dots, J$),
- t : 단위기간을 나타내는 첨자 ($t = 1, 2, \dots, T$).

[모수(parameters)]

- r_{jt} : t 시점에서 관찰된 주식 j 의 수익률,
- r_j : 주식 j 의 평균 수익률, 즉, $r_j = \sum_{t=1}^T r_{jt} / T$,
- C_L, C_U : 투자 가능한 금액의 하한 및 상한,
- p_j : 주식 j 의 단위 구매비용,
- d_j : 주식 j 의 거래비용 비율,
- l_j, u_j : 포트폴리오 구성에 필요한 주식 j 의 최소 투자량 및 최대 투자량,
- ρ : 요구 수익률,
- α : 단위 주식당 투자 상한 비율.

[결정 변수(decision variables)]

- x_j : 포트폴리오에 포함되는 주식 j 의 투자량,
- y_t : 기간 t 에서 평균 수익률에 미치지 못하는 수익률로 인한 위험부담.

제안하는 MAD 모형은 다음과 같다.

MAD1 :

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z = \sum_{t=1}^T y_t / T & (1) \\
 \text{s.t.} \quad & -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, & (2) \\
 & \sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, & (3) \\
 & \sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, & (4) \\
 & \sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, & (5) \\
 & \frac{(1 + d_j) p_j x_j}{\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j} \leq \alpha, & (6) \\
 & y_t \geq 0, \forall t. & (7) \\
 & x_j \text{ integer}, \forall j, & (8)
 \end{aligned}$$

본 논문에서는 위에서 언급한 첫 번째 MAD 모형을 MAD1라고 명명하기로 한다. 일반적인 포트폴리오 최적화모형의 위험함수를 나타내는 목적식을 포트폴리오에 포함되는 주식 j 의 투자량 x_j 을 이용하여 표현하면, 특정 시점의 수익률과 평균 수익률 값들의 합으로 위험을 측정할 수 있으므로, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 R(x_1, \dots, x_j) & : \text{위험함수식} \\
 & = \frac{\sum_{t=1}^T \min\{0, \sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) x_j\}}{T} \\
 & = \frac{\sum_{t=1}^T -\min\{0, \sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) x_j\}}{T}
 \end{aligned}$$

이 경우 목적식이 선형이 아니므로 분석하기 용이하지 않다. 이를 기간 t 에서 평균 수익률에 미치지 못하는 수익률로 인한 위험부담 y_t 를 정의하여 새로운 변수로 도입하고, 변수 y_t 에 대한 제약식을 도입하면 목적식을 선형으로 변형하는 것이 가능하다. 변수 $y_t, t=1, \dots, T$ 를 도입하면 목적식은 식 (1)과 같이 바뀌게 되고, 이 때 식 (2)와 식 (7)은 원문제의 목적함수식을 선형으로 변환하는 과정에 필요한 제약식으로 함께 추가되어야 한다. 여기서 비용요소를 고려해 주기 위하여, 제약식 (2)에는 주식 j 의 단위당 구매비용 p_j 가 추가된다. 즉, 제약식 (2)는 새로 정의한 변수 y_t 에 의하여 목적식을 다시 쓰면서 x_j 와 y_t 의 관계에 대한 식으로 추가된 것이며, 제약식 (7)에 의해 변수 y_t 가 비음 조건을 만족하여야 하는 경우 제약식 (2)와 같이 $-\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j$ 는 y_t 보다 작아야 한다. 이렇게 위험율에 대한 새로운 변수와 제약식을 추가함으로써 목적식을 선형화하는 부분은 이동원[1]의 연구에서 사용된 목적식의 선형화 과정과 동일하며, Kim et al.[5]의 연구에서도 같은 방식으로 목적식을 선형화하고 위의 식 (2), 식 (7)과 같은 제약식을 추가하고 있다. 제약식 (3)과 (4)는 전체 투자금액의 범위를 제한하고, 제약식 (5)는 선정된 포트폴리오의 기대 수익률이 요구 수익률보다 커야 함을 나타내는 제약이다. 제약식 (6)은 포트폴리오에 포함되는 각각의 주식에 대한 최소와 최대 투자량을 표현한 식이다. 이 때 제약식 (6)에 의하여 각 종목별로 투자비용 비율이 α 를 넘길 수 없으므로, 특정 종목에 대한 쏠림 현상을 미리 방지할 수 있다. 하지만 각 종목별 투자비용의 상한인 α 를 지나치게 작은 값으로 설정할 경우, 지나치게 작은 단위로 투자비용을 분산

투자가 이루어지므로 이 때에는 포트폴리오의 최적화에 부정적인 상황이 초래될 수도 있다. 따라서 제약식 (6)의 α 값을 지나치게 작은 값으로 설정하지 않아야 한다. 목적함수는 전체 기간 기준의 평균 위험율을 최소화하는 것이다.

2.2 위험율 하향 투자 모형

본 논문에서 제안하는 개선된 두 번째 MAD 모형은, 포트폴리오 투자를 진행하면서 뒷시점으로 갈수록 위험율을 낮추어 투자하도록 하는 것이다. 본 논문에서는 이를 MAD2 모형이라고 부르기로 한다.

MAD2 모형에 사용되는 기호는 앞의 MAD1 모형과 동일하다. 제안하는 MAD2 모형은 다음과 같다.

MAD2 :

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \quad (5)$$

$$y_{t-1} \geq y_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (9)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad (10)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

$$x_j \text{ integer}, \quad \forall j, \quad (8)$$

여기에서는 차기 시점($t+1$)의 위험율이 그 이전 시점(t)의 위험율보다 적어야 한다는 제약 조건을 수식으로 표현한 (9)번 식이 추가되었다. 이 제약식을 추가함으로써 언제나 그 이전 시점보다는 다음 시점에서 위험율이 보다 더 적은 방향으로 투자하게 되고, 이는 직전 시기의 투자 위험과 실패를 경험 삼아 그 다음 시기에는 위험을 되도록 피하는 투자 학습 효과를 수리 모형에 반영한 것이다. 목적함수 (1)은 전체 기간 기준의 평균 위험율을 최소화하는 위험율 총합에 대한 식이며, 제약식 (9)는 다음 기수에는 이전 기수보다 적은 위험율이 발생하도록 강제하는 식이므로, 제약식 (9)에 의하여 다음 기수에는 위험율이 적은 방향으로 투자가 이루어지되 목적 식 (1)에 의하여 위험율의 총합이 최소화되도록 할 수 의사결정이 이루어진다.

3. 해 법

MAD 모형에 대한 가장 최근의 연구 성과는 Kim et al. [5]의 논문이다. 여기에서는 기존의 Mansini and Speranza[9]의 연구에서 휴리스틱 기법으로 풀이할 때 최적해를 보장하지 못한다는 문제를 해결하여, MAD 모형을 개선하여 최적해를 도출해 낼 수 있는 한계값들(bounds)을 활용한 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 MAD1과 MAD2 모형의 최적값을 구하기 위하여, Kim et al.[5]의 논문의 해법을 활용한다.

3.1 선형 모형 이완화

MAD1 모형의 제약식 (3)과 제약식 (4)를 제거하고 선형 문제로 수정하는 제약식 (11)을 추가한 선형모형을 LP1이라고 하고, 마찬가지로 MAD1 모형을 수정한 선형모형을 LP2라고 하자.

LP1 :

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j = M, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \quad (5)$$

$$\frac{(1 + d_j) p_j x_j}{\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j} \leq \alpha, \quad (6)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

$$x_j \text{ integer}, \quad \forall j, \quad (8)$$

LP2 :

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j = M, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \quad (5)$$

$$y_{t-1} \geq y_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (9)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad (10)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

$$x_j \text{ integer}, \quad \forall j, \quad (8)$$

본 논문에서 제시한 모형을 분석하면, 다음과 같은 성

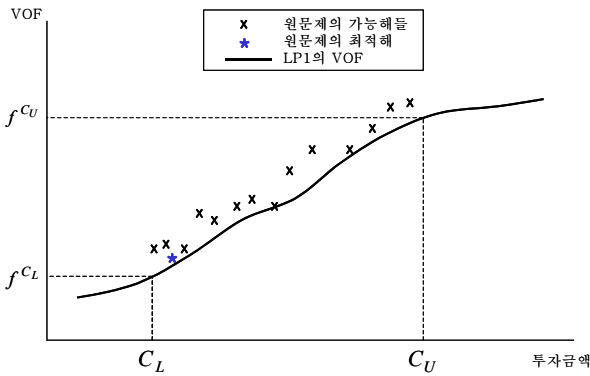
질 1. 성질 2를 도출할 수 있다. 증명과정은 Kim et al.[5]을 따른다.

성질 1 : f^{C_L} 을 $M=C_L$ 인 경우의 LP1과 LP2의 최적 목적함수 값(VOF : value of the optimal objective function) 이라고 하고 f^{C_U} 를 $M=C_U$ 인 경우의 LP1과 LP2의 VOF라고 하자. 각각의 최적해가 존재한다면,

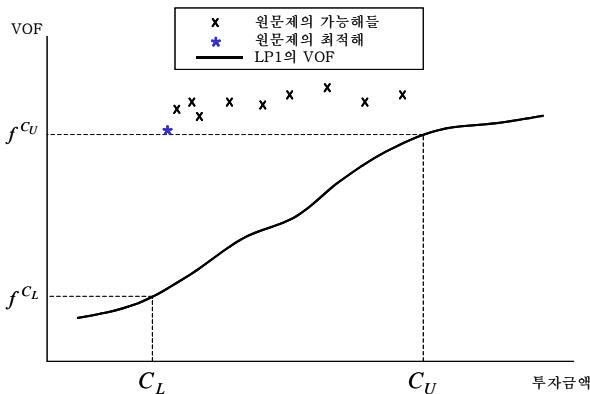
- (i) $f^{C_L} \leq f^{C_U}$,
- (ii) $f^{C_L} \leq Z^*$ 이다. 이때, Z^* 는 MAD의 VOF이다.

성질 2 : $f^{C_L} \leq f^{C_U} \leq Z^*$ 인 경우가 존재한다.

일반적으로는 $f^{C_L} \leq Z^* \leq f^{C_U}$ 인 경우가 대부분이지만, 이론적으로는 $f^{C_L} \leq f^{C_U} \leq Z^*$ 인 경우가 발생할 수 있다.



<그림 1> 가능해들이 (f^{C_U} , f^{C_L}) 내에 존재



<그림 2> 가능해들이 (f^{C_U} , f^{C_L}) 외부에 존재

<그림 1>과 <그림 2>는 위 두 가지의 경우를 각각 나타내고 있다. <그림 1>은 일반적인 경우 즉, $f^{C_L} \leq Z^* \leq f^{C_U}$ 인 경우 (Us-case)를 나타내고, <그림 2>는 예외적인

경우 (Ex-case) 인 $f^{C_L} \leq f^{C_U} \leq Z^*$ 를 나타낸다.

본 논문의 실험에서는 Ex-case가 단 한 번도 발생하지 않았다. 성질 2에서 언급하였듯이, 두 경우 모두에서 f^{C_L} 은 MAD의 최적해를 도출해 내는데 유효한 하한 한계값(lower bound)이 된다.

3.2 가능해 여부 판별

MAD1과 MAD2의 최적해 산출에 소요되는 시간을 줄이기 위해서는 주어진 모형이 위의 두 가지 경우 중 어디에 해당되는 지 확인하는 것이 필요하다. 이는 다음과 같은 가능해 여부 문제 (FP : feasibility problem)를 풀어 판별할 수 있다. MAD1의 가능해 여부를 판별하는 모형을 FP1이라고 하며, 다음과 같다.

FP1 :

$$\text{Min } C \tag{12}$$

$$\text{s. t. } -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, \tag{3}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \tag{5}$$

$$\frac{(1 + d_j) p_j x_j}{\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j} \leq \alpha, \tag{6}$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \geq f^{C_L} \tag{13}$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \leq f^{C_U}, \tag{14}$$

$$y_t \geq 0, \forall t. \tag{7}$$

$$x_j \text{ integer}, \forall j, \tag{8}$$

위에서 C 는 임의의 상수이다. 실제 CPLEX와 같은 상업용 솔버(solver)를 이용하여 문제를 풀 때에는 식 (13)과 식 (14)를 일반 제약식으로 입력하지 않고, 상한과 하한 한계값(upper and lower bound)으로 입력한다. FP를 풀게 되면, 최적해가 도출되거나, 아니면 실행가능해가 없는 경우가 된다. $f^{C_L} \leq Z^* \leq f^{C_U}$ 이면, (f^{C_L} , f^{C_U}) 구간 내에서 VOF를 갖는 적어도 하나 이상의 MAD1의 실행가능해가 존재하게 되며, FP1은 이러한 해들 중 하나를 FP1

의 최적해로 생성하게 된다(이러한 1>). 반면에, $f^{C_L} \leq f^{C_U} \leq Z^*$ (이러한 2>)이거나 MAD1의 실행가능해가 존재하지 않는다면, FP1은 (f^{C_L}, f^{C_U}) 구간 내에서 실행가능해를 찾을 수 없게 되며, 결과적으로 FP1의 가능해는 존재하지 않게 된다. 두 가지 모든 경우하에 있어서, FP1의 목적함수는 상수이기 때문에 매우 빠른 시간 내에 FP1을 풀 수 있다. FP1의 가능해가 존재한다면, FP1를 통해서 생성된 VOF는 OP의 유효한 상한 한계값이 된다.

성질 3 : 식 (14)가 없는 경우의 FP1에서 가능해가 존재하지 않는다면, MAD1의 가능해 또한 존재하지 않는다. 반면에, 식 (14)가 없는 경우의 FP1에서 가능해가 존재한다면, 그 가능해를 통해서 얻어지는 VOF는 MAD1의 상한 한계값이 된다.

성질 3의 증명과정은 Kim et al.[5]을 따른다. MAD2의 가능해 여부 문제를 FP2라고 하며, 그 모형은 다음과 같다.

FP2 :

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \quad (5)$$

$$y_{t-1} \geq y_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \geq f^{C_L}, \quad (13)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \leq f^{C_U}, \quad (14)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad (10)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

$$x_j \text{ integer}, \quad \forall j, \quad (8)$$

FP2에서도 성질 3이 성립한다. 본 연구에서 제안하는 알고리즘은 우선 주어진 문제가 위 두 가지 경우(Us-case와 Ex-case) 중 어디에 해당되는 지를 판별하고, 이후 그 결과를 토대로, 한계값들을 생성하게 된다. 수치실험을 통해서 볼 수 있듯이, 이러한 한계값들은 매우 계산시간을 줄이는데 매우 효과적임을 알 수 있다.

3.3 알고리즘

단계 1 : LP1을 풀어서 f^{C_L} 과 f^{C_U} 를 구한다.

단계 2 : 아래 단계와 같이 가능해 여부를 확인하고 한계값들을 산출한다.

단계 2-1 : $f^{C_L} \leq Z^* \leq f^{C_U}$ 인지를 확인하기 위해서 FP1를 푼다. FP1에서 가능해가 존재하지 않는다면, 단계 2~3으로 간다.

단계 2-2 : FP1의 해를 이용하여 $\sum_{t=1}^T y_t / T$ 을 계산하고,

$$\nu \leftarrow \sum_{t=1}^T y_t / T, \quad \lambda \leftarrow f^{C_L} \text{로 설정한다. 이후, 단계 3으로 간다.}$$

단계 2-3 : 제약식 (14)가 없는 경우의 FP1을 푼다.

- i) 가능해가 존재한다면, 산출된 해를 이용하여 $\sum_{t=1}^T y_t / T$ 을 계산하고, $\nu \leftarrow \sum_{t=1}^T y_t / T, \quad \lambda \leftarrow f^{C_U}$ 로 설정한다.
- ii) 가능해가 존재하지 않는다면, 이 경우는 OP 또한 가능해가 존재하지 않기 때문에 알고리즘을 종료한다.

단계 3 : λ 와 ν 를 이용하여 다음과 같은 수정된 문제(MP : modified problem)를 구성한다.

MP1 :

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \quad (5)$$

$$\frac{(1 + d_j) p_j x_j}{\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j} \leq \alpha, \quad (6)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \geq \lambda, \quad (15)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \leq \nu, \quad (16)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

$$x_j \text{ integer}, \quad \forall j, \quad (8)$$

단계 4 : MP를 푼다. 산출된 해는 원 포트폴리오 문제의 최적해이다.

단계 2-1과 2-2는 Us-case일 때의 한계값을 산출하는 부분이고, 단계 2-3은 Ex-case일 때의 한계값을 산출하는 부분이다. 단계 3에서는 산출된 한계값들을 이용하여 MP를 구성한다. 얻어진 한계값들은 OP의 최적해를 구하는 데에 있어서 valid 값들이기 때문에, 이를 이용하여 OP의 최적해를 효율적으로 구할 수 있다. 이 때의 하한과 상한 한계값들간의 간격(gap)은 계산시간을 확실하게 감소시킬 수 있을 만큼 충분히 작으며, 따라서 이들 한계값들을 이용하는 제안 알고리즘을 이용하면 다른 방법으로는 풀 수 없었던 복잡한 문제들을 보다 용이하게 풀 수 있다.

MAD2 모형의 경우에도 위와 동일한 방법으로 문제를 풀게 되며, 이때에는 알고리즘에 MP2를 적용하게 된다.

MP2 :

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^T y_t / T \tag{1}$$

$$\text{s.t. } -\sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j) p_j x_j \leq y_t, \forall t, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \geq C_L, \tag{3}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j) p_j x_j \leq C_U, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} [(r_j - \rho - \rho d_j) p_j x_j] \geq 0, \tag{5}$$

$$y_{t-1} \geq y_t, t = 2, 3, \dots, T, \tag{9}$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \geq \lambda, \tag{15}$$

$$\sum_{t=1}^T y_t / T \leq \nu, \tag{16}$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \tag{10}$$

$$y_t \geq 0, \forall t. \tag{7}$$

$$x_j \text{ integer}, \forall j, \tag{8}$$

4. 수치예제

위에서 제시한 모형과 알고리즘을 검증하기 위하여, 실제 주식 데이터를 활용한 수치예제를 생성하여 실험을 실시하였다. 실험에 사용된 입력값과 예제는 다음과 같다.

- 기간 및 종목 수 : 1998년 7월~2000년 6월까지 36개월 동안 국내 증권거래소에서 거래되었던 주식 100 종목을 대상으로 함.
- 요구수익률 ρ : 가능한 한 국내 금융시장의 이율을 반영할 수 있도록 각각 0.25%, 0.5%, 0.75%, 1.00%, 1.25%, 1.5%의 범위에서 실험을 수행.
- 투자하한을 10, 20, 30(백만 원)으로 설정하고 투자하한(C_L)과 투자 상한(C_U)의 차이를 전체 주식 종목 중 가장 고가의 주식에 대한 단위거래 비용보다 크도록 1(백만원)으로 선정하여 투자범위를 결정.
- 이러한 입력값을 활용하여 18개의 서로 다른 실험 예제를 생성.

방대한 실제 주식 데이터를 효과적으로 처리하기 위하여 MS SQL Server 2000으로 프로그래밍 하였으며, 2GB 메모리와 펜티엄 IV(3.2GHz) 프로세서를 장착하고 Windows XP에서 구동되는 개인용 컴퓨터에서 실험을 수행하였다.

그리고 최적화 모형 및 본 논문에서 제안한 수리 모형의 해를 구하기 위해서 CPLEX 9.0을 이용하여 계산하였다. CPLEX를 이용하여 혼합정수계획법의 최적해를 도출하는데 있어서 허용오차(tolerance)에 관한 파라미터인 MIPgap을 10^{-6} 으로 설정하였다.

4.1 투자비용 제한 비율 모형의 검증

투자비용을 제한하는 비율을 이용한 모형을 검증하였다. MP1 모형에서 식 (6)의 α 값은 0.0에서 0.5까지 증가시키면서 실험하였다.

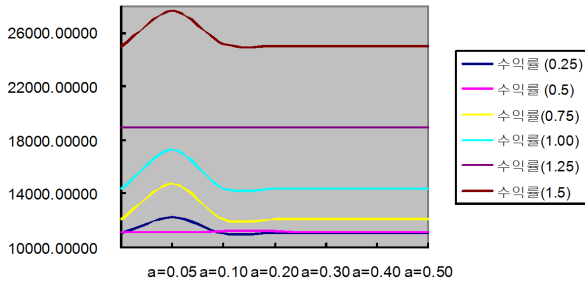
<표 1>은 투자 제한 비율을 높임에 따라 위험율이 변화하는 것을 분석한 것이다. 여기에서는 요구 수익률이 클수록 위험율이 증가하는 것을 확인할 수 있다.

<표 1> 투자비용 제한 비율과 요구 수익율에 따른 위험율

투자 제한 비율	요구 수익율					
	0.25	0.5	0.75	1.00	1.25	1.5
0.00	11008	11103	12089	14378	18912	24974
0.05	12223	11103	14691	17270	18912	27594
0.10	11018	1163	12089	14432	18912	25188
0.20	11008	1163	12089	14382	18912	24974
0.30	11008	11103	12089	14378	18912	24974
0.40	11008	11103	12089	14378	18912	24974
0.50	11008	11103	12089	14378	18912	24974

실험 결과를 그래프로 나타낸 <그림 3>을 통하여 투자비용 제한 비율에 따라 위험율의 변화하는 모습을 분

석해 볼 수 있다.



<그림 3> 투자비용 제한 비율과 요구 수익율에 따른 위험율 그래프

투자비용 제한 비율인 α 값이 0.05에서 0.10 사이에 있을 때 위험율이 커졌다가, α 값이 0.20보다 커지고 투자비용 제한 비율이 적어질수록 차츰 일정해 지는 것을 알 수 있다.

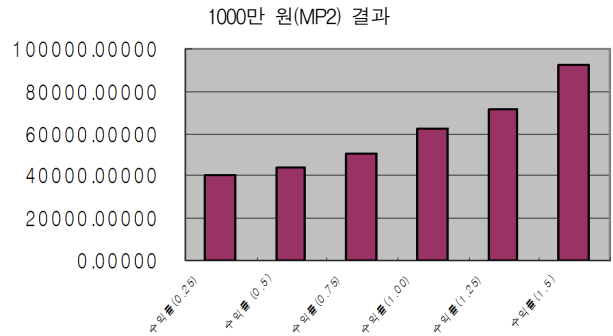
4.2 위험율 하향 투자 모형의 검증

위험율 하향 투자 모형을 수치예제를 통하여 검증하였다. <표 2>의 결과를 보면, 예산이 늘어남에 따라 위험율이 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 이 모형의 결과는 <표 1>의 결과에 비해 위험율이 훨씬 크다. 이는 수리모형에서 시간이 흐르면서 위험율이 적어지는 방향으로 투자하도록 제한하고 있기 때문에, 투자의 다양성이 제한되어 오히려 전체적으로 위험율이 상승한 것으로 분석된다.

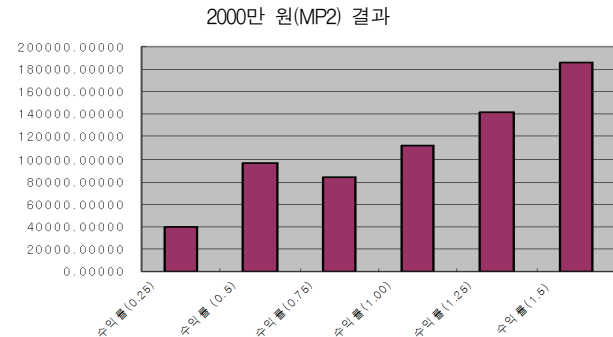
<표 2> 예산 제약 하에서의 요구 수익율에 따른 위험률

예산 제약	요구 수익율					
	0.25	0.5	0.75	1.00	1.25	1.5
1000만 (MAD2)	36651	39873	46075	56358	71102	92951
1000만 (MP2)	40420	43922	50782	62018	71193	93040
2000만 (MAD2)	73252	79676	92034	112524	142096	185517
2000만 (MP2)	40420	96557	83726	112524	142097	185517
3000만 (MAD2)	109844	119478	138004	168589	213048	278244
3000만 (MP2)	113423	119480	138004	168588	213048	278247

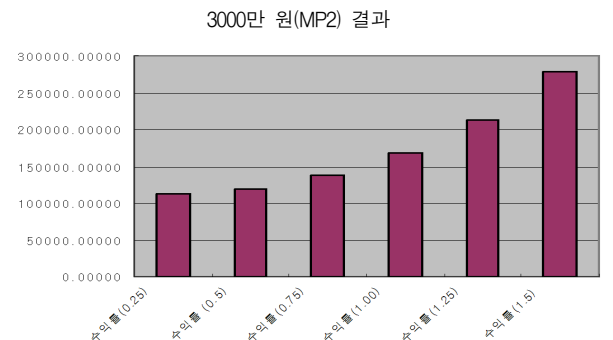
<그림 4>~<그림 6>에서는 예산 제약별로 요구 수익률에 따른 위험율 결과를 그래프로 표현하였다. 예산 제약이 1000만 원일 때의 실험 결과를 도시한 <그림 4>를 통하여 수익률이 높아질수록 위험율이 상승하는 것을



<그림 4> 예산 제약 1000만 원에서의 요구 수익율에 따른 위험율 그래프



<그림 5> 예산 제약 2000만원에서의 요구 수익율에 따른 위험율 그래프



<그림 6> 예산 제약 3000만원에서의 요구 수익율에 따른 위험율 그래프

볼 수 있다. 이러한 현상은 예산 제약을 2000만 원으로 높였을 때의 결과인 <그림 5>와 예산 제약이 3000만원으로 증가시켰을 때의 결과인 <그림 6>에서도 마찬가지로 임을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 주식시장에서 투자를 할 때 투자자들

의 효율적 포트폴리오 선택을 위하여 포트폴리오 최적화 모형들 가운데 수리 계획을 이용한 모형을 제시하였다. 특히 기존 연구들에서 고려되지 못하였던 투자비용의 제한 비율에 의해 통제되는 모형과 시간이 흐르면서 위험율이 작아지는 모형을 새롭게 제시하였다. 그리고 이러한 모형에 대하여 최적해를 구할 수 있는 알고리즘을 제시하고 이러한 알고리즘이 실제로 얼마나 투자자에게 도움이 될 수 있을 지 실제 주식시장의 데이터를 통해 실험해 보고 분석해 본 결과, 그 효율성이 투자자들에게 도움이 될 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구의 가장 큰 의의라면, 기존의 포트폴리오 연구들의 MAD 모형에 비해 훨씬 더 다양한 상황을 고려하면서 언제나 최적해를 구할 수 있도록 하는 보다 개선된 포트폴리오 모형을 개발하여 그 실용성을 증명하였다는 것을 들 수 있다.

MAD1과 MP1 모형을 통해 지나치게 작은 단위로 투자비용을 분산투자 하면 오히려 포트폴리오의 최적화에 부정적인 영향을 미칠 수 있다는 결과를 도출해 내었다. 그리고 MAD2와 MP2 모형을 통해 투자자들이 언제나 그 이전 시점보다는 다음 시점에서 위험률이 보다 더 적은 방향으로 투자할 수 있도록 유도함으로써, 직전 시기의 투자 위험과 실패를 경험 삼아 그 다음 시기에는 위험을 되도록 피하는 투자 학습 효과를 반영할 수 있도록 하였다.

향후 연구 과제로는 최적의 포트폴리오 선정에만 국한된 것이 아니라 선정된 포트폴리오의 최적 보유기간까지 결정할 수 있는 모형에 대한 연구 등을 생각해 볼 수 있다.

참고문헌

- [1] 이동원, “포트폴리오 결정을 위한 효율적 알고리즘”, 석사학위논문, 한양대학교 대학원, 2000.
- [2] Ballester, E., Günther, M., Pla-Santamaria, D., and Stummer, C.; “Portfolio selection under *strict uncertainty* : A multi-criteria methodology and its application to the Frankfurt and Vienna Stock Exchanges,” *European Journal of Operational Research*, 181(3) : 1476-1487, 2007.
- [3] Cenci, M. and Filippini, F.; “Portfolio selection : A linear approach with dual expected utility,” *Applied Mathematics and Computation*, 179(2) : 523-534, 2006.
- [4] Guastaroba, G., Mansini, R., and Speranza, M. G.; “On the effectiveness of scenario generation techniques in single-period portfolio optimization,” *European Journal of Operational Research*, 192(2) : 500-511, 2009.
- [5] Kim, J. S., Kim, Y. C., and Shin, K. Y.; “An Algorithm for Portfolio Optimization Problem,” *Informatica*, 16(1) : 93-106, 2005.
- [6] Konno, H. and Yamazaki, H.; “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market,” *Management Science*, 37(5) : 519-531, 1991.
- [7] Mansini R.; “Mixed Integer Linear Programming Models for Financial Problems : Analysis, Algorithms and Computational Results,” Ph.D. Dissertation, Bergamo University, Italy, 1997.
- [8] Mansini, R. and Speranza, M. G.; “On Selecting a Portfolio with Fixed Costs and Minimum Transaction Lots,” Report No. 134, Dip. Metodi Quantitative : *Brescia University*, Italy, 1997.
- [9] Mansini, R. and Speranza, M. G.; “Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots,” *European Journal of Operational Research*, 114(2) : 219-233, 1999.
- [10] Markowitz H.; “Portfolio Selection,” *Journal of Finance*, 7(1) : 77-91, 1952.
- [11] Miller, N. and Ruszczyński, A.; “Risk-adjusted probability measures in portfolio optimization with coherent measures of risk,” *European Journal of Operational Research*, 191(1) : 193-206, 2008.
- [12] Rockafellar, R. T., Uryasev, S., and Zabarankin, M.; “Master funds in portfolio analysis with general deviation measures,” *Journal of Banking & Finance*, 30(2) : 743-778, 2006.
- [13] Satchell, S. E. and Alan S.(Ed.); “Advances in Portfolio Construction and Implementation,” Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003.
- [14] Soleimani, H., Golmakani, H. R., and Salimi, M. H.; “Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm,” *Expert Systems with Applications*, 36(3) : 5058-5063, 2009.
- [15] Speranza M. G.; “Linear Programming Models for Portfolio Optimization,” *Finance*, 14(1) : 107-123, 1993.
- [16] Speranza M. G.; “A Heuristic Algorithm for a Portfolio Optimization Model Applied to the Milan Stock Market,” *Computers and Operations Research*, 23(5) : 433-440, 1996.