

마이크로 공진형 센서의 주파수 및 진폭 제어

Frequency and Amplitude Control of Micro Resonant Sensors

박 성 수*
(Sungsu Park)

Abstract : This paper presents two control algorithms for the frequency and amplitude of the resonator of a micro sensor. One algorithm excites the resonator at its a priori unknown resonant frequency, and the other algorithm alters the resonator dynamics to place the resonant frequency at a fixed frequency, chosen by the designer. Both algorithms maintain a specified amplitude of oscillations. The control system behavior is analyzed using an averaging method, and a quantitative criterion is provided for the selecting the control gain to achieve stability. Tracking and estimation accuracy of the natural frequency under the presence of measurement noise is also analyzed. The proposed control algorithms are applied to the MEMS dual-mass gyroscope without mechanical connecting beam between two proof-masses. Simulation results show the effectiveness of the proposed control algorithms which guarantee the proof-masses of the gyroscope to move in opposite directions with the same resonant frequency and oscillation amplitude.

Keywords : automatic gain control, dual-mass gyroscope, frequency tuning, phase-locked loop, resonant sensor

I. 서론

마이크로 공진형 센서는 센서의 공진자(resonator)를 공진 주파수로 가진시켜서 작동하는 센서로서, 가속도 센서, 자이로스코프, 압력센서, 힘센서 등이 있다. 마이크로 공진형 센서의 현실한 동작을 위해서는 진폭을 일정하게 유지하면서 공진주파수로 진동하는 것이 필요하나, 온도변화와 재질의 노후에 따른 강성변화 등과 같은 환경변화에 의하여 공진주파수와 진폭이 변화하므로, 변화하는 공진주파수를 지속적으로 추종(tracking)하거나 조정(tuning)하면서 일정한 진폭으로 가진시키는 주파수 및 진폭 제어가 요구된다.

일반적으로 센서 공진자 자체의 공진주파수를 추종하면서 일정한 진폭으로 가진시키기 위한 제어기로서는 자동이득제어기 (AGC : Automatic Gain Control)와 Phase-Locked Loop (PLL) 등이 사용된다. 참고문헌 [1]에서는 AGC를 이용하여 진동형 자이로스코프의 가진루프 제어기를 설계하고 전체 피드백 시스템이 안정하기 위한 조건을 제시하였으며, [2]에서는 MEMS 공진형 센서의 피로손상과 공진주파수 변화와의 관계를 연구하기 위해, PLL 기법을 사용한 공진주파수 추종 제어기를 설계하고 안정성과 성능에 대한 해석 결과를 보였다. 하지만 두 논문에서는 사전에 설정된 진폭을 얻기 위한 기법은 제시하지 못하였다.

센서 공진자 자체의 공진주파수를 추종하는 대신에, 설계자가 사전에 설정한 공진주파수와 진폭으로 진동하도록 공진자의 공진주파수를 조정하는 제어기에 관한 연구도 몇몇 문헌에 발표되었다. 이러한 기법의 장점은 온도변화 등 환경요인의 변화에도 센서의 균일한 동특성을 유지할 수 있으므로 항상 일관된 성능을 발휘하게 할 수 있으며, 공진주파수를 반송주파수로 하는 신호처리루프를 단순화시킬 수 있

다는 데 있다. 참고문헌 [3,4]에서는 적응제어 기법을 적용하여 공진주파수를 사전에 설정된 값에 일치시키고 진폭을 유지하는 제어기를 설계하고 진동형 자이로스코프에 적용하였다. 하지만 알고리즘이 복잡하고, 제어기가 센서 공진자의 파라미터에 대한 정보를 필요로 한다는 단점이 있다.

본 논문에서는 기존의 AGC와 PLL 구조를 이용하여 센서 공진자의 공진주파수를 추종하거나, 사전에 설정된 공진주파수로 조정하면서, 공진자를 일정한 진폭으로 가진시키는 주파수 및 진폭 제어기를 설계하였다. 또한 averaging method를 적용하여 설계된 제어기를 포함하는 전체 피드백 시스템의 안정성을 해석하였으며, 공진자의 변위 측정 노이즈가 공진주파수 추종(tracking) 정밀도와 추정(estimation) 정밀도에 미치는 영향을 해석하였다.

설계된 제어기를 이용하면 선도 공진자(leading resonator)의 진동패턴을 그대로 모사하는 후위 공진자(following resonator)를 실현할 수 있는데, 이의 대표적인 예로서 참고문헌 [5,6]에서 제안한 바 있는 2개의 질량소자(proof-mass) 간의 기계적 연결이 제거된 MEMS 듀얼메스(dual-mass) 자이로스코프를 들 수 있다. 본 논문에서는 설계된 제어기의 성능을 평가하기 위하여, 2개의 질량소자간의 기계적 연결이 제거된 듀얼메스 자이로스코프의 가진루프에 적용하여, 2개의 질량소자를 동일한 공진주파수와 진폭을 갖고 서로 역상(anti-phase)으로 진동시킬 수 있음을 보였다.

II. 제어 알고리즘 설계

센서 공진자의 운동방정식은 스프링-질량-댐퍼 시스템으로 모델링되며 (1)과 같이 2차 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\ddot{x} + d\dot{x} + \omega_n^2 x = f(t) \quad (1)$$

여기서 x 는 공진자의 변위, d 는 정규화된 감쇠계수, ω_n 은 공진주파수, f 는 제어입력이다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 9. 8., 채택확정 : 2008. 11. 30.

박성수 : 세종대학교 항공우주공학과(sungsu@sejong.ac.kr)

※ 본 논문은 2007년도 세종대학교 교내연구비 지원에 의한 논문임.

1. 공진주파수 추종 및 진폭제어

센서 공진자의 공진주파수 ω_n 를 추종하면서 일정한 진폭 X_0 로 가진시키기 위한 제어입력은 다음과 같이 주어진다.

$$f(t) = A(t) \cos(\theta(t)) \quad (2)$$

여기서 $A(t)$ 는 입력의 크기, $\theta(t)$ 는 입력의 순간 위상각(instantaneous phase)이다. $A(t)$ 는 변위 x 의 진폭을 설정된 값으로 유지하기 위하여, 측정된 진폭과 설정된 진폭과의 차이가 0이 되도록 증가 또는 감소되어야 하므로 AGC 형태를 취해야 하며, $\cos(\theta(t))$ 는 제어입력과 변위 x 의 위상각 차이가 -90° 임을 이용하여 공진임을 인지해야 하므로 PLL 형태를 취해야 한다.

AGC는 rectifier, 저대역 필터(low-pass filter), 비교기등의 구성요소로 이루어져 있는데[1], 본 논문에서는 설정된 진폭 X_0 를 정확히 유지하기 위하여 AGC에 비례-적분 제어기를 도입하기로 한다. 본 논문에서 제안하는 AGC는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= K_p(X_0 - r) + B \\ B &= K_I(X_0 - r) \\ \dot{r} &= \lambda_n \left(\frac{\pi}{2} |x + n_p| - r \right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 K_p 는 비례제어 이득, K_I 는 적분제어 이득, X_0 는 설정된 진폭, r 는 x 에 절대값을 취한 후 저대역 필터를 통과한 신호로서 x 의 진폭을 추정한 값이고, λ_n 는 저대역 필터의 차단주파수(corner frequency)이다. n_p 는 공진자의 변위 측정 노이즈로서 평균이 0이고 PSD (Power Spectral Density)가 σ_p^2 ($\mu m^2/Hz$)인 white Gaussian 노이즈로 가정한다.

PLL은 위상 비교기, PLL 제어기, VCO (Voltage Controlled Oscillator)로 구성되어 있으며 각각을 수식으로 표현하면 다음과 같다[2].

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &:= \dot{\theta} = \omega_0 + K_v z \\ \dot{z} &= K_z y \\ \dot{y} &= \lambda_p ((x + n_p) \cos \theta - y) \end{aligned} \quad (4)$$

VCO의 출력은 $\cos \theta$ 이며, VCO의 순간 위상각인 θ 는 순간 주파수인 ω 의 적분값이다. ω 는 VCO의 control voltage인 z 와의 비례값과 자유진동 주파수인 ω_0 와의 합으로 계산되며, z 는 위상 비교기의 출력인 y 를 적분하여 계산된다. y 는 $\cos \theta$ 와 변위를 곱한 후 저대역 필터를 통과한 신호로

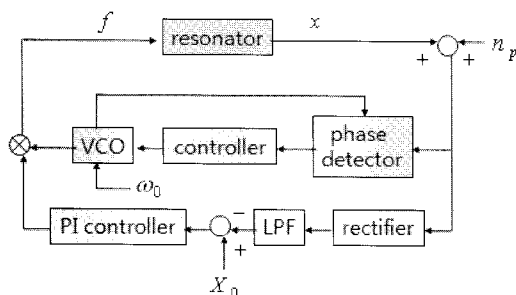


그림 1. 주파수 추종 및 진폭제어 블록선도.
Fig. 1. Block diagram of frequency tracking and amplitude control.

서, VCO의 출력과 변위간의 위상차를 계산한 값이다. n_p 는 변위 x 의 측정 노이즈이다. (4)에서 K_v , K_z 는 각각 VCO와 적분제어의 이득이며, λ_p 는 저대역 필터의 차단주파수이다. 그림 1은 AGC와 PLL로 구성된 공진주파수 추종 및 진폭 제어기의 블록선도를 나타낸다.

2. 공진주파수 조정 및 진폭제어

주파수 조정제어가 주파수 추종제어와 다른 점은 센서의 공진자가 자체의 공진주파수 대신에 설계자가 사전에 설정한 공진주파수를 갖도록 공진자의 동특성을 변화시킨다는 점이다. 이를 위해서는 변위 피드백을 사용하여 공진주파수를 조정해서 설정 공진주파수에 일치시킬 필요가 있다.

(1)에 설정 공진주파수 ω_s 를 도입하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + d\dot{x} + \omega_n^2 x + (\omega_s^2 x - \omega_s^2 x) &= f(t) \\ \Rightarrow \ddot{x} + d\dot{x} + \omega_s^2 x + \Delta\omega x &= f(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\Delta\omega = \omega_n^2 - \omega_s^2$ 는 공진자의 실제 공진주파수와 설정 공진주파수의 차이로서, 이 값을 보상(compensation)하는 것이 주파수 조정제어의 목적이 된다. 따라서 제어입력은 설정 공진주파수 ω_s 로 가진하는 부분과 공진주파수 차이를 변위 피드백을 통하여 보상하는 부분으로 구성되며 다음과 같이 주어진다.

$$f(t) = A(t) \cos(\omega_s t) + \Delta\hat{\omega}(x + n_p) \quad (6)$$

여기서 $A(t)$ 는 변위 x 의 진폭을 설정된 값으로 유지하는 진폭제어이므로 (3)과 같이 AGC형태를 갖는다. $\Delta\hat{\omega}$ 는 $\Delta\omega$ 의 추정값(estimate)으로서, $\Delta\hat{\omega}$ 의 추정 알고리즘(parameter adaptation law)은, $\Delta\hat{\omega} = \Delta\omega$ 일 때 제어입력과 변위 x 의 위상각 차이가 -90° 임을 이용하여 설계할 수 있다. n_p 는 변위 x 의 측정 노이즈이다. 본 논문에서 제안하는 추정 알고리즘은 위상 비교기와 적분제어기를 구성요소로 하며 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\hat{\omega}} &= K_w q \\ \dot{q} &= \lambda_q ((x + n_p) \cos(\omega_s t) - q) \end{aligned} \quad (7)$$

위상 비교기의 출력 q 는 제어입력인 $\cos(\omega_s t)$ 와 변위를 곱한 후 저대역 필터를 통과한 신호이며, q 를 적분함으로써 $\Delta\omega$ 를 추정할 수 있다. 여기서 K_w 는 적분 이득 값이며

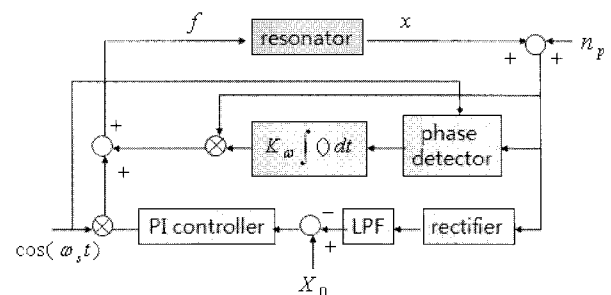


그림 2. 주파수 조정 및 진폭 제어 블록선도.
Fig. 2. Block diagram of frequency tuning and amplitude control.

λ_q 는 저대역 필터의 차단주파수이다. 그림 2는 공진주파수 조정 및 진폭제어기의 블록선도이다.

III. 안정성 해석

II 장에서 제안한 공진주파수 추종/조정 및 진폭제어에서, 설계변수인 AGC의 제어이득 K_p, K_b , PLL의 제어이득 K_v, K_z, K_w , 그리고 저대역 필터의 $\lambda_a, \lambda_p, \lambda_q$ 값에 따른 전체 피드백 시스템의 동특성과 안정성을 해석하기 위하여, 본 절에서는 참고문헌 [1,2]와 같이 averaging method를 도입하기로 한다.

1. 공진주파수 추종 및 진폭제어

공진자의 변위와 속도 x, \dot{x} 를 진폭 $a(t)$ 과 위상각 $\phi(t)$ 로 좌표 변환하고, (1)과 제어기 (2), (3), (4)로 이루어진 피드백 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{1}{\omega_0 + K_v z} [(K_p(X_0 - r) + B) \sin(\theta + \phi) \cos \theta \\ & + a \{K_v K_z y + d(\omega_0 + K_v z)\} \sin^2(\theta + \phi) \\ & + a \{(\omega_0 + K_v z)^2 - \omega_n^2\} \sin(\theta + \phi) \cos(\theta + \phi)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & -\frac{1}{\omega_0 + K_v z} \left[\frac{1}{a} (K_p(X_0 - r) + B) \cos(\theta + \phi) \cos \theta \right. \\ & + \{K_v K_z y + d(\omega_0 + K_v z)\} \sin(\theta + \phi) \cos(\theta + \phi) \\ & \left. + \{(\omega_0 + K_v z)^2 - \omega_n^2\} \cos^2(\theta + \phi) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} = & K_I(X_0 - r) \\ \dot{r} \approx & \lambda_a \left(\frac{\pi}{2} |a \cos(\theta + \phi)| - r \right) + \lambda_a \frac{\pi}{2} |m_p| \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & K_z y \\ \dot{y} = & \lambda_p \{a \cos(\theta + \phi) \cos \theta - y\} + \lambda_p n_p \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

(10)에서 r 은 x 의 진폭을 추정된 값이므로 $r \geq 0$ 이며, $|x + n_p| \leq |x| + |n_p|$ 의 관계식을 이용하면 노이즈 항을 분리할 수 있다. 노이즈 $|n_p|$ 의 평균값 n_0 는

$$n_0 = \frac{2\sigma_p}{\sqrt{2\pi}} \quad (12)$$

로 계산되고, m_p 를 다음과 같이 정의하면,

$$|m_p| = m_p + n_0 \quad (13)$$

m_p 의 평균값은 0이고, m_p 의 PSD와 n_p 와의 상관관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{m_p^2} = \overline{n_p^2} - n_0^2 = \sigma_p^2 - n_0^2 \approx 0.36\sigma_p^2 \quad (14)$$

$$\overline{m_p n_p} = \sigma_p^2 \quad (15)$$

여기서 bar는 확률 평균값(stochastic expectation)을 의미하며, (13)의 관계식을 이용하면 (10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{r} = \lambda_a \left(\frac{\pi}{2} (|a \cos(\theta + \phi)| + n_0) - r \right) + \lambda_a \frac{\pi}{2} m_p \quad (16)$$

식 (8)-(11)은 다음과 같이 일반적인 확률 비선형 상태공간 방정식으로 간략하게 정리할 수 있다.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1 w \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x_1 = & [a \ \phi \ B \ r \ z \ y]^T, \quad w = [m_p \ n_p]^T \\ g_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_a \pi / 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p \cos \theta \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (18)$$

이다. (17)의 $f_1(x_1)$ 를 평균값 \bar{x}_1 를 중심으로 테일러 급수로 전개한 후 1차 근사화 시키고, 노이즈 벡터 w 의 평균이 0임을 이용하면, 다음과 같이 (17)의 확률 평균 전파식을 구할 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1) \quad (19)$$

진폭과 위상각의 변화는 변위의 진동운동에 비하여 극히 느리다는 가정 하에 (19)에 averaging method를 적용하면, 다음과 같이 비선형 averaged dynamics를 얻을 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}_{1av} = f_{1av}(\bar{x}_{1av}) \quad (20)$$

여기서 하첨자 av 는 averaged 값을 의미하며, 위 식을 차례로 풀어쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}}_{av} = & -\frac{1}{\omega_0 + K_v \bar{z}_{av}} \left[\frac{1}{2} \{K_p(X_0 - \bar{r}_{av}) + \bar{B}_{av}\} \sin \bar{\phi}_{av} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{a}_{av}}{2} \{K_v K_z \bar{y}_{av} + d(\omega_0 + K_v \bar{z}_{av})\} \right] \\ \dot{\bar{\phi}}_{av} = & -\frac{1}{\omega_0 + K_v \bar{z}_{av}} \left[\frac{1}{2\bar{a}_{av}} \{K_p(X_0 - \bar{r}_{av}) + \bar{B}_{av}\} \cos \bar{\phi}_{av} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \{(\omega_0 + K_v \bar{z}_{av})^2 - \omega_n^2\} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dot{\bar{B}}_{av} = K_I(X_0 - \bar{r}_{av}) \quad (21)$$

$$\dot{\bar{r}}_{av} = \lambda_a \left(\bar{a}_{av} + \frac{\pi}{2} n_0 - \bar{r}_{av} \right)$$

$$\dot{\bar{z}}_{av} = K_z \bar{y}_{av}$$

$$\dot{\bar{y}}_{av} = \lambda_p \left(\frac{1}{2} \bar{a}_{av} \cos \bar{\phi}_{av} - \bar{y}_{av} \right)$$

여기서 (21)의 평형점은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = & X_0, \quad \bar{a}_0 = X_0 - \frac{\pi}{2} n_0, \quad \bar{\phi}_0 = -\frac{\pi}{2}, \\ \bar{B}_0 = & \bar{a}_0 d \omega_n, \quad \bar{z}_0 = \frac{\omega_n - \omega_0}{K_v}, \quad \bar{y}_0 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(22)로 주어지는 평형점의 안정성을 판별하기 위하여, (21)을 평형점에서 선형화한 후, Jacobian 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla f_{1av}(\bar{a}_{av}, \bar{\phi}_{av}, \bar{B}_{av}, \bar{r}_{av}, \bar{z}_{av}, \bar{y}_{av}) := & F_1 \\ = & \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} & 0 & \frac{1}{2\omega_n} - \frac{K_p}{2\omega_n} - \frac{\bar{a}_0 d K_v}{2\omega_n} - \frac{\bar{a}_0 K_v K_z}{2\omega_n} \\ 0 & -\frac{d}{2} & 0 & 0 & -K_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_I & 0 & 0 \\ \lambda_a & 0 & 0 & -\lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z \\ 0 & \frac{\lambda_p \bar{a}_0}{2} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

위 Jacobian 행렬이 안정하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\left(d + \frac{K_p}{\omega_n}\right) \left(\frac{d}{2} + \lambda_a\right) > \frac{K_f}{\omega_n}, \quad d \left(\frac{d}{2} + \lambda_p\right) > \bar{a}_0 K_v K_z \quad (24)$$

(24)는 전체 피드백 시스템의 안정성을 판별하는 조건으로서, 제어이득 등 설계변수를 선택하는 기준으로 이용할 수 있다. (24)의 왼쪽 식은 AGC에 관련된 설계변수, 오른쪽 식은 PLL에 관련된 설계변수만으로 구성되어 있으므로, 제어기 설계 시 두 부분을 독립적으로 설계할 수 있다. 피드백 시스템이 안정하다면, (22)와 (4)에 의하여 $\omega = \omega_n$ 이므로 가진 주파수는 공진주파수 ω_n 를 추종한다. 또한, $\bar{a}_0 = X_0 - \frac{\pi}{2}n_0 = X_0 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_p$ 이므로 진폭은 변위 측정 노이즈로 인하여 약간의 편차를 갖고 설정된 값 X_0 로 수렴함을 알 수 있다. 피드백 시스템의 동특성은 진폭의 시간에 따른 변화를 나타내는 \bar{a}_{av} 와 가진 주파수의 시간에 따른 변화를 나타내는 \bar{z}_{av} 에 달려있으며, 해당 설계변수를 조정해서 바꿀 수 있다.

2. 공진주파수 조정 및 진폭제어

앞 절과 마찬가지로 변위와 속도 x, \dot{x} 를 진폭 $a(t)$ 과 위상각 $\phi(t)$ 로 좌표 변환하고, (1)과 제어기 (3), (6), (7)로 이루어진 피드백 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{1}{\omega_s} [(K_p(X_0 - r) + B) \sin(\omega_s t + \phi) \cos(\omega_s t) \\ & + \Delta\hat{\omega}n_p \sin(\omega_s t + \phi) + ad\omega_s \sin^2(\omega_s t + \phi) \\ & - a\Delta\tilde{\omega} \sin(\omega_s t + \phi) \cos(\omega_s t + \phi)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & -\frac{1}{\omega_s} \left[\frac{1}{a} (K_p(X_0 - r) + B) \cos(\omega_s t + \phi) \cos(\omega_s t) \right. \\ & + \frac{1}{a} \Delta\hat{\omega}n_p \cos(\omega_s t + \phi) + d\omega_s \sin(\omega_s t + \phi) \cos(\omega_s t + \phi) \\ & \left. - \Delta\tilde{\omega} \cos^2(\omega_s t + \phi) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} = & K_f(X_0 - r) \\ \dot{r} \approx & \lambda_a \left(\frac{\pi}{2} (|a \cos(\omega_s t + \phi)| + n_0) - r \right) + \lambda_a \frac{\pi}{2} m_p \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\omega} = & -K_w q \\ \dot{q} = & \lambda_q \{ a \cos(\omega_s t + \phi) \cos(\omega_s t) - q \} + \lambda_q n_p \cos(\omega_s t) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 (27)은 (16)을 이용했고, $\Delta\tilde{\omega} = \Delta\omega - \Delta\hat{\omega}$ 은 추정 오차(estimation error)를 뜻한다. 식 (25)-(28)을 일반적인 확률 비선형 상태공간 방정식으로 간략하게 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_2)w \quad (29)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x_2 = & [a \ \phi \ B \ r \ \Delta\tilde{\omega} \ q]^T, \quad w = [m_p \ n_p]^T \\ g_2(x_2) = & \begin{bmatrix} 0 & \Delta\hat{\omega} \sin(\omega_s t + \phi) \\ 0 & \Delta\hat{\omega} \cos(\omega_s t + \phi)/a \\ 0 & 0 \\ \lambda_a \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_q \cos(\omega_s t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

이다. 앞 절과 같이 (29)의 근사화된 확률 평균 전파식을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_2) \quad (31)$$

같은 방법으로 위 식의 비선형 averaged dynamics를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}}_{av} = & -\frac{1}{\omega_s} \left[\frac{1}{2} (K_p(X_0 - \bar{r}_{av}) + \bar{B}_{av}) \sin \bar{\phi}_{av} + \frac{1}{2} d\omega_s \bar{a}_{av} \right] \\ \dot{\bar{\phi}}_{av} = & -\frac{1}{\omega_s} \left[\frac{1}{2\bar{a}_{av}} (K_p(X_0 - \bar{r}_{av}) + \bar{B}_{av}) \cos \bar{\phi}_{av} - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\omega}_{av} \right] \\ \dot{\bar{B}}_{av} = & K_f(X_0 - \bar{r}_{av}) \\ \dot{\bar{r}}_{av} = & \lambda_a (\bar{a}_{av} + \frac{\pi}{2}n_0 - \bar{r}_{av}) \\ \Delta\tilde{\omega}_{av} = & -K_w \bar{q}_{av} \\ \dot{\bar{q}}_{av} = & \lambda_q \left(\frac{1}{2} \bar{a}_{av} \cos \bar{\phi}_{av} - \bar{q}_{av} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 (32)의 평형점은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = & X_0, \quad \bar{a}_0 = X_0 - \frac{\pi}{2}n_0, \quad \bar{\phi}_0 = -\frac{\pi}{2}, \\ \bar{B}_0 = & \bar{a}_0 d\omega_n, \quad \Delta\tilde{\omega}_0 = 0, \quad \bar{q}_0 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

(32)를 평형점에서 선형화한 후, Jacobian 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla f_{2av}(\bar{a}_{av}, \bar{\phi}_{av}, \bar{B}_{av}, \bar{r}_{av}, \Delta\tilde{\omega}_{av}, \bar{q}_{av}) := & F_2 \\ = & \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} & 0 & \frac{1}{2\omega_s} - \frac{K_p}{2\omega_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\omega_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_f & 0 & 0 \\ \lambda_a & 0 & 0 & -\lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_w \\ 0 & \frac{\lambda_q \bar{a}_0}{2} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

위 Jacobian 행렬이 안정하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\left(d + \frac{K_p}{\omega_s}\right) \left(\frac{d}{2} + \lambda_a\right) > \frac{K_f}{\omega_s}, \quad d \left(\frac{d}{2} + \lambda_q\right) > \frac{\bar{a}_0 K_w}{2\omega_s} \quad (35)$$

피드백 시스템이 안정하다면, (33)에 의하여 $\Delta\tilde{\omega}_0 = 0$ 이므로 실제 공진주파수는 설정된 공진주파수로 조정된다. 또한, $\bar{a}_0 = X_0 - \frac{\pi}{2}n_0 = X_0 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_p$ 이므로 진폭은 변위 측정 노이즈로 인하여 약간의 편차를 갖고 설정된 값 X_0 로 수렴한다. 피드백 시스템의 동특성은 진폭의 시간에 따른 변화를 나타내는 \bar{a}_{av} 와 주파수 추정 알고리즘의 수렴율을 나타내는 $\bar{\omega}_{av}$ 에 달려있으며, 해당 설계변수를 조정해서 바꿀 수 있다.

IV. 정밀도 해석

변위 측정 노이즈는 앞 절에서 해석한 바와 같이 진폭제

어에서 오차를 초래할 뿐만 아니라, 공진주파수 추종과 추정 정밀도(resolution)에도 영향을 미친다. 본 절에서는 상호분산 전파식(covariance propagation equation)을 이용하여 앞 절에서 설계한 주파수 제어기에서 변위 측정 노이즈가 공진주파수 추종 또는 추정 정밀도에 미치는 영향을 해석한다. (17)과 (29)의 상호분산 전파식은 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{P} = \frac{d}{dt} \left[\overline{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T} \right] \quad (36)$$

위 식을 평균값 \bar{x} 를 중심으로 테일러 급수로 전개한 후 1차 근사화 시키고 (19)와 (31)을 이용하면 다음과 같은 상호분산 전파식을 얻을 수 있다[3].

$$\dot{P} = P \nabla f^T(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) P + g(\bar{x}) S g(\bar{x})^T \quad (37)$$

여기서 측정 노이즈 벡터의 PSD S 는 다음과 같이 주어진다.

$$S = \begin{bmatrix} 0.36\sigma_p^2 & \sigma_p^2 \\ \sigma_p^2 & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

(37)에 averaging method를 적용하고 (17)과 (29)의 정상상태(steady-state)에서의 상호분산식을 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 0 &= P_1 F_1^T + F_1 P_1 + Q_1 \\ 0 &= P_2 F_2^T + F_2 P_2 + Q_2 \end{aligned} \quad (39)$$

여기서,

$$Q_1 = \text{diag}\{0, 0, 0, (\lambda_a \pi / 2)^2 (0.36\sigma_p^2), 0, \lambda_p^2 \sigma_p^2 / 2\}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\omega^2 \sigma_p^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta\omega \sigma_p^2 \lambda_q}{2} \\ 0 & \frac{\Delta\omega^2 \sigma_p^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\lambda_a \pi}{2}\right)^2 (0.36\sigma_p^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta\omega \sigma_p^2 \lambda_q}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_q^2 \sigma_p^2}{2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

주파수 추종제어에서 가진주파수의 정밀도, 즉 표준편차는 (4)에 의하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma_1 = \sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2} = K_v \sqrt{\sigma_z^2} \quad (41)$$

여기서, σ_z^2 은 (39)에서 $P_1(5,5)$ 에 해당하므로 (41)은 다음 식으로 바꿀 수 있다.

$$\sigma_1 = K_v \sqrt{P_1(5,5)} \quad (42)$$

비슷한 방법으로 주파수 조정제어에서 주파수 보상값의 정밀도는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma_2 = \sqrt{(\Delta\tilde{\omega} - \Delta\bar{\omega})^2} = \sqrt{P_2(5,5)} \quad (43)$$

여기서 $P_1(5,5)$ 과 $P_2(5,5)$ 는 (39)의 수치해 중, (5,5)번째 요소값을 의미한다.

V. 시뮬레이션

일반적으로 듀얼매스 자이로스코프는 2개의 질량소자(proof-mass)가 기계적인 연결빔에 의하여 서로 연결되어 있으며, 동일한 공진주파수와 진폭을 가지고 서로 역상(anti-phase)으로 진동하도록 구동된다[7]. 그 이유는 2개의 질량소자가 서로 역상으로 진동할 경우, 2개의 질량소자에서 야기되는 코리올리스 힘은 서로 상반되지만 선형 관성력은 동일한 방향으로 작용하므로 2개의 질량소자의 변위를 차분하면 선형 관성력 성분을 상쇄할 수 있기 때문이다. 하지만, 연결빔으로 인한 가진축 정렬(alignment) 문제, 예기치 않은 진동모드 발생 가능성 문제, 고정밀도의 제조공정에 따른 높은 제조비 등의 문제가 있어, 2개의 질량소자간의 연결빔을 제거하는 대신, 제어기로서 2개의 질량소자를 동일한 공진주파수와 진폭을 갖고 서로 역상으로 진동시키는 방법이 제안되었다[5,6].

본 절에서는 제어기의 성능을 평가하기 위하여 제어기를 2개의 질량소자간의 기계적 연결이 제거된 듀얼매스 자이로스코프의 가진루프에 적용해 보았다. 듀얼매스 자이로스코프의 가진축 운동방정식은 2개의 2차 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + d_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= f_1 \\ \ddot{x}_2 + d_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (44)$$

여기서 하첨자 1,2는 각각 첫 번째와 두 번째 질량소자를 의미하며, x_1, x_2 는 질량소자의 변위, d_1, d_2 는 정규화된 감쇠계수, ω_1, ω_2 은 공진주파수, f_1, f_2 는 제어입력이다.

첫 번째 질량소자를 선도 공진자로, 두 번째 질량소자를 선도 공진자의 진동패턴을 그대로 모사하는 후위 공진자로 설정하여, 본 논문에서 제안한 주파수 및 진폭제어를 적용하였다.

시뮬레이션에 사용된 자이로스코프 모델은 세종대에서 제작한 그림 3의 듀얼매스 자이로스코프 프로토타입의 설계 값을 사용했으며, 그 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.30 \text{ KHz}, \quad \omega_2 = 2.53 \text{ KHz} \\ d_1 &= 144.5 \text{ sec}^{-1}, \quad d_2 = 151.7 \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$

제작오류를 감안하여 ω_2 는 ω_1 값에 10%의 오차를 주었으며, d_2 는 d_1 값에 5%정도의 오차를 주었다. 변위 측정 노이즈의 PSD는 $\sigma_p^2 = 3.03 \times 10^{-14} \mu\text{m}^2/\text{Hz}$ 로 가정했다.

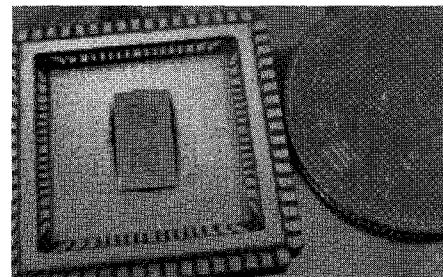


그림 3. 세종대 제작 듀얼매스 자이로스코프
Fig. 3. A dual-mass gyroscope fabricated by Sejong Univ.

첫 번째 질량소자에 적용하는 제어법칙은 공진주파수 추종 및 진폭제어이며 다음과 같다.

$$f_1(t) = A_1(t) \cos(\theta_1(t)) \quad (46)$$

여기서 $A_1(t)$ 는 (3), $\theta_1(t)$ 는 (4)로 계산된다. 두 번째 질량소자에 적용하는 제어법칙은 공진주파수 조정 및 진폭제어이다. 두 번째 질량소자가 첫 번째 질량소자와 동일한 공진주파수를 갖고 역상으로 진동해야 하므로 제어법칙 (6)은 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$f_2(t) = -A_2(t) \cos(\theta_1(t)) + \Delta\hat{\omega}x_2 \quad (47)$$

여기서 $\theta_1(t)$ 는 (18)과 동일하며, $A_2(t)$ 는 (3), $\Delta\hat{\omega}$ 는 (7)로 계산된다.

제어기의 설계변수는 (24)과 (35)의 안정조건을 만족하도록 선정하였으며, 시뮬레이션에 사용된 제어기의 설계변수는 표 1에 정리하였다. 표 1의 값은 길이 $1 \mu\text{m}$ 와 시간 $1/\omega_1(\text{sec})$ 를 기준으로 무차원화(non-dimensionalized) 값이다.

그림 4-7은 시뮬레이션 결과이다. 그림 4는 첫 번째 질량소자에 적용한 제어기의 가진주파수가 공진주파수를 추종하는 모습을 보여준다. PLL의 자유진동 주파수 $\omega_0 = 0.9 \times \omega_n$ 에서 시작한 가진주파수는 0.3초 후에 질량소자의 고유주파수에 도달하여 그 값이 유지되는 것을 볼 수 있다. (42)로 계산한 가진주파수의 정밀도는 $\sigma_1 \approx 0.03 \text{ Hz}$ 로서 그림 4의 첫 번째 그래프를 부분적으로 확대한 두 번째 그래프와 상당히 일치하는 것을 확인할 수 있다.

표 1. 제어기의 무차원 설계변수 값.

Table 1. Non-dimensional values of the control parameters.

Parameter	Value
X_0, K_p, K_f, λ_a	5, 0.06, 0.00005, 0.05
$\omega_0, K_v, K_2, \lambda_p$	0.9, 0.5, 0.00015, 0.5
K_w, λ_q	0.00015, 0.5

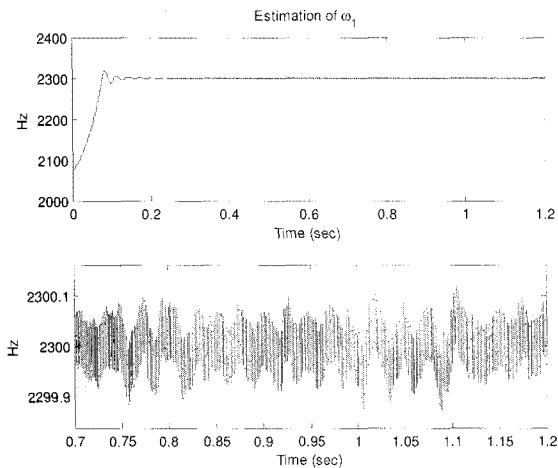


그림 4. 공진주파수를 추종하는 가진주파수.
Fig. 4. The excitation frequency that tracks the resonant frequency.

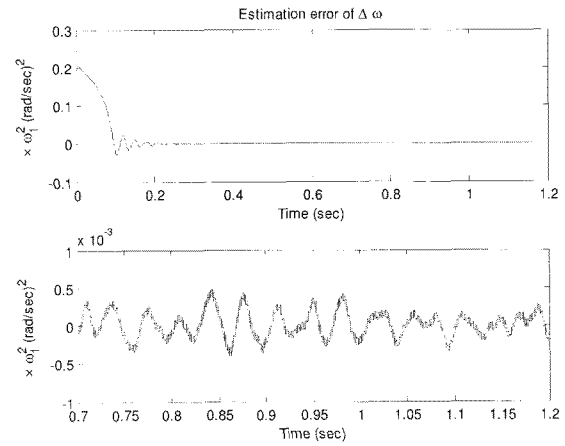


그림 5. $\Delta\omega$ 추정오차.
Fig. 5. Estimation error of the frequency difference $\Delta\omega$.

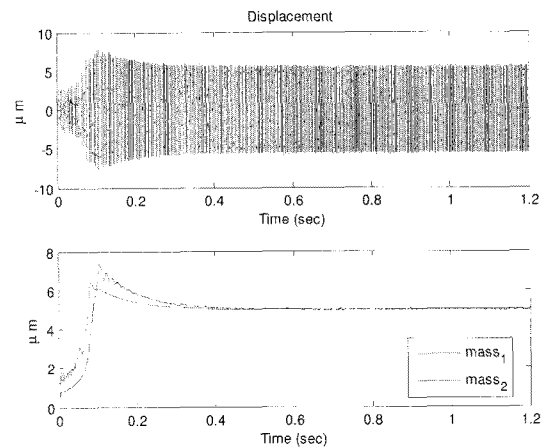


그림 6. 가진축 $x_1(t), x_2(t)$ 응답.
Fig. 6. Time response of $x_1(t), x_2(t)$ and their approximates.

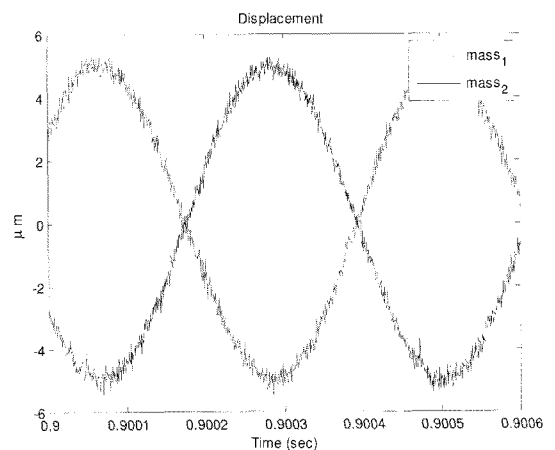


그림 7. 가진축 $x_1(t), x_2(t)$ 응답.
Fig. 7. Time response of $x_1(t), x_2(t)$.

그림 5는 추정오차 $\Delta\hat{\omega} (= \Delta\omega - \Delta\hat{\omega})$ 의 응답으로서 0.3 초 정도에서 오차가 0으로 수렴되는 것을 볼 수 있다. 추정

오차가 0이 되면 두 번째 질량소자의 동특성이 변화하여 첫 번째 질량소자와 동일한 공진주파수를 갖게 되며, 이는 그림 6과 7에서 확인할 수 있다. (43)으로 계산한 $\Delta\omega$ 의 추정오차는 $\sigma_2 \approx 0.08\% \times \Delta\tilde{\omega}$ 이내로서 그림 5의 두 번째 그래프와 일치하는 것을 확인할 수 있다.

그림 6은 질량소자의 변위 응답으로서 일정시간이 지나면 진폭이 설정된 값 $X_0 = 5\mu\text{m}$ 로 일정하게 유지되는 것을 보여주고 있다. 그림 6의 두 번째 그래프는 변위 x_1 과 x_2 의 진폭을 의미하는 AGC의 r 값을 나타낸다. 그림 7은 그림 6의 응답을 확대한 것으로, 2개의 질량소자가 동일한 공진주파수와 진폭을 갖고 서로 역상으로 진동하고 있음을 보여주고 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 마이크로 공진형 센서의 공진자 자체의 공진주파수를 추종하거나, 공진자의 동특성을 변경시켜 사전에 설정된 공진주파수로 조정하면서, 일정한 진폭으로 가진시키는 주파수 및 진폭 제어기를 설계하였다.

AGC에 비례-적분 제어기를 도입하여 설정된 진폭 X_0 를 유지시켰고, 공진주파수를 추종(tracking)하고 주파수 오차를 추정(estimation)하기 위해 PLL과 PLL 기법을 이용한 주파수 오차 추정 알고리즘을 제안하였다. averaging method를 적용하여 제어기를 포함하는 전체 피드백 시스템의 안정성을 해석하였고, 안정성을 판별하는 조건을 제시하여 제어이득 등 설계변수를 선택하는 기준으로 이용할 수 있게 하였다. 또한, 변위 측정 노이즈가 공진주파수 추종 정밀도와 추정 정밀도(resolution)에 미치는 영향을 해석하였다.

본 논문에서 설계된 제어기의 성능을 평가하기 위하여,

제어기를 2개의 질량소자간의 기계적 연결이 제거된 듀얼매스 자이로스코프의 가진루프에 적용하여, 시뮬레이션 결과가 안정성 해석과 노이즈 해석 결과와 일치함을 확인하였고, 2개의 질량소자를 동일한 공진주파수와 진폭을 갖고 서로 역상으로 진동시킬 수 있음을 보였다.

참고문헌

- [1] R. McCloskey and A. Vakakis, "Analysis of a Microsensor Automatic Gain Control Loop," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 3307-3311, 1999.
- [2] X. Sun, R. Horowitz, and K. Komvopoulos, "Stability and Resolution Analysis of a Phase-Locked Loop Natural Frequency Tracking System for MEMS Fatigue Testing," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 124, no. 4, pp. 599-605, Dec. 2002.
- [3] S. Park and R. Horowitz, "New Adaptive Mode of Operation for MEMS Gyroscopes," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 126, no. 4, pp. 800-810, Dec. 2004.
- [4] R. Leland, "Adaptive Mode Tuning for Vibrational Gyroscopes," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 11, no. 2, pp. 242-247, Mar. 2003.
- [5] 박성수, 장지혜, "ECU 내장용 센서류 개발," 자동차기술개발통합 Workshop 논문집, 논문번호 28, 2006.
- [6] 장지혜, 듀얼매스 자이로스코프의 가진제어, 석사학위논문, 세종대학교, 2007.
- [7] A. Seshia and R. Howe, "Dual Mass Micromachined Gyroscope," Pat. no. 6, 250, 154, USA, 2001.



박 성 수

1988년 서울대학교 항공공학과 졸업.
1990년 동 대학원 석사. 2000년 U.C. Berkeley 박사. 2003년~현재 세종대학교 항공우주공학과 부교수. 관심분야는 유도항법제어, Target tracking.