

# CTIS를 장착한 대형차량의 동역학 해석 모델

## Full Vehicle Model for Dynamic Analysis of a Large Vehicle with CTIS

송 오 섭\*·남 경 모\*

Ohseop Song and Kyungmo Nam

(2009년 7월 2일 접수 ; 2009년 11월 2일 심사완료)

**Key Words** : CTIS(central tire inflation system), Full Vehicle Model(전차량 모델), Road Test(실차시험)

### ABSTRACT

Appropriate vibration model is required to predict in advance the vibration level of a large vehicle which carries sensitive electronic/mechanical equipments and drives often on the unpaved and/or off-road conditions. Central tire inflation system(CTIS) is recently adopted to improve the mobile operation of military and bulletproof vehicles. In this paper, full vehicle model(FVM) having 11 degrees of freedom and equipped with CTIS has been developed for a large vehicle which has 8×8 wheels×driving wheels. Usability of the developed model is validated via road tests for three different modes (i.e. highway, country, and mud/sand/snow modes) and for various velocity conditions. The developed FVM can be used to predict the vibration level of the large vehicle as well as to determine the driving velocity criterion for different road conditions.

$V$  : 주행속도(km/h)

### 기 호 설 명

- a,e,f,b : 무게중심에서 1,2,3,4차축까지의 거리(m)
- $\alpha$  : 차체의 x-축 중심 회전(roll, rad)
- c,d : 무게중심에서 오른/왼쪽바퀴까지의 거리(m)
- $c_1, c_2, \dots, c_8$  : 현수장치 감쇠계수(Ns m<sup>-1</sup>)
- $I_{\theta}, I_{\alpha}$  : 피치와 롤의 질량 관성모멘트(kg m<sup>2</sup>)
- $k_1, k_2, \dots, k_8$  : 현수장치 스프링상수(N m<sup>-1</sup>)
- $k_{t1}, k_{t2}, \dots, k_{t8}$  : 타이어의 스프링상수(N m<sup>-1</sup>)
- $M_0$  : 차체의 질량(kg)
- $m_1, m_2, \dots, m_8$  : 타이이어 질량(kg)
- $\theta$  : 차체의 y-축 중심 회전(pitch, rad)
- $z_{ri1}, z_{ri2}, \dots, z_{ri8}$  : 주행 노면의 변위(m)
- $z_1, z_2, \dots, z_8$  : 바퀴의 상하방향 변위(m)
- $z_0$  : 차체의 z방향 변위(bounce, m)

### 1. 서 론

차량에서 발생된 진동은 탑승자의 승차감뿐만 아니라 차량에 탑재된 전기/기계장비에도 영향을 미치게 된다. 차량의 진동특성을 이해하는 것은 기동성능을 향상시키고 탑재장비의 성능을 유지시키기 위한 중요한 요소이다. 차량의 개발과 탑재되는 전자장비의 개발이 동시에 수행될 때는 차량의 진동특성을 알 수 없기 때문에 장비 개발을 위한 적절한 진동규격 제공에 어려움을 겪게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 차량 제작 전에 진동특성을 예측할 수 있는 모델에 대한 필요성이 제기되고 있으며, 차량동역학 해석을 위해서 여러 방법이 제안되고 있다<sup>(1-4)</sup>. 또한 대형차량에서는 차량의 진동을 줄이고 기동성능을 향상시키기 위해서 설계변수를 조정하는 동시에 CTIS(central tire inflation system)와 같은 특수한 장비를 장착하기도 한다. 특히, 군용차량은 운용조건이 일반차량과 다르게 비포장 도

† 교신저자; 정회원, 충남대학교 기계공학과  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642  
\* 국방과학연구소

는 야지 운행이 이루어져야 하므로 내구성과 기동 성능이 많이 요구된다. 최근에 장갑차나 군용차량에서는 기동성능을 향상시키기 위해서 CTIS를 장착하여 사용하는 사례가 늘어나고 있다. CTIS는 중앙 집중식 타이어공기압 조절장치이며, 운전석에 제어 장치가 장착되고 각 바퀴에는 타이어에 공기압을 유지시키기 위해서 필요한 밸브가 장착되어 주행 중 선택에 따라서 타이어 압력을 변경/유지 시켜주는 장치이다. 도로의 노면상태 또는 운행속도에 따라서 공기압을 설정하게 되는데 공기압이 조절됨에 따라서 지면과의 접지력과 차량의 진동특성이 변하게 된다. CTIS의 적절한 운용을 위해서는 접지력 향상뿐만 아니라 이것으로 인해서 유발되는 진동에 대해서도 많은 연구가 필요하다<sup>(5,6)</sup>.

이 논문에서는 CTIS를 장착한 대형차량(8×8, 바퀴×구동축)의 진동특성을 분석할 수 있는 11자유도의 전차량 모델(full vehicle model)을 개발하였으며, 실차시험을 통해서 모델의 유용성을 검증하였다. 실차시험은 단일 범프 통과시험과 포장도로, 비포장도로, 야지(진흙/모래/눈길) 3가지 CTIS 모드를 설정하여 속도를 변화시켜가며 주행시험을 수행하였다. 시험결과로부터 CTIS 모드별로 운행속도의 한계치 설정에 사용될 수 있는 유용한 정보를 도출하였다. 개발된 FVM을 활용하여, 요철로 통과 시 진동을 줄이기 위한 적절한 주행 속도를 찾고, 비포장도로 주행 시 적절한 타이어 압을 결정할 수 있는 자료를 도출하였다. 이러한 결과를 통해서 CTIS 장착차량이 각 운용모드에서 적절한 압력을 설정하고, 주행속도를 결정할 수 있는 방법을 진동측면에서 고려하여 제시하고자 한다.

## 2. 본 론

### 2.1 전차량 모델(FVM)

11자유도를 가지는 전차량 모델을 Fig. 1과 같이 표현하였으며, 차량의 전진방향을 x축, 좌우방향을 y축, 상하방향을 z축으로 설정하였다. 차량의 운동 방정식은 라그랑지 방정식을 이용하여 식 (1)과 같이 유도할 수 있다.

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = u \quad (1)$$

식 (1)에서,  $M$ 은 질량행렬,  $C$ 는 감쇠행렬,  $K$ 는

강성행렬,  $u$ 는 타이어 스프링 상수에 노면의 변위를 곱한 값( $k_{ij} \times z_{rij}$ )이며 상세한 행렬의 내용은 부록에 제시하였다. 감쇠를 포함한 라그랑지 방정식은 식 (2)와 같다<sup>(9)</sup>.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

여기서  $Q_j$ 는 계에 작용하는 외력 (generalized forces)을 나타내며, 운동에너지  $T$ , 감쇠함수(dissipation function)  $D$ , 탄성에너지  $U$ 는 각각 아래 식 (3)~(5)와 같다.

$$T = \frac{1}{2} M_0 \dot{z}_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (3)$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 (\dot{z}_0 - \dot{z}_1 + \dot{z}_{1ac})^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{z}_0 - \dot{z}_2 + \dot{z}_{2ad})^2 + \frac{1}{2} c_3 (\dot{z}_0 - \dot{z}_3 + \dot{z}_{3bc})^2 + \frac{1}{2} c_4 (\dot{z}_0 - \dot{z}_4 + \dot{z}_{4bd})^2 + \frac{1}{2} c_5 (\dot{z}_0 - \dot{z}_5 + \dot{z}_{5cc})^2 + \frac{1}{2} c_6 (\dot{z}_0 - \dot{z}_6 + \dot{z}_{6cd})^2 + \frac{1}{2} c_7 (\dot{z}_0 - \dot{z}_7 + \dot{z}_{7fc})^2 + \frac{1}{2} c_8 (\dot{z}_0 - \dot{z}_8 + \dot{z}_{8fd})^2 \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (z_0 - z_1 + z_{1ac})^2 + \frac{1}{2} k_2 (z_0 - z_2 + z_{2ad})^2 + \frac{1}{2} k_3 (z_0 - z_3 + z_{3bc})^2 + \frac{1}{2} k_4 (z_0 - z_4 + z_{4bd})^2 + \frac{1}{2} k_5 (z_0 - z_5 + z_{5cc})^2 + \frac{1}{2} k_6 (z_0 - z_6 + z_{6cd})^2 + \frac{1}{2} k_7 (z_0 - z_7 + z_{7fc})^2 + \frac{1}{2} k_8 (z_0 - z_8 + z_{8fd})^2 \quad (5)$$

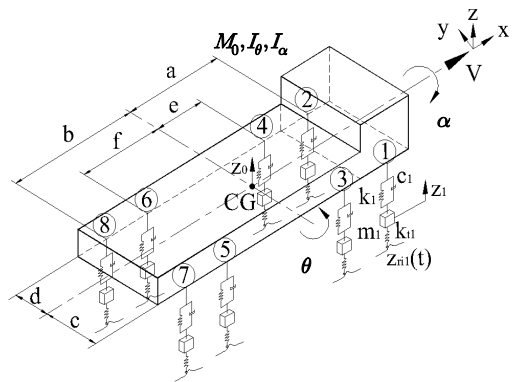


Fig. 1 Full vehicle model

식 (3)~(5)에서 차체의 바운스 운동에 의해 각 바퀴의 좌표계에 추가되는 변위는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 z_{1ac} &= a \sin\theta - c \sin\alpha \\
 z_{2ad} &= a \sin\theta + d \sin\alpha \\
 z_{3bc} &= -b \sin\theta - c \sin\alpha \\
 z_{4bd} &= -b \sin\theta + d \sin\alpha \\
 z_{5ac} &= e \sin\theta - c \sin\alpha \\
 z_{6ad} &= e \sin\theta + d \sin\alpha \\
 z_{7bc} &= -f \sin\theta - c \sin\alpha \\
 z_{8bd} &= -f \sin\theta + d \sin\alpha
 \end{aligned} \tag{6}$$

응답을 구하기 위해서 식 (1)을 상태방정식으로 변환하면 식 (7)과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{7}$$

여기서,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$   
 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \{z \ \dot{z}\}^T$

식 (7)의 해는 다음 식 (8)과 같다.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{8}$$

식 (8)을 시간에 관한 이산시스템으로 변환하면 다음 식 (9)와 같다.

$$\mathbf{x}^i = \phi\mathbf{x}^{i-1} + \psi\mathbf{u}^i, \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(0), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{9}$$

여기서,  $\mathbf{x}(0)$ 는 초기값 벡터, 천이행렬  $\phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ ,  $\psi = [e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 를 나타내며, 천이행렬  $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ 는 다음 식 (10)의 테일러 전개공식을 사용하여 구한다.

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \sum_{k=0}^N \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^k}{k!} \tag{10}$$

여기서,  $N = 100$ ,  $\Delta t = 4.1667\text{e-}4\text{sec}$ 를 사용하였다.  $\Delta t = 4.1667\text{e-}4\text{sec}$ 를 선택한 이유는, 차량에서 발생되는 진동의 주된 관심 영역은 500 Hz까지 이고<sup>(8)</sup>, 실차시험의 데이터 샘플링 주파수 2.4 kHz와 일치시키기 위해서이다.

### 2.2 FVM의 검증

FVM의 유용성을 검증하기 위해서 단일 범프 시험을 여러 속도에서 수행하여 얻은 실차시험결과와 시뮬레이션 결과를 비교하였다. 단일 범프는 차량의

피치방향과 바운스방향의 운동을 평가하는데 유용한 도로노면이며, 변위를 쉽게 계측하여 시뮬레이션을 위한 입력 값으로 사용하기에 적합하여 모델 평가를 위해서 많이 사용된다<sup>(3)</sup>. 주행속도를 변화시켜가면서 실차시험과 시뮬레이션을 수행하였다. Fig. 2는 단일 범프의 형상을 나타낸 것으로 최고점의 높이가 0.075 m이고, 폭은 0.9 m이다.

Figs. 3, 4의 상단 그림은 차량 주행 시 각 바퀴에 입력되는  $z_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 값을 시간 변화에 대해서 나타낸 것이다. 시뮬레이션 수행 시 바퀴의 좌우측 입력은 동일한 것을 사용하였다. 차량이 주행할 때, 단일 범프의 높이 변화가 시간차이를 두고 각 축의 바퀴에 입력이 되는데 이때 지연시간  $\Delta t_i$  ( $i = 2, 3, 4$ )는 다음 식 (11)과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned}
 \Delta t_2 &= (a - e) / V, \\
 \Delta t_3 &= (a + f) / V, \\
 \Delta t_4 &= (a + b) / V.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Fig. 3은 평균속도 11.4 km/h, Fig. 4는 17.6 km/h로 주행했을 때 차량 중앙에서 무게중심에서 후방으로 0.8 m 이격된 위치에서 실측된 가속도 결과와 시뮬레이션 값을 비교한 것이다. 그림의 상단은 바퀴에 입력되는 입력 값, 중앙은 피치방향, 하단은 바운스방향 운동을 나타내는 것이다. 범프를 통과하는 동안 차량의 피치방향과 바운스방향의 가속도가 실측값과 시뮬레이션의 진동패턴이 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. FVM은 11자유도를 가지므로 고주파성분을 모두 표현하지는 못하고 있지만 피크값은 잘 표현하고 있는 것으로 판단된다. 시뮬레이션에서 11.4 km/h로 주행했을 때가 17.6 km/h로 주행했을 때 보다 피크 값이 크게 나타나는 이유는 주행 속도에 의한 가진 주기가 차량의 고유진동수와 일치하는 공진현상에 의해서 것으로 판단된다. 그러나

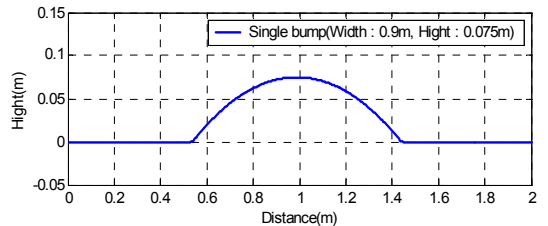
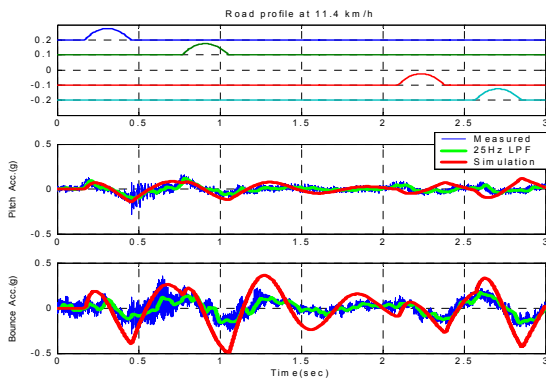


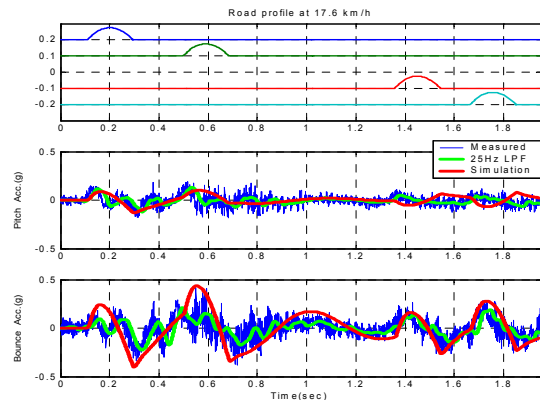
Fig. 2 Single bump

**Table 1** FVM Parameters

Parameter	Numerical value
$M_0$	37,416
$I_0$	4.0444e5
$I_\alpha$	1.0703e4
$k_1, k_2, k_3, k_4$	1.07e6
$k_5, k_6, k_7, k_8$	0.87e6
$c_1, c_2, \dots, c_8$	53,740
$m_1, m_2, \dots, m_8$	283
$k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, k_{t4}$	1.23e6
$k_{t5}, k_{t6}, k_{t7}, k_{t8}$	0.98e6
a	3.834
e	1.934
b	3.766
f	2.266
c	1.203
d	1.183



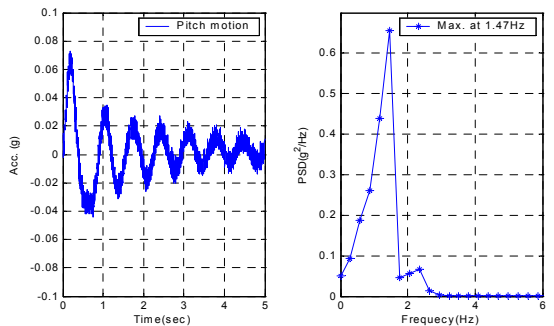
**Fig. 3** Input profile and acceleration time history for  $V=11.4$  km/h



**Fig. 4** Input profile and acceleration time history for  $V=17.6$  km/h

실측값에서는 반대 현상이 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 저속에서는 현가장치의 댐핑이 크나 고속에서는 댐핑의 영향이 작아지기 때문이다. 시뮬레이션에서는 댐핑의 비선형 특성을 반영하지 못하고 감쇠계수를 상수로 표현했기 때문에 실차시험과 차이가 발생하는 것으로 분석된다. Table 1은 FVM에 사용된 변수의 입력값을 나타낸 표이다.

Figs. 3, 4에서 25 Hz의 저주파통과필터(LPF)를 사용하여 필터링된 신호와 시뮬레이션 신호의 상관성을 분석하였는데 바운스의 경우 11.4 km/h의 주행시 88%, 17.6 km/h로 주행시 78% 일치함을 보였다. Table 1의 변수값을 사용하여 모델의 고유진동수를 구하면 Table 2와 같이 된다. 계산된 고유진동수가 타당한지 확인하기 위하여 차량의 4축에 가해지는 충격응답(차량이 범프의 최고점에서 평지에 도달할 때 발생하는 하강)을 확인하고 주파수 분석을 수행하였는데 Fig. 5에서 보는 것과 같은 응답을 보였으며 피치성분의 주된 주파수 성분이 1.47 Hz로 분석되었다. Table 2의 피치 1.52 Hz와 비교했을 때 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 바운스와 모드형상을 얻기 위한 가진 시험을 하지 못해 실험치와 직접적으로 비교할 수는 없지만 진동 패턴이 잘 일치되고 있는 것으로 보면 고유진동수가 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.



**Fig. 5** Impulse response of pitch motion

**Table 2** Natural frequency of the model

Motion	Natural frequency(Hz)
Bounce	1.68
Pitch	1.52
Roll	4.77

### 2.3 실차시험 결과 분석

같은 도로조건에서 CTIS 운용모드별로 주행시험을 수행하여 진동의 크기가 어떻게 변하는지 살펴 보았다. Fig. 6은 피치방향의 가속도 크기를 측정된 결과이다. 포장도로에서 주행속도를 변화 시키며 3가지 모드에 대해서 분석한 결과 야지모드는 30 km/h 이상, 비포장모드에서는 40 km/h 이상이 되면 포장도로모드 보다 가속도가 상승하는 것으로 나타나고 있다. 이 결과로 판단하면 저속에서는 타이어의 압력이 낮은 상태에서 진동이 작게 나타나고, 속도가 40 km/h 이상이 되면 타이어의 압력이 낮을 때 진동을 더 유발하는 것을 보여주는 것이다. 그러므로 진동측면에서 CTIS모드별로 주행속도를 제한하는 것이 필요하다고 판단된다.

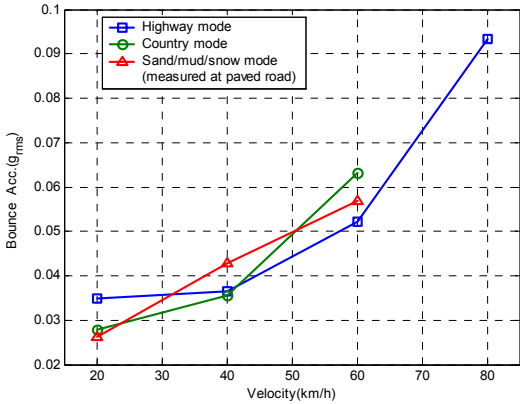


Fig. 6 Bounce acceleration as a function of velocity for three different modes

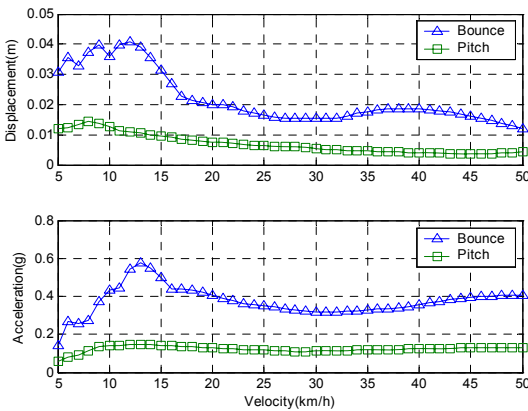


Fig. 7 Variation of displacement and acceleration responses with velocity

### 2.4 FVM의 활용

FVM을 이용하여 속도를 증가시켜 가며 단일범프를 통과시켰을 경우 변위와 가속도 크기를 구하여 속도 차이에 따른 응답의 차이를 분석하였다. Fig. 7에서 보면 12~15 km/h로 주행했을 때 응답이 크게 나타나는 이유는 첫 번째 바퀴와 두 번째 바퀴의 가진 주기가 현수장치의 고유진동수와 일치하기 때문이다. 최대응답을 보이는 주행속도를 12 km/h인 경우 초당 이동거리는 3.33 m이고 두 바퀴의 사이는 1.9 m이므로 범프의 가진 주기는 1.75 Hz가 된다. 가진 주파수가 현수장치의 고유진동수인 1.68 Hz와 근접하면서 응답이 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 차량의 특성을 고려했을 때 개발된 차량이 범프 통과 시 제한 속도를 10 km/h 이하로 설정하는 것이 진동을 줄일 수 있는 방법이다.

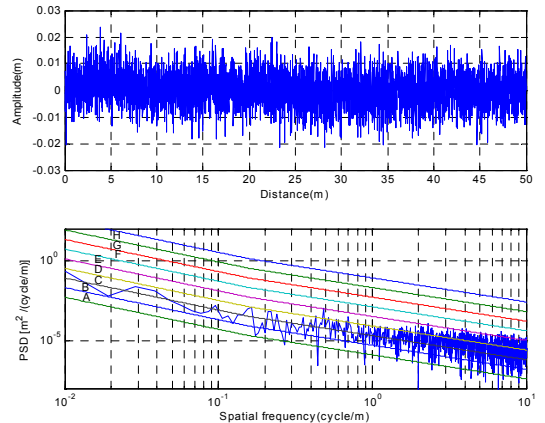


Fig. 8 PSD of unpaved road

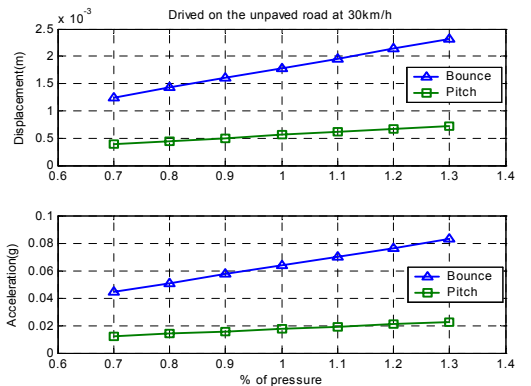


Fig. 9 Displacement and acceleration responses for different tire pressures

실제 도로 주행조건을 입력하기 위해서 비포장도로의 노면을 생성하였으며 공간주파수 전력밀도함수(power spectral density)로 변환하여 국제표준(international organization for standard)에서 제시하는 도로와 비교하여 도로조건 타당성을 검증하였다. Fig. 8은 시뮬레이션을 수행하기 위해서 생성한 비포장도를 나타낸 것이다. 상단은 비포장도의 노면 변위이며, 하단은 노면 거칠기를 ISO에서 제안한 표준 노면의 분류와 비교한 것인데, 포장도로는 A(very good), B(good), C(average)로 분류할 수 있으며, 비포장도로는 노면정도에 따라 C(average), D(poor), E(very poor)로 구분할 수 있다. 생성된 노면은 C와 D를 포함하는 노면이며 알파벳의 순서가 높아질수록 거친 도로를 의미한다<sup>7)</sup>. 비포장도로주행을 위한 적절한 압력을 설정하기 위해서 포장도로의 압력을 기준으로 정하였다. 여기서  $\pm 40\%$  정도 변화를 주면서 30 km/h로 차량을 주행시켰을 때 Fig. 9와 같은 결과를 얻었다. FVM에서 타이어는 강성만을 가지는 스프링으로 표현하였다. 압력이 증가하면서 변위와 가속도가 증가하는 현상이 나타나고 있는 것을 볼 수 있다. 분석된 결과는 포장/비포장도로 주행을 위해서 진동크기 변화를 고려하여 타이어 압력 설정 시 유용하게 사용될 수 있다.

### 3. 결 론

대형차량(8×8)의 진동 평가를 위한 11자유도 전차량 모델(FVM)을 제시하였으며, 실차시험을 통해서 모델의 유용성 검증하였다. CTIS가 장착된 차량의 실차시험 결과를 분석하여 CTIS 모드별 주행진동 특성을 제시하고, 각 설정 모드에서 운용 속도를 결정할 수 있는 판단근거를 제시하였다. 개발된 FVM을 활용하여, 범프 통과 시 속도를 변화시켰을 때 실제 차량 특성이 잘 반영되어 응답이 나타나는 것을 보였다. 또한 비포장도로 주행 시 타이어 압력 변화에 대한 진동변화를 제시하여 CTIS 모드의 적절한 타이어 압력을 결정할 수 있는 자료를 생성하였다.

### 후 기

실차시험을 수행할 수 있도록 지원을 아끼지 않

은 국방과학연구소의 창원기동시험장 직원 분들께 감사의 말씀을 드립니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Neutron, Y. and Sakman, L. E., 2006, "Vibration of Rectangular Bridge as an Isotropic Plate under a Traveling Full Vehicle Model," *Journal of Vibration and Control*, Vol. 12, No. 1, pp. 83~98.
- (2) Gao, W., Zhang, N. and Du, H. P., 2007, "A Half-car Model for Dynamic Analysis of Vehicles with Random Parameters," 5th Australasian Congress on Applied Mechanics.
- (3) Els, P. S., Theron, N. J., Uys, P. E. and Thoreson, M. J., 2007, "The Ride Comfort vs. Handling Compromise for Off-road Vehicles," *Journal of Terramechanics*, Vol. 44, pp. 303~317.
- (4) Moon, I.-D. and Kim, B.-S., 2005, "The Effects of Torsional Characteristics According to Mounting Method of the Frame of a Large-sized Truck on Dynamic Performance," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibrations Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 731~737.
- (5) Adams, B. T., Reid, J. F., Hummel, J. W., Zhang, Q. and Hoelt, R. G., 2004, "Effects of Central Tire Inflation Systems on Ride Quality of Agricultural Vehicles," *Journal of Terramechanics*, Vol. 41, pp. 199~207.
- (6) Raper, R. L., Bailey, A. C., Burt, E. C., Way, T. R. and Liberati, P., 1995, "The Effects of Reduced Inflation Pressure on Soil-tire Interface Stressed and Soil Strength," *Journal of Terramechanics*, Vol. 32, pp. 43~51.
- (7) Kim, K. S. and Yoo, W. S., 1997, "Generation of Road Surface Profiles with a Power Spectral Density Function," SAE NO. 97370015, pp. 136~145.
- (8) MIL-STD-810F, 2000, "Environmental Engineering Considerations and Laboratory Tests."
- (9) Maurice Petyt, 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis."

부 록

차량 모델의  $M, C, K, z, u$  행렬의 내용은 다음과 같다.

$$M = \text{diag}(M_0, I_0, I_a, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 & -c_8 \\ & c_{22} & c_{23} & -c_1a & -c_2a & -c_3e & -c_4e & c_5f & c_6f & c_7b & c_8b \\ & & c_{33} & c_1c & -c_2d & c_3c & -c_4d & c_5c & -c_6d & c_7c & -c_8d \\ & & & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & c_6 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & c_7 & 0 \\ & & & & & & & & & & c_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) \\ c_{22} &= (c_1a^2 + c_2a^2 + c_3e^2 + c_4e^2 + c_5f^2 + c_6f^2 + c_7b^2 + c_8b^2) \\ c_{33} &= (c_1c^2 + c_2d^2 + c_3c^2 + c_4d^2 + c_5c^2 + c_6d^2 + c_7c^2 + c_8d^2) \\ c_{12} &= (c_1a + c_2a + c_3e + c_4e - c_5f - c_6f - c_7b - c_8b) \\ c_{13} &= -(c_1c - c_2d + c_3c - c_4d + c_5c - c_6d + c_7c - c_8d) \\ c_{23} &= -(c_1ac - c_2ad + c_3ec - c_4ed - c_5fc + c_6fd - c_7bc + c_8bd) \end{aligned}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 & -k_6 & -k_7 & -k_8 \\ & k_{22} & k_{23} & -k_1a & -k_2a & -k_3e & -k_4e & k_5f & k_6f & k_7b & k_8b \\ & & k_{33} & k_1c & -k_2d & k_3c & -k_4d & k_5c & -k_6d & k_7c & -k_8d \\ & & & k_1+k_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_2+k_{t2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & k_3+k_{t3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_4+k_{t4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_5+k_{t5} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k_6+k_{t6} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & k_7+k_{t7} & 0 \\ & & & & & & & & & & k_8+k_{t8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8) \\ k_{22} &= (k_1a^2 + k_2a^2 + k_3e^2 + k_4e^2 + k_5f^2 + k_6f^2 + k_7b^2 + k_8b^2) \\ k_{33} &= (k_1c^2 + k_2d^2 + k_3c^2 + k_4d^2 + k_5c^2 + k_6d^2 + k_7c^2 + k_8d^2) \\ k_{12} &= (k_1a + k_2a + k_3e + k_4e - k_5f - k_6f - k_7b - k_8b) \\ k_{13} &= -(k_1c - k_2d + k_3c - k_4d + k_5c - k_6d + k_7c - k_8d) \\ k_{23} &= -(k_1ac - k_2ad + k_3ec - k_4ed - k_5fc + k_6fd - k_7bc + k_8bd) \end{aligned}$$

$$z = \{ z_0 \quad \theta \quad \alpha \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_6 \quad z_7 \quad z_8 \}^T$$

$$u = \{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad k_{t1}z_{ri1} \quad k_{t2}z_{ri2} \quad k_{t3}z_{ri3} \quad k_{t4}z_{ri4} \quad k_{t5}z_{ri5} \quad k_{t6}z_{ri6} \quad k_{t7}z_{ri7} \quad k_{t8}z_{ri8} \}^T$$