

원호형 1-3 압전 복합재 변환기의 공진 특성

Resonance Characteristics of a 1-3 Piezoelectric Composite Transducer of Circular Arch Shape

김 대 승* · 김 진 오†

Dae Seung Kim and Jin Oh Kim

(2009년 1월 5일 접수 ; 2009년 2월 4일 심사완료)

Key Words : Piezoelectric Composite(압전 복합재), Transducer(변환기), Resonance(공진)

ABSTRACT

This paper presents a theoretical approach to calculate the resonant frequency of a thickness vibration mode in the radial direction for a 1-3 piezoelectric composite transducer of circular arch shape. For the composite transducer composed of a piezoelectric ceramic and a polymer, vibration parameters were derived according to the volume ratio of a ceramic, and a vibration characteristic equation was derived from the piezoelectric governing equations with adequate boundary conditions. The fundamental resonant frequencies were calculated numerically and verified by comparing them with those obtained from the finite element analysis and the experiment. The volume ratio and the thickness are more substantial than the curvature radius to determine the fundamental resonant characteristics, and the fundamental resonant frequency becomes higher for the larger volume ratio of the piezoelectric ceramic and for the smaller thickness.

1. 서 론

압전 복합재는 압전 성능이 우수한 압전 세라믹 재료와 음향 임피던스가 낮은 고분자 재료가 결합되어 만들어진⁽¹⁾. 압전 세라믹과 고분자의 결합구조에 따라 압전 복합재는 (0-0), (0-1), (0-2), (0-3), (1-1), (1-3), (2-1), (2-2), (2-3), (3-3) 등으로 구분된다⁽¹⁾. 여기서 괄호 안의 첫 번째 숫자는 압전 세라믹이 연속인 차원의 개수를 나타내고, 두 번째 숫자는 고분자 재료가 연속인 차원의 개수를 나타낸다. 여러 가지 결합구조 중에서 1-3 구조를 갖는 압전 복합재는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 고분자 재료 매트릭스 안에 압전 세라믹 막대들이 한 개의

축과 나란하게 삽입된 구조를 갖는다⁽¹⁾. 이런 구조의 복합재에서는 세라믹 막대의 종횡비($=l/e$)를 크게 하여 전기-역학적(electromechanical) 에너지 변환 효율을 높이며, 복합재의 두께방향 공진모드 근처에서 고분자 재료에 대역차단(stop band) 공진모드가 발생되지 않도록 세라믹 막대의 간격을 좁게 한다⁽²⁾.

1-3 압전 복합재는 두께 방향 전기-역학적 결합 계수가 크고, 유전율(permittivity) 및 음향 임피던스가 작으며, 유전(dielectric) 손실 및 역학적 손실이 작고 주파수 대역폭이 넓다⁽²⁾. 또한 1-3 압전 복합재는 유연한 고분자 재료로 인해 변형되기가 쉬워 곡면 형상으로 된 구조물에 부착되기에 적합하다.

강성이 낮은 폴리우레탄이 고분자 재료로 사용된 1-3 복합재가 원호형으로 변형되어 인체 진단용 초음파 센서로 적용된 사례가 있다⁽³⁾. 강성이 비교적 크지만 열을 받으면 쉽게 변형이 되는 에폭시가 고

† 교신저자; 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02)820-0662, Fax : (02)820-0668

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

분자 재료로 사용된 1-3 압전 복합재는 원호형으로 성형된 후, 소형 무인 잠수정의 외부 곡면에 부착되어 수중 음향 통신 센서로서 활용되고 있다⁽⁴⁾. 파이프의 외부 곡면에 압전 변환기를 부착하는 방식의 초음파 유속 센서⁽⁵⁾ 개발에서 원호형 압전 세라믹 대신 압전 복합재를 사용하는 방안이 시도되고 있다.

지금까지 보고된 1-3 압전 복합재 연구들은 주로 평판형 복합재 변환기를 대상으로 하였다^(2,6,7). 이 논문은 Fig. 2에 보인 바와 같은 원호 형상의 1-3 압전 복합재를 대상으로 진동 특성을 파악하기 위한

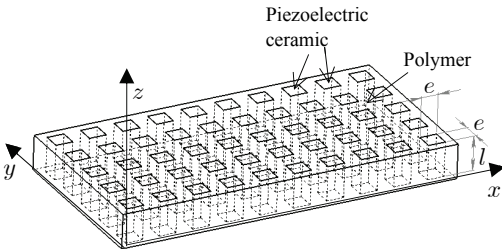
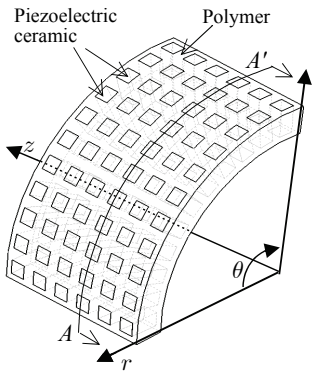
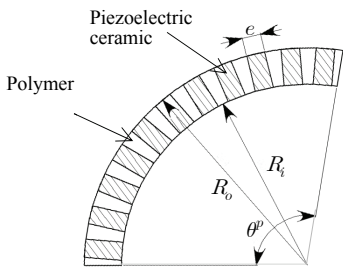


Fig. 1 Structure of a 1-3 piezoelectric composite plate



(a) Cylindrical coordinate



(b) A-A' cross-section

Fig. 2 Structure of a 1-3 piezoelectric composite transducer of circular arch shape

해석 과정을 정립하는 것을 목적으로 한다. 원호형 1-3 압전 복합재에 대해서 압전 세라믹 체적비에 따른 진동 파라미터들을 추출해서 진동 특성을 이론적으로 해석하고, 공진주파수를 구하여 유한요소 해석 결과와 비교함으로써 이론적 해석을 검증하며, 제작된 시편에서 측정된 결과와 비교한다.

2. 진동 파라미터

원호형 1-3 압전 복합재 변환기의 진동 특성을 해석하기 위해서 우선 진동 파라미터들을 파악해야 한다. 이를 위해 압전 세라믹과 고분자의 물성치들로부터 이 변환기의 진동 파라미터들을 유도한다.

2.1 압전 복합재에 대한 가정

압전 복합재는 압전 세라믹과 고분자로 구성된 복합재료이지만, 진동 파라미터 유도를 쉽게 하기 위해 1-3 압전 복합재를 등가의 단일 재료로 구성된 것으로 간주한다. 이러한 균질화 과정에 혼합법칙(rules of mixture)⁽⁸⁾을 적용해서, 평판형 1-3 압전 복합재의 두께방향 진동과 관련된 진동 파라미터들을 구한 사례가 있다^(2,6,7). 이 파라미터들을 유도하기 위해 적용된 가정들을 요약하면 다음과 같다.

(1) 고분자와 압전 세라믹은 완전하게 접촉되어서 고분자와 압전 세라믹 사이의 경계면에서 미끄럼이 발생하지 않는다.

(2) 복합재의 횡방향 변형률들에 대한 압전 세라믹과 고분자의 기여도는 이 재료들의 체적비에 따른다.

(3) 세라믹과 고분자에서 횡방향으로 발생하는 응력의 크기는 서로 같다.

(4) 전극이 배치된 면에 수직인 방향 이외의 전기적 성분들은 무시되며, 압전 세라믹과 고분자에서의 전기퍼텐셜의 변화율은 서로 같다.

이 가정들을 원호형 복합재에도 동일하게 적용한다. Fig. 2에서와 같이 반경방향과 나란하게 삽입된 세라믹 막대는 직육면체형상이다. 그러나 세라믹 막대의 폭 e 가 좁고, 두께 l 은 원호 반경 $R_m (= (R_i + R_o)/2)$ 보다 훨씬 작으므로 다음과 같은 가정을 추가한다.

(5) 압전 세라믹과 고분자는 원주방향으로 일정한 곡률로 균일하게 굽어 있다.

(6) 압전 세라믹은 반경방향으로 분극되어 있다.

이상의 여섯 가지 가정에 따라 복합재료인 원호형 1-3 압전 복합재를 하나의 재료로 균질화한다.

먼저 가정 (5)에 의해, Fig. 2의 모델에서 불균일한 원호면이 Fig. 3에서처럼 균일한 곡면으로 간주된다. 이 때 원호의 바깥쪽 반지름과 안쪽 반지름의 차는 세라믹 막대의 길이($l = R_o - R_i$)로 변화가 없다. 그리고 변형된 세라믹의 중심각은 $\theta^c = e/R_m$ 이므로 Fig. 3의 모델에서 세라믹이 차지하는 체적비는 Fig. 2의 모델에서의 세라믹 체적비와 거의 같다. Fig. 3에서 θ^p 는 복합재의 원주각이다. 가정 (6)에 의해, Fig. 2의 모델에서 세라믹 막대의 길이방향인 분극방향이 Fig. 3에서 원호면에 수직인 반경방향이다.

평판형에도 적용되었던 (1~4)의 가정을 근사 모델에 적용해 원호형 복합재의 진동 파라미터들을 유도한다. 가정 (1)에 따라, 두 재료의 반경방향 변형률은 서로 같다.

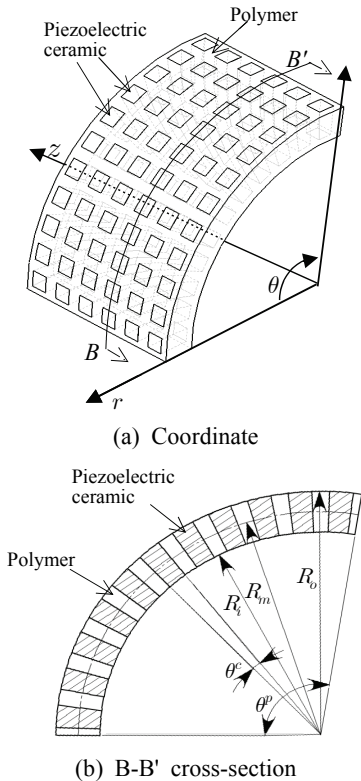


Fig. 3 Approximated structure of a piezoelectric composite transducer of circular arch shape

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r^c = \varepsilon_r^p \quad (1)$$

여기서 문자 위의 ‘-’는 압전 복합재, 윗첨자 ‘c’는 압전 세라믹, ‘p’는 고분자를 나타낸다.

가정 (2)에 의해, 원주방향 변형률과 폭방향 변형률은 각각 다음과 같이 된다.

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \Gamma \varepsilon_\theta^c + \tilde{\Gamma} \varepsilon_\theta^p \quad (2a)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \Gamma \varepsilon_z^c + \tilde{\Gamma} \varepsilon_z^p \quad (2b)$$

여기서 Γ 는 압전 복합재의 전체 체적에 대한 압전 세라믹의 체적의 비이고, $\tilde{\Gamma}$ 는 $1-\Gamma$ 로서 고분자의 체적비이다.

가정 (3)에 따라, 원주방향 응력과 폭방향 응력은 각각 다음과 같은 관계가 있다.

$$\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta^c = \sigma_\theta^p \quad (3a)$$

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z^c = \sigma_z^p \quad (3b)$$

가정 (4)에 따라, 압전 복합재의 압전 세라믹과 고분자에서의 전기장은 서로 같다.

$$\bar{E}_r = E_r^c = E_r^p \quad (4)$$

세라믹의 체적비가 아주 작지 않다면 (즉 $\Gamma > 0.1$ 이면) 식 (4)는 타당하다⁽²⁾.

2.2 압전 복합재의 파라미터

압전 복합재 변환기의 진동 특성을 해석하기 위해서, 압전 복합재의 탄성 상수, 유전 상수, 압전 상수 등의 파라미터 값이 필요하다. 이들을 구하기 위하여, 복합재의 반경방향 응력과 전기적 변위 식을 이용한다.

복합재에서 세라믹의 체적비인 Γ 는 가정 (5)에 의해 반경좌표 r 에 위치한 원호면에서 세라믹이 차지하는 면적을 원호 면적으로 나눈 면적비와 같다.

$$\Gamma = \frac{(mr\theta^c)(ne^c)}{r\theta^p e^p} = \frac{mn\theta^c e^c}{\theta^p e^p} \quad (5)$$

여기서 m 은 원주방향으로 배열된 세라믹 막대의 개수이고, n 은 폭방향으로 배열된 세라믹 막대의 개수이다. 그리고 e^c 는 세라믹 막대의 z 방향 폭이

며, e^p 는 복합재의 z 방향 폭이다. 반경좌표 r 인 지점의 원호면에 수직 방향으로 작용하는 힘은 세라믹과 고분자에서의 힘들의 합이다. 마찬가지로 그 원호면에서의 전기적 변위는 두 영역에서 발생하는 전기적 변위들의 합이다. 식(5)에 보인 바와 같이 면적비와 체적비가 같으므로, 복합재의 반경방향 응력과 전기적 변위는 다음과 같이 된다.

$$\bar{\sigma}_r = \Gamma \sigma_r^c + \tilde{\Gamma} \sigma_r^p \quad (6a)$$

$$\bar{D}_r = \Gamma D_r^c + \tilde{\Gamma} D_r^p \quad (6b)$$

두께 진동에서 복합재의 원주방향과 폭방향의 길이가 과장보다 훨씬 길므로, 원주방향과 폭방향으로 평면 변형률을 적용한다. 그러면 전단변형률인 $\gamma_{\theta z}$, $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$ 은 0이다. 가정(4)에 의해서 원주방향 전기장 E_θ 와 폭방향 전기장 E_z 도 0이다. 그러므로 전단 응력 성분들이 0이 된다. 두께 진동과 관련된 진동 파라미터를 유도하기 위해 필요한 응력 식과 전기적 변위 식을 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_\theta = c_{11}^E e_\theta + c_{12}^E e_z + c_{13}^E e_r - e_{13} E_r \quad (7a)$$

$$\sigma_z = c_{12}^E e_\theta + c_{11}^E e_z + c_{13}^E e_r - e_{13} E_r \quad (7b)$$

$$\sigma_r = c_{13}^E e_\theta + c_{13}^E e_z + c_{33}^E e_r - e_{33} E_r \quad (7c)$$

$$D_r = e_{13} e_\theta + e_{13} e_z + e_{33} e_r + \epsilon_{33}^S E_r \quad (7d)$$

식(7)의 ε_r 과 E_r 은 식(1)과 식(4)에 의해 각각 $\bar{\varepsilon}_r$ 과 \bar{E}_r 로 된다. 그러면 세라믹에 대한 응력 식과 전기적 변위식은 식(7)로부터 다음과 같이 된다.

$$\sigma_\theta^c = c_{11}^E \varepsilon_\theta^c + c_{12}^E \varepsilon_z^c + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \quad (8a)$$

$$\sigma_z^c = c_{12}^E \varepsilon_\theta^c + c_{11}^E \varepsilon_z^c + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \quad (8b)$$

$$\sigma_r^c = c_{13}^E \varepsilon_\theta^c + c_{13}^E \varepsilon_z^c + c_{33}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{33} \bar{E}_r \quad (8c)$$

$$D_r^c = e_{13} \varepsilon_\theta^c + e_{13} \varepsilon_z^c + e_{33} \bar{\varepsilon}_r + \epsilon_{33}^S \bar{E}_r \quad (8d)$$

고분자는 등방성 매질이고 압전성이 없으므로 응력 식과 전기적 변위 식은 다음과 같다.

$$\sigma_\theta^p = c_{11} \varepsilon_\theta^p + c_{12} \varepsilon_z^p + c_{12} \bar{\varepsilon}_r \quad (9a)$$

$$\sigma_z^p = c_{12} \varepsilon_\theta^p + c_{11} \varepsilon_z^p + c_{12} \bar{\varepsilon}_r \quad (9b)$$

$$\sigma_r^p = c_{12} \varepsilon_\theta^c + c_{12} \varepsilon_z^c + c_{11} \bar{\varepsilon}_r \quad (9c)$$

$$D_r^p = \epsilon_{11} \bar{E}_r \quad (9d)$$

등방성이므로 c_{33} 과 c_{13} 은 각각 c_{11} 과 c_{12} 로 표기되고, ϵ_{33} 은 ϵ_{11} 로 표기된다.

두께 진동에서 복합재의 원주방향과 폭방향의 길이가 과장보다 훨씬 길므로 원주방향 변형률과 폭방향 변형률을 무시한다. 그러면 $\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_z = 0$ 이므로 식(2a)와 (2b)로부터 압전 세라믹에서의 원주방향 변형률과 폭방향 변형률은 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon_\theta^c = -(\tilde{\Gamma}/\Gamma) \varepsilon_\theta^p \quad (10a)$$

$$\varepsilon_z^c = -(\tilde{\Gamma}/\Gamma) \varepsilon_z^p \quad (10b)$$

이 식들을 식(8a)와 (8b)에 대입하여 정리하면 압전 세라믹에서의 원주방향과 폭방향 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_\theta^c = -\frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} (c_{11}^E \varepsilon_\theta^p + c_{12}^E \varepsilon_z^p) + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \quad (11a)$$

$$\sigma_z^c = -\frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} (c_{12}^E \varepsilon_\theta^p + c_{11}^E \varepsilon_z^p) + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \quad (11b)$$

식(9a)와 식(11a)를 식(3a)에 대입하고, 식(9b)와 식(11b)를 식(3b)에 대입하면 다음과 같다.

$$-\frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} (c_{11}^E \varepsilon_\theta^p + c_{12}^E \varepsilon_z^p) + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r = c_{11} \varepsilon_\theta^p + c_{12} \varepsilon_z^p + c_{12} \bar{\varepsilon}_r \quad (12a)$$

$$-\frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} (c_{12}^E \varepsilon_\theta^p + c_{11}^E \varepsilon_z^p) + c_{13}^E \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r = c_{12} \varepsilon_\theta^p + c_{11} \varepsilon_z^p + c_{12} \bar{\varepsilon}_r \quad (12b)$$

이 식을 행렬 형태로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} c_{11} + \frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} c_{11}^E & c_{12} + \frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} c_{12}^E \\ c_{12} + \frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} c_{12}^E & c_{11} + \frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma} c_{11}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_\theta^p \\ \varepsilon_z^p \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} (c_{13}^E - c_{12}) \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \\ (c_{13}^E - c_{12}) \bar{\varepsilon}_r - e_{13} \bar{E}_r \end{pmatrix}$$

고분자에서의 반경방향 변형률 ε_θ^p 와 폭방향 변형률 ε_z^p 가 식 (13)으로부터 구해진다. 구한 결과를 (12)에 대입해서 원주방향 변형률 ε_θ^c 와 폭방향 변형률 ε_z^c 를 구한다. 이 결과들을 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_\theta^c = \varepsilon_z^c = \tilde{\Gamma} \frac{-(c_{13}^E - c_{12})\bar{\varepsilon}_r + e_{13}\bar{E}_r}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (14a)$$

$$\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_z^p = \Gamma \frac{(c_{13}^E - c_{12})\bar{\varepsilon}_r - e_{13}\bar{E}_r}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (14b)$$

식 (14a)와 (14b)를 식 (8)과 식 (9)에 대입하면 응력 식과 전기적 변위 식은 다음과 같이 된다.

$$\sigma_\theta^c = \sigma_z^p = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = \hat{c}_{13}\bar{\varepsilon}_r - \hat{e}_{13}\bar{E}_r \quad (15a)$$

$$\sigma_r^c = c_{33}^c\bar{\varepsilon}_r - e_{33}^c\bar{E}_r \quad (15b)$$

$$D_r^c = \hat{e}_{33}\bar{\varepsilon}_r + \epsilon_{33}^S\bar{E}_r \quad (15c)$$

$$\sigma_r^p = c_{33}^p\bar{\varepsilon}_r \quad (15d)$$

$$D_r^p = \epsilon_{11}\bar{E}_r \quad (15e)$$

Table 1 Material properties of EC 64 piezoelectric ceramic

Constant		Value
Elastic stiffness constant ($\times 10^9$ N/m ²)	c_{11}^E	132.2
	c_{12}^E	73.4
	c_{13}^E	72.6
	c_{33}^E	117.9
	c_{55}^E	25.7
	c_{66}^E	29.4
Piezoelectric stress constant (C/m ²)	e_{13}	-4.7
	e_{33}	16.3
	e_{15}	13.0
Dielectric constant (10^{-9} C ² /N·m ²)	ϵ_{11}^S	7.81
	ϵ_{33}^S	7.28
Mass density (kg/m ³)	ρ	7,500

Table 2 Material properties of epoxy

Constant		Value
Elastic stiffness constant ($\times 10^9$ N/m ²)	c_{11}	5.3
	c_{12}	3.1
Mass density (kg/m ³)	ρ	1,120

여기서

$$c_{33}^c = \left[c_{33}^E - \frac{2\tilde{\Gamma}c_{13}^E(c_{13}^E - c_{12})}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (15f)$$

$$e_{33}^c = \left[e_{33} - \frac{2\tilde{\Gamma}c_{13}^E e_{13}}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (15g)$$

$$\hat{c}_{13} = \frac{\Gamma c_{13}^E(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}c_{12}(c_{11}^E + c_{12}^E)}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (15h)$$

$$\hat{e}_{13} = \frac{\Gamma e_{13}(c_{11} + c_{12})}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (15i)$$

식 (15b)와 (15d)를 식 (6a)에 대입하여 복합재의 반경방향 응력을 구하고, 식 (15c)와 식 (15e)를 식 (6b)에 대입하여 전기적 변위를 구한다. 이 결과들을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{\sigma}_r = \hat{c}_{33}\bar{\varepsilon}_r - e_{33}^c\bar{E}_r \quad (16a)$$

$$\bar{D}_r = \hat{e}_{33}\bar{\varepsilon}_r + \epsilon_{33}^S\bar{E}_r \quad (16b)$$

여기서

$$\hat{c}_{33} = \Gamma \left[c_{33}^E - \frac{2\tilde{\Gamma}(c_{13}^E - c_{12})^2}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{\Gamma}c_{11} \quad (16c)$$

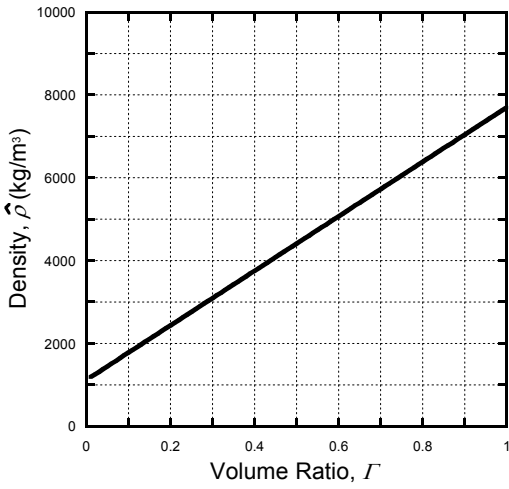
$$\hat{e}_{33} = \Gamma \left[e_{33} - \frac{2\tilde{\Gamma}e_{13}(c_{13}^E - c_{12})}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (16d)$$

$$\hat{\epsilon}_{33} = \Gamma \left[\epsilon_{33}^S + \frac{2\tilde{\Gamma}e_{31}^2}{\Gamma(c_{11} + c_{12}) + \tilde{\Gamma}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{\Gamma}\epsilon_{11} \quad (16e)$$

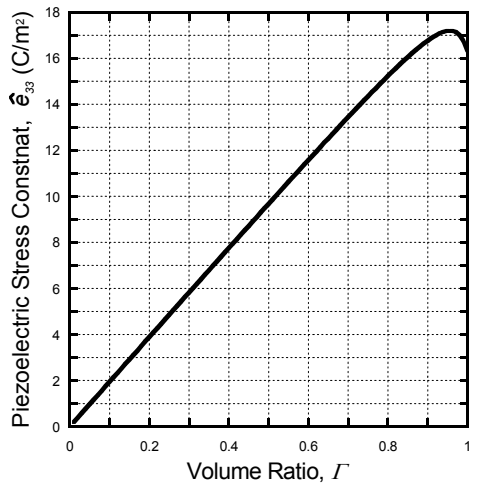
원호형 1-3 압전 복합재의 두께 진동 모드와 관련된 파라미터들을 유도하였다. 유도된 파라미터들은 앞 절의 가정들에 의해서 결과적으로 평판형 1-3 압전 복합재의 두께 진동 모드와 관련된 파라미터들⁽²⁾과 동일하다.

2.3 체적비에 따른 진동 파라미터들의 변화

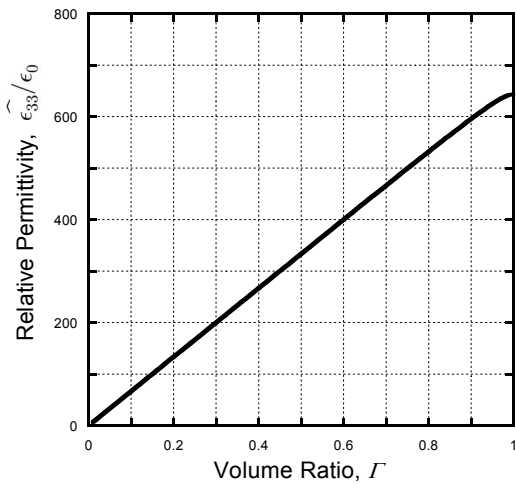
앞 절에서 유도한 복합재의 진동 파라미터 식들을



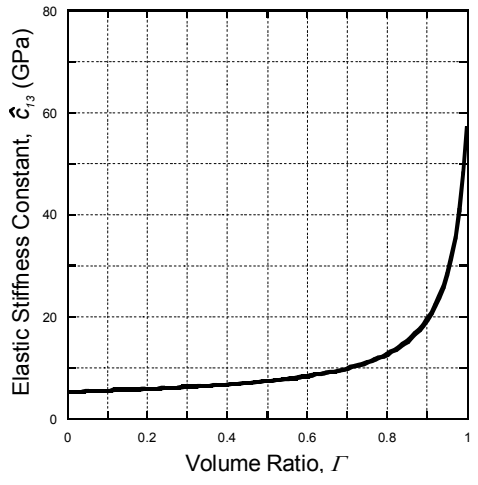
(a) $\hat{\rho}$



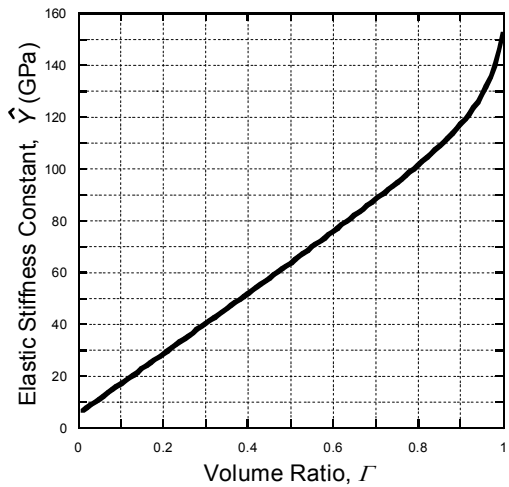
(d) \hat{e}_{33}



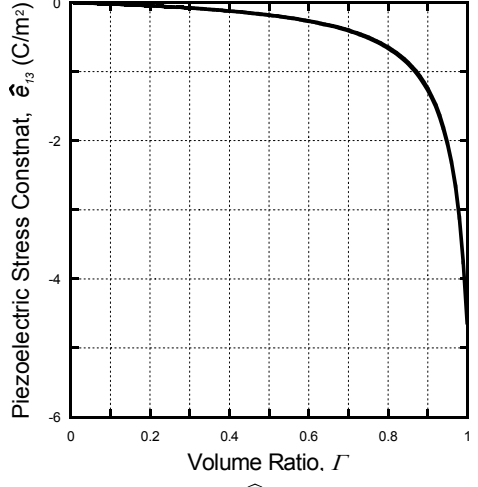
(b) $\hat{\epsilon}_{33}/\epsilon_0$



(e) \hat{c}_{13}



(c) \hat{Y}



(f) \hat{e}_{13}

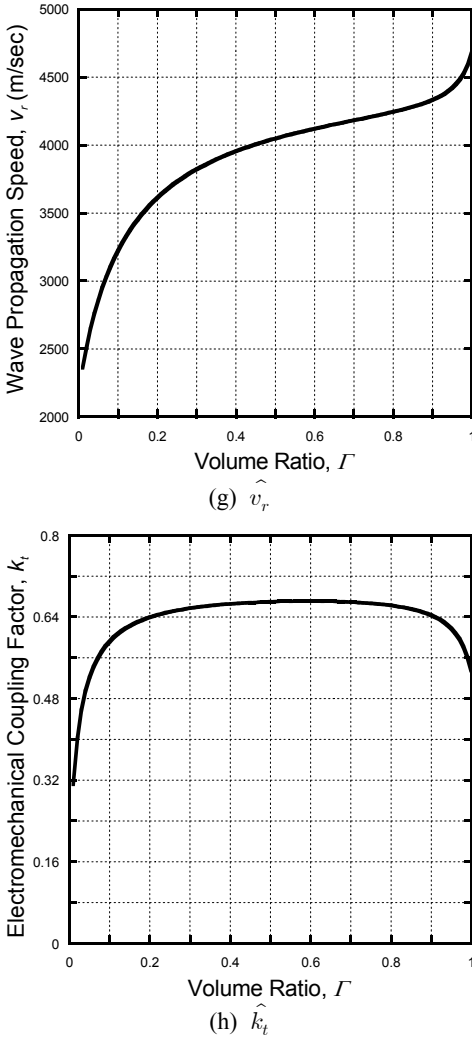


Fig. 4 Variation in the parameters according to the volume ratio Γ of the ceramic

이용하여, 압전 세라믹의 체적비에 따른 파라미터들의 변화를 구하였다. 구한 결과를 Fig. 4에 보였다. 계산에는 Table 1의 압전 세라믹 물성치와 Table 2의 에폭시의 물성치⁽²⁾를 이용하였다.

Fig. 4의 (a)와 (b)에 보인 바와 같이, 복합재의 밀도 $\hat{\rho} (= \Gamma\rho^c + \tilde{\Gamma}\rho^p)$ 와 유전율 $\hat{\epsilon}_{33}$ 은 세라믹의 체적비에 비례한다. (c)에 보인 바와 같이, 복합재의 강성 $\hat{Y} (= \hat{c}_{33} + (\hat{e}_{33})^2/\hat{\epsilon}_{33}^2)$ 는 체적비를 따라 선형적으로 증가하다가 체적비가 1에 가까워지면 강성은 갑자기 비선형적으로 크게 증가한다. 반면에 \hat{e}_{33} 은 (d)에 보인 바와 같이 체적비를 따라 선형적으로 증

가하다가 체적비가 1에 가까워질 때 약간 감소한다. (e)와 (f)에 보인 바와 같이, \hat{c}_{13} 와 \hat{e}_{13} 의 크기는 체적비에 따라 조금씩 증가하다가 0.8 이상에서는 갑자기 비선형적으로 크게 증가한다. (g)에 보인 바와 같이, 반경방향 파동의 전파속도 $v_r (= (\hat{Y}/\hat{\rho})^{1/2})$ 은 체적비가 0에서 0.2까지는 크게 증가하다가 0.4 부근에서 완만해진다. 그러다가 0.8 이상에서 다시 큰 폭으로 계속 증가한다. 복합재의 전기-기계 결합 계수 $\hat{k}_t (= \hat{e}_{33}/(\hat{Y}\hat{\epsilon}_{33})^{1/2})$ 는 (h)에 보인 바와 같이 처음에는 큰 폭으로 증가해 체적비가 0.2가 되면, 거의 세라믹 막대의 전기-기계 결합 계수인 k_{33} 의 크기와 비슷해져서 0.8이 될 때까지 거의 일정하게 유지된다. 그러다가 0.8 이상이면 이 계수는 감소하여 세라믹 원판의 두께 진동의 전기-기계 결합 계수인 k_t 와 같아진다. 그러므로 전기-역학적 에너지 변환 효율을 높이기 위해선 압전 세라믹의 체적비를 0.2 이상 0.8 이하로 하는 것이 적절하다.

3. 진동 특성 해석

앞 절에서 원호형 1-3 압전 복합재 변환기의 진동 파라미터들을 유도하였다. 유도된 파라미터들을 이용해 이 절에서는 변환기의 진동 특성을 해석한다. 변환기의 지배방정식으로부터 특성방정식을 유도한다.

3.1 지배 방정식

두께 진동에서 복합재의 원주방향과 폭방향의 길이가 파장보다 훨씬 길므로 원주방향과 폭방향에 평면 변형률을 적용한다. 그러면 전단변형률인 $\gamma_{r\theta}$ 와 γ_{rz} 은 0이다. 또한 전기장은 반경방향이므로 $\partial\phi/\partial\theta = \partial\phi/\partial z = 0$ 이다. 따라서 전단 응력인 $\tau_{r\theta}$ 와 τ_{rz} 는 0이 된다. 원호형 구조에서 반경 방향 힘의 평형으로부터 얻은 평형방정식은 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{r} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (17)$$

여기서 $\bar{\rho} = \Gamma\rho^c + \tilde{\Gamma}\rho^p$ 로 평균 밀도이다.

전기적 변화도 동적 현상인데, 전자기파의 전파속도가 탄성파의 전파속도에 비해 엄청나게 빠르기 때문에, 준 정적(quasi-state) 현상으로 간주한다. 원호 구조에서 정전기적 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} + \frac{\bar{D}_r}{r} = 0 \quad (18)$$

식 (15a)와 (16a)를 (17)에 대입하고, 식 (16b)를 식 (18)에 대입하면 다음과 같은 지배식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{c}_{33} - \widehat{c}_{13}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \\ + \widehat{e}_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{e}_{33}}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \widehat{e}_{33} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \widehat{e}_{33} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r}] = 0 \quad (19b)$$

식 (19b)를 반경좌표 r 에 대해서 적분하고 전기 퍼텐셜 $\bar{\phi}$ 에 대해서 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \frac{\widehat{e}_{33}}{\widehat{e}_{33}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + A_3 \frac{1}{r} \quad (20)$$

식 (20)을 식 (19a)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + (1 - \frac{\widehat{c}_{13}}{\widehat{Y}}) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (21)$$

여기서 $c_L = [\widehat{Y}/\bar{\rho}]^{1/2}$ 은 압전 복합재에서 반경방향 종파의 전파속도이고, $\widehat{Y} = \widehat{c}_{33} + \widehat{e}_{33}^2/\widehat{e}_{33}$ 은 탄성 상수이다.

진극에 가해지는 전기신호가 진동수 ω 로 시간 t 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면, 진동 변위들도 시간 t 에 대한 조화함수 형태로 간주된다. 따라서 $\bar{u}(r,t)$ 와 $\bar{\phi}(r,t)$ 를 다음과 같이 변수 분리한다.

$$\bar{u}(r,t) = U(r) e^{j\omega t} \quad (22a)$$

$$\bar{\phi}(r,t) = \Phi(r) e^{j\omega t} \quad (22b)$$

식 (22)를 식 (21)에 대입하면 $U(r)$ 에 대한 지배 방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + (1 - \frac{\widehat{c}_{13}}{\widehat{Y}}) \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + k^2 U = 0 \quad (23)$$

여기서 $k (= \omega/c_L)$ 는 파동수이다.

식 (23)을 풀기위해 $U = r^p Z(r)$ 을 대입하여 정리

하면 다음과 같다.

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + (k^2 r^2 - p^2) Z = 0 \quad (24)$$

여기서 $p = [\widehat{c}_{13}/(2\widehat{Y})]$ 이다. 식 (24)를 풀면 변위 해는 다음과 같이 된다.

$$U(r) = r^p [A_1 J_p(kr) + A_2 J_{-p}(kr)] \quad (25)$$

식 (25)를 식 (20)에 대입하여 변수 분리한 후 공간에 대해 적분해서 $\Phi(r)$ 를 구하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Phi(r) \\ = \frac{\widehat{e}_{33}}{\widehat{e}_{33}} r^p [A_1 J_p(kr) + A_2 J_{-p}(kr)] + A_3 \ln r + A_4 \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25)와 (26)에서 결정되지 않은 상수 A_1, A_2, A_3, A_4 는 경계조건에 따라 결정된다.

3.2 진동 특성방정식

Fig. 2에 보인 원호형 변환기의 내부 반지름은 R_i 이고 외부 반지름은 R_o 이다. 이 변환기는 내면과 외면 사이에 작용하는 전압 $V_o e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 이에 대한 경계 조건을 다음과 같이 설정한다.

$$r = R_i \text{ 에서 } \Sigma_r = 0, \Phi = 0 \quad (27a)$$

$$r = R_o \text{ 에서 } \Sigma_r = 0, \Phi = V_o \quad (27b)$$

변위 해 (25)를 식 (16a)에 대입한 결과로부터 얻은 응력해 $\bar{\sigma}_r (= \Sigma_r(r) e^{j\omega t})$ 과 식 (26)에 경계조건 (27)을 적용하면, 결정되지 않은 상수 A_1, A_2, A_3, A_4 에 대한 식 (28)을 얻는다.

$$f_1(kR_i) A_1 + f_2(kR_i) A_2 + \frac{\widehat{e}_{33}}{R_i} A_3 = 0 \quad (28a)$$

$$g_1(kR_i) A_1 + g_2(kR_i) A_2 + A_3 \ln R_i + A_4 = 0 \quad (28b)$$

$$f_1(kR_o) A_1 + f_2(kR_o) A_2 + \frac{\widehat{e}_{33}}{R_o} A_3 = 0 \quad (28c)$$

$$g_1(kR_o) A_1 + g_2(kR_o) A_2 + A_3 \ln R_o + A_4 = V_o \quad (28d)$$

여기서

$$f_1(kr) = \hat{Y} \frac{d[r^p J_p(kr)]}{dr} \quad (28e)$$

$$f_2(kr) = \hat{Y} \frac{d[r^p J_{-p}(kr)]}{dr} \quad (28f)$$

$$g_1(kr) = \frac{\hat{e}_{33}}{\epsilon_{33}} r^p J_p(kr) \quad (28g)$$

$$g_2(kr) = \frac{\hat{e}_{33}}{\epsilon_{33}} r^p J_{-p}(kr) \quad (28h)$$

식 (24)의 해를 구하는 과정에서 특성방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (29a)$$

여기서

$$D_{11} = R_o f_1(kR_o) - R_i f_1(kR_i) \quad (29b)$$

$$D_{12} = R_o f_2(kR_o) - R_i f_2(kR_i) \quad (29c)$$

$$D_{21} = g_1(kR_o) - g_1(kR_i) - \frac{R_o}{\hat{e}_{33}} f_1(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i} \quad (29d)$$

$$D_{22} = g_2(kR_o) - g_2(kR_i) - \frac{R_o}{\hat{e}_{33}} f_2(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i} \quad (29e)$$

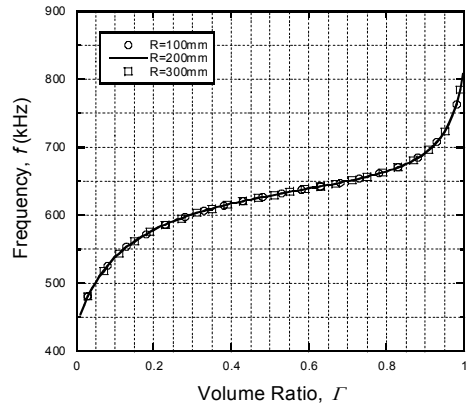
식 (29a)는 $V_0 = 0$, 즉 short circuit인 경우에 얻어지는 자유진동 모드의 특성방정식과 같다. 식 (29a)로부터 원호형 압전 복합재 변환기의 두께 진동 공진주파수를 구한다.

4. 결과 비교

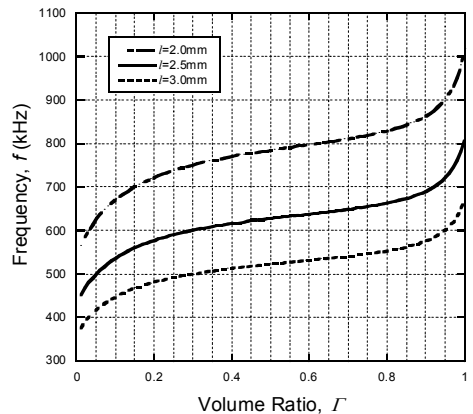
4.1 해석 결과

이 논문에서 대상으로 하는 1-3 압전 복합재는 Fig. 2에 보인 바와 같이 원호형이다. 이는 Fig. 1에 보인 평판형 압전 복합재가 일정한 곡률로 굽혀져 만들어진다. 압전 세라믹은 미국 EDO사의 EC64로서 PZT4 계열이고, 이것의 물성치는 Table 1에 정리되어 있다. 고분자 재료는 에폭시로서, 이것의 물성치⁽²⁾를 Table 2에 기재하였다. 식 (15h)~(15i)와

(16c)~(16e)를 이용해 1-3 압전 복합 복합재의 물성치들을 계산하였다. 압전 세라믹의 체적비 Γ 에 따른 원호형 1-3 압전 복합재의 공진주파수를 이론 해석을 통해 구하였다. 이 물성치와 치수를 식 (29a)에 대입한 후, Mathematica⁽¹⁰⁾의 FindRoot 기능을 사용하여 공진주파수를 계산하여 Fig. 5에 나타내었다. (a)는 두께가 2.5 mm 이고, 곡률 반지름이 각각 100, 200, 300 mm 인 세 가지 경우에 대하여 공진주파수를 계산한 결과이다. (b)는 곡률 반지름이 200 mm 이고 두께가 각각 2.0, 2.5, 3.0 mm 인 세 가지 경우에 대하여 계산한 결과이다. (a)에서 보듯이, 곡률 반지름이 다르지만 두께가 같은 세 개의 변환기의 공진주파수는 일치한다. 반면에 (b)에서 보듯이, 곡률 반지름이 같지만 두께가 다른 변환기의



(a) Thickness $l = 2.5$ mm



(b) Radius $R = 200$ mm

Fig. 5 Variation in the resonance frequency according to the thickness or radius: (a) thickness $l = 2.5$ mm, (b) radius $R = 200$ mm

공진주파수는 다르며, 두께가 얇을수록 공진주파수가 높다. (a)와 (b)에 보인 결과들은 곡률 반지름이 두께보다 훨씬 큰 원통형 변환기에서 두께진동 모드에서 관찰되는 경향⁽¹¹⁾과 일치한다.

4.2 유한요소해석과 비교

이론적 해석 결과의 타당성을 확인하기 위하여 유한요소법에 의한 수치해석을 하였다. 유한요소해석용 상용 프로그램인 ANSYS를 이용하여 원호형 1-3 압전 복합재의 공진주파수를 구하였다.

1-3 압전 복합재 전체를 해석하는 과정은 많은 요소 개수로 인해 해석 시간이 상당히 오래 걸리므로, 고분자 재료에 하나의 세라믹 막대가 삽입된 모델로 해석한 사례⁽¹²⁾가 있다. 그러나 이러한 해석 방법은 복합재의 진동 형상을 예상하기 어렵다. 그래서 Fig. 6과 같이 1/4 모델로 해석을 실시하였다. 압전 현상을 포함하는 couple-field 요소인 solid 5를 압전 세라믹에 사용하고, 구조 요소인 solid 45를 에폭시에 사용하여 모델링하였다. Fig. 6의 모델은 두께가

2.5 mm이고 안쪽 곡률 반지름이 100 mm인 고분자 매트릭스에 세라믹 막대가 0.75 mm의 간격으로 배치된 경우이다. 경계 조건은 A-A' 절단면에서 폭방향 변위 w 를 구속하고, B-B' 절단면에서 원주방향 변위 v 를 구속하였다. 그리고 원호 안쪽 면과 바깥 면에서 전압을 0(short circuit)이라고 한 후 Block Lancos법으로 모드 해석을 하였다. 세라믹 막대의 폭 e 를 변경해서 체적비를 변화시켜 가며 구한 공진주파수를 이론적으로 계산한 결과와 함께 Fig. 7에 나타내었다. 여기서 실선은 이론 해석 결과이고, 사각형은 유한요소해석 결과이다. 두 가지 결과들이 잘 일치한다.

4.3 실험과 비교

해석 결과의 검증을 위해, 주문 제작한 원호형 압전 복합재 시편을 가지고 공진주파수를 측정하였다. 시편의 안쪽 곡률 반지름은 다섯 가지로서 100, 150, 200, 250, 300 mm이고, 두께는 2.38~2.48 mm이다. 압전 세라믹의 체적비는 0.44 ± 0.05 이다.

다섯 가지 두께의 시편 총 열 개에 대해서 HP 4194A Impedance Analyzer로 주파수에 따른 임피던스를 측정하고, 그 중에서 곡률 반지름이 100 mm이고 두께가 2.47 mm인 압전 복합재 변환기에 대한 결과를 Fig. 8에 나타내었다. 이 그래프에서 임피던스 극소점 위치가 공진주파수로 622.0 kHz이다. 마찬가지로 열 개의 시편에 대해서 식 (29a)로부터 계산된 공진주파수를 측정 결과와 함께 Table 3에 제시하였다. 계산한 공진주파수는 측정 결과와 대체

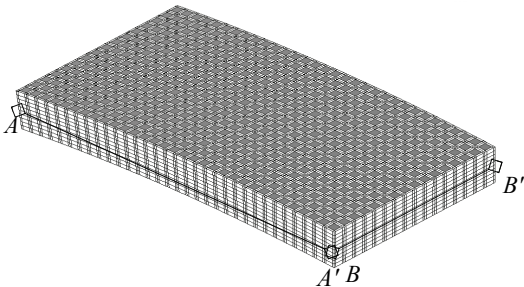


Fig. 6 Finite analysis model

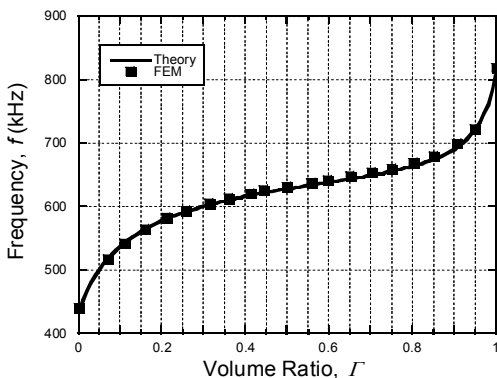


Fig. 7 Comparison of the calculated frequencies and ones obtained from the finite element analysis ($R = 100$ mm, $l = 2.5$ mm)

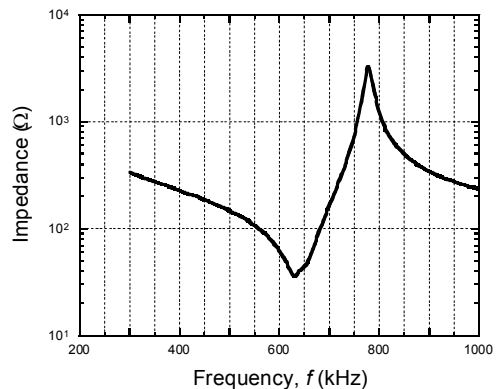


Fig. 8 Impedance curve for a 1-3 piezoelectric composite of circular arch shape($R = 100$ mm, $l = 2.47$ mm)

Table 3 Comparison of the calculated resonance frequencies and measured ones

Specimen number	Thickness (mm)	Curvature radius (mm)	Fundamental resonant frequency, f_r (kHz)		Discrepancy (%)
			Calculation	Measurement	
1	2.38	300	652.9	653.5	0.1
2	2.42	150	642.1	648.3	1.0
3		300	642.1	636.0	1.0
4	2.44	150	642.1	630.8	1.8
5		100	636.8	630.8	1.0
6	2.47	250	636.8	627.3	1.5
7			636.8	623.8	2.1
8	2.48	200	629.1	622.0	1.1
9		100	629.1	618.5	1.7
10	2.48	200	626.5	616.8	1.6

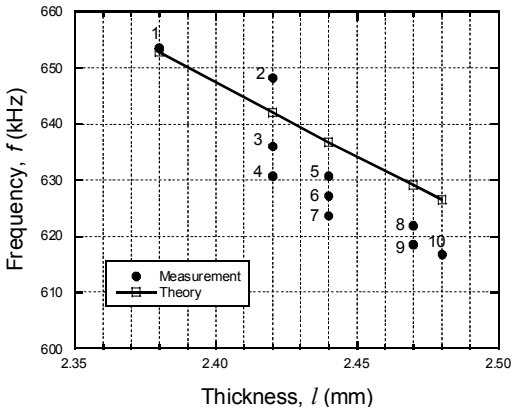


Fig. 9 Comparison of the calculated resonance frequencies and measured ones : Specimen numbers are list in Table 3

로 2% 범위내에서 일치한다. 이론으로 구한 공진 주파수는 Fig. 5의 (b)에서 처럼 두께에 따라서 변화한다. 그래서 Table 3에 제시된 결과를 두께와 공진주파수의 관계로 Fig. 9에 나타내었다. 여기서 동그라미는 측정 결과이고, 사각형은 계산 결과이다. 비교 결과 경향이 대체로 잘 맞는 것을 확인 할 수 있다. 두께와 공진주파수와의 상관관계를 유도하기 위해선 곡률 반지름을 동일하게 하고 두께만 다르게 시편을 제작하여 측정 결과를 얻어야 하지만, 이렇게 제작하는 것은 어려웠다. 그런데 Fig. 9에서 보는 것처럼, 시편 2, 3과 시편 4, 5, 6에서 곡률반지름과 공진주파수 간에는 일관성이 없으나, 두께가 얇아질수록 공진주파수가 커지는 것을 확인할 수

있다. 측정 결과가 계산 결과에 비해 대체로 작은데 이는 복합재를 제작하는 데 사용된 에폭시의 물성치가 계산에 사용된 것과 달라서 발생한 차이로 판단된다.

5. 결 론

원호형 1-3 압전 복합재 변환기에 대해서, 체적비에 따라서 진동 파라미터들을 유도하고, 이를 이용하여 공진주파수를 수치 계산으로 구하였다. 이를 유한요소 해석 결과 및 실험 결과와 비교하여 이론적 해의 타당성을 검증하였다. 기본모드는 진동방향이 반경방향인 두께진동에 해당하는 것으로 압전 세라믹의 체적비가 커질수록 공진주파수가 높아지는 것을 확인하였다. 또한 곡률 반지름과 두께에 의한 기본 공진주파수 변화를 살펴보았다. 체적비가 일정할 때 곡률반지름의 영향은 거의 나타나지 않았고, 두께가 얇아질수록 기본 공진주파수가 높아지는 것을 확인하였다. 원호형 1-3 압전 복합재의 기본 모드 공진 특성은 곡률 반지름보다는 체적비와 두께에 의해 결정된다.

후 기

이 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어졌음.

참 고 문 헌

- (1) Safari, A., Allahverdi, M. and Akdogan, E. K., 2006, "Solid Freeform Fabrication of Piezoelectric Sensors and Actuators," Journal for Materials Science, Vol. 41, pp. 178-198.
- (2) Smith, W. A. and Alud, B. A., 1991, "Modeling 1-3 Composite Piezoelectrics: Thickness-mode Oscillations," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 38, No. 1, pp. 40-47.
- (3) Takeuch, H., Nagaya, C. and Katakura, K., 1984, "Medical Ultrasonic Probe Using PZT/polymer Composite," Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium, pp. 507-510.

(4) Benjamin, K. C., 2002, "Recent Advances in 1-3 Piezoelectric Polymer Composite Transducer Technology for AUV/UUV Acoustic Imaging Applications," *Journal of Electroceramics*, Vol. 8, pp. 145~154.

(5) Hwang, K. K. and Kim, J. O., 2004, "Measurement of Axisymmetric-wave Speed in a Pipe by Using Piezoelectric Cylindrical Transducers," *The Journal of the Acoustical Society of Korea*, Vol. 23, No. 1E, pp. 19~23.

(6) Gururaja, T. R., Schulze, W. A., Cross, L. E., Newnham, R. E., Alud, B. A. and Wang, Y. J., 1985, "Piezoelectric Composite Materials for Ultrasonic Transducer Applications. Part I: Resonant Modes of Vibration for PZT Rod-polymer Composites", *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-32, pp. 481~498.

(7) Chan, H. L. W. and Joseph, U., 1989, "Simple Model for Piezoelectric Ceramic/Polymer 1-3 Composites Used in Ultrasonic Transducer Applications," *IEEE Transactions on Ultrasonics*,

Ferroelectrics, and *Frequency control*, Vol. 36, No. 4, pp. 434~441.

(8) Dowling, N. E., 1999, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice-Hall, New Jersey, Chapter 5.

(9) Achenbach, J. D., 1975, "Wave Propagation in Elastic Solids," Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Chapter 2.

(10) Wolfram, 1999, *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media Inc., Champaign.

(11) Hwang, K. K. and Kim, J. O., 2003, "Characteristics of the Radial Vibration of Cylindrical Piezoelectric Transducers," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 155~163.

(12) Hossack, J. A. and Hayward, G., 1991, "Finite-element Analysis of 1-3 Composite Transducers," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 38, No. 6, pp. 618~629.