Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(6), 973–982

한국데이터정보과학회지

집단 파론도 게임의 최적 전략

이지연[1]

영남대학교 통계학과

접수 2009년 9월 7일, 수정 2009년 11월 19일, 게재확정 2009년 11월 23일

요 약

파론도 게임은 두 개의 지는 게임을 주기적으로 반복하거나 혹은 임의적으로 선택하면 궁극적으로 이기게 되는 역설적인 게임을 말한다. 여러 명의 게임자들이 파론도 게임을 구성하는 두 게임 중에서 하나를 집단적으로 선택해서 진행하는 게임을 고려하자. 본 논문에서는 이 집단 파론도 게임의 모든 모수의 범위에서 장기적으로 기대상금을 최대화하는 최적의 게임 선택 기준이 무엇인지를 찾고 그 기대상금을 구한다.

주요용어: 마코프 체인, 정상확률분포, 최적 전략, 파론도 게임.

1. 머리말

1996년 한 학회에서 스페인의 물리학자 파론도 (Juan M. R. Parrondo)는 두 개의 지는 (losing) 게임을 결합하여 이기는 (winning) 게임으로 만드는 문제를 소개하였다 (Parrondo, 1996). 각각의 기대상금이 음수인 두 개의 게임을 일정하게 주기적으로 반복하거나 또는 임의적 (random)으로 게임을 선택하여 진행하면 그 기대상금이 양수가 되는 역설적인 문제로서 이 후에 파론도 역설 (Parrondo's paradox)이라고 부르게 되었다. 이것은 물리학의 Brownian ratchet을 설명하기 위해 도입된 것으로서 주로 물리학자들에 의해 연구가 진행되어 왔으나 현재는 물리학 뿐 아니라 게임이론, 금융학, 유전학 등에서도 연구되며 그 적용사례가 점차 늘어나고 있다 (Spurgin과 Tamarkin, 2005; Reed, 2007; Abbott, 2009; Ethier와 Lee, 2009b).

Kim과 Lee (2007)와 김혜경과 박준표 (2009)는 여러 명의 게임자들이 집단적으로 서로 협력하는 게임에서의 최적해에 대한 연구를 하였고, Dinís와 Parrondo (2003)는 여러 명의 게임자들이 집단적으로 파론도 게임을 실시할 때의 최적 조건을 연구하였다. 구체적으로 살펴보면, Dinís와 Parrondo (2003)는 매 시행마다 파론도 게임을 구성하는 두 게임 A와 B 중에서 최대의 기대상금을 제공하는 게임을 선택하는 전략을 소개하고, 특정한 모수 값에서는 이 전략이 결국 지는 게임이 된다는 또 다른 역설적인 결과를 얻었다. 즉, 매 게임의 시행에서는 더 많은 수익을 주는 게임을 선택하기 때문에 단기적 (short-range)으로는 최상이지만 궁극적으로는 즉, 장기적으로는 기대상금이 감소함을 보인 것이다. 한편, Van den Broeck과 Cleuren (2004)은 또 다른 모수의 범위에서 이 단기적 최적 전략 (short-range optimization strategy)의 적용으로 선택되는 게임의 패턴이 점차적으로 주기적 반복 패턴을 보인다는 것을 증명하였다. 그러나 두 논문에서 소개하는 단기적 최적 전략은 장기적 관점에서의 최적 전략은 되지 못함을 Van den Broeck과 Cleuren (2004)이 더 많은 수익을 제공하는 다른 전략과 비교함으로써 확인하였다. 한편 Dinís (2008)는 시뮬레이션을 통해 장기적 최상의 전략이 궁극적으로 게임의 선택 패턴을 ABABB의 순서로 반복하는 것임을 보였다.

[1] (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leejy@yu.ac.kr

본 논문에서는 일반적인 모수의 범위에서 집단 파론도 게임의 단기적 최적 전략과 장기적 최적 전략의 구체적인 게임 선택 기준을 결정하고, 각 전략에서 얻어지는 근사적인 기대상금을 비교하고자 한다. 먼저 2장에서는 고전적인 파론도 게임과 여러 명이 집단적으로 진행하는 집단 파론도 게임을 소개하고, 3장에서는 각 모수의 범위에서 얻어지는 전략을 구체적으로 살펴본다.

2. 집단 파론도 게임

파론도 게임은 다음의 두 개의 게임 A와 B로 구성된다; $0 < \epsilon < 1/10$인 ϵ에 대해

$$p = \frac{1}{2} - \epsilon, \quad p_0 = \frac{1}{10} - \epsilon, \quad p_1 = \frac{3}{4} - \epsilon$$

라고 두고, 게임 A는 앞면이 나올 확률이 p인 동전을 던져 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B는 게임자가 가지고 있는 현재의 총 금액이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이 p_0인 나쁜 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이 p_1인 좋은 동전을 던진다.

각 게임 A와 B에 대해 X_n을 n번의 게임 후 게임자의 금액을 3으로 나눈 나머지라고 하면, 파론도 게임은 상태공간이 0, 1, 2인 마코프 연쇄 $\{X_n\}_{n\geq 0}$로 표현할 수 있다. 이 때, 게임 A와 B의 전이확률행렬은 각각

$$P_A := \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}, \quad P_B := \begin{pmatrix} 0 & p_0 & 1-p_0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 \\ p_1 & 1-p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

이고 게임 A의 정상확률분포 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_A$는 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_A = (1/3, 1/3, 1/3)$이고 게임 B의정상확률분포 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B$는

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B = (\frac{5}{13} - \frac{440}{2197}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad \frac{2}{13} + \frac{168}{2197}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad \frac{6}{13} + \frac{252}{2197}\epsilon + O(\epsilon^2))$$

가 된다. 그러면 게임 A의 기대상금 $E(A)$와 게임 B의 기대상금 $E(B)$는 각각

$$E(A) = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_A \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = -2\epsilon,$$

$$E(B) = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B \widetilde{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{294}{169}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

(Epstein, 2007)로 얻어진다. 단,

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} := (2p-1, 2p-1, 2p-1)^T, \quad \widetilde{\boldsymbol{\beta}} := (2p_0 - 1, 2p_1 - 1, 2p_1 - 1)^T \tag{2.1}$$

이다. 따라서 작은 양수 ϵ에 대해 두 게임 모두 음의 기대상금을 갖는다. 반면에 앞면이 나올 확률이 γ인 동전을 던져서 앞면이 나오면 (즉, 확률 γ로) 게임 A를 실시하고 뒷면이 나오면 게임 B를 실시하는 임의적 혼합게임의 경우는 그 전이확률이 $\gamma P_A + (1-\gamma)P_B$로서 기대상금이

$$\frac{12\gamma(1-\gamma)(2-\gamma)}{169 + 22\gamma - 11\gamma^2} + O(\epsilon)$$

(Ethier와 Lee, 2009a)로 얻어진다. 그러므로 모든 $0 < \gamma < 1$에 대해 기대상금이 양수가 되는 $\epsilon > 0$을 찾을 수 있어서, 두 개의 지는 게임을 임의적으로 결합하여 이기는 게임이 되도록 만들 수 있다. 한편, 게임 A를 r번 실시하고 그 다음 게임 B를 s번 진행하며, 다시 게임 A를 r번, 게임 B를 s번 이렇게 규칙

적으로 반복하는 게임을 $[r, s]$로 표기하면 $[1, 1]$의 게임만 제외하고 모든 $r \geq 1$과 $s \geq 1$에 대해 기대상금이 양수가 되는 양수 ϵ이 존재함을 Ethier와 Lee (2009a)가 증명하였다. 이와 같이 파론도 역설을 만족하는 게임을 원금 의존 파론도 게임 (capital-dependent Parrondo game)이라고 한다.

본 논문에서는 원금 의존 파론도 게임을 구성하는 게임 B의 모수를 일반적인 것으로 확장하여 (Ethier와 Lee, 2009a), 임의의 양수 $0 < \rho < 1$에 대해

$$p_0 = \frac{\rho^2}{1+\rho^2} - \epsilon, \quad p_1 = \frac{1}{1+\rho} - \epsilon \tag{2.2}$$

로 정의한다. 그러면 기존의 파론도 게임 B는 $\rho = 1/3$인 예에 해당된다. 만약 $\epsilon = 0$이면 두 게임 A와 B는 기대상금이 0으로 모두 공정 (fair)한 게임이 되지만 임의적인 선택을 하거나 고정적인 주기로 반복하면 그 기대상금이 양수가 되도록 할 수 있다. 즉, 두 개의 공정한 게임이 결합하여 이기는 게임이 되는 것이다. 여기서는 $\epsilon = 0$을 가정하여 최적의 전략을 찾는다. 양수의 ϵ은 본 결과에서 얻어지는 기준의 이동 (shift)으로 설명이 가능할 것이다 (Dinís, 2008).

1명의 게임자가 두 게임 A와 B 중에서 자유롭게 한 개를 선택할 수 있다면, 현재의 금액이 3의 배수일 때는 게임 B의 나쁜 동전보다는 게임 A를 선택하는 것이 훨씬 유리하다. 따라서 현재의 금액이 3의 배수이면 게임 A를 선택하고 3의 배수가 아니면 게임 B를 선택하는 것이 최상의 전략이다. 만약 여러 명의 게임자들이 있을 때는 어떠한가? 즉, N명의 게임자들로 이루어진 집단에서 각자 파론도 게임을 한다고 하자. 이 때 게임 B의 동전의 종류는 각 게임자가 가지고 있는 금액에 의해 정해진다. n번의 게임 후 총 N명의 게임자들 중 금액이 3의 배수인 게임자들의 비율을 $\pi_0(n)$이라고 하자. 만약 게임자들 모두가 게임 B를 선택하면 기대상금은 식 (2.2)의 확률로부터

$$\pi_0(n)(2p_0 - 1) + [1 - \pi_0(n)](2p_1 - 1) = -\pi_0(n)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} + [1 - \pi_0(n)]\frac{1-\rho}{1+\rho}$$

가 되고, 만약 모두 게임 A를 선택하면 기대상금은 0이다. 따라서 $n+1$번째 게임에서 보다 많은 기대상금을 얻기 위해서는 다음의 전략을 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{만약 } \pi_0(n) \geq (1+\rho^2)/(2(1+\rho+\rho^2))\text{이면 게임 A를 선택하고} \\ &\text{만약 } \pi_0(n) < (1+\rho^2)/(2(1+\rho+\rho^2))\text{이면 게임 B를 선택한다.} \end{aligned} \tag{2.3}$$

위와 같은 전략을 단기적 최적 전략이라고 한다. 이 단기적 최적 전략은 $N = \infty$일 때 궁극적으로 주기 패턴 $[1, 2]$에 근사하여 양의 기대상금을 얻을 수 있지만 최적의 전략은 아님이 확인되었다 (Van den Broeck과 Cleuren, 2004). 한편, Dinís와 Parrondo (2004)는 위의 전략 (2.3)의 경계값 $(1+\rho^2)/(2(1+\rho+\rho^2))$ 대신에 $1/2$인 다수결의 전략을 소개하고, $N = \infty$이고 $\rho = 1/3$일 때, 그 기대상금이 결국 0에 접근하는 결과를 얻었다. 그리고 같은 모수의 범위에서 Dinís (2008)는 시뮬레이션 방법을 통해 장기적 최상의 전략은 궁극적으로 게임의 선택 패턴이 $[1, 1]$과 $[1, 2]$를 혼용한 ABABB의 순서를 반복하는 것임을 보였다. 그리고 $\rho = 1/3$의 경우는 장기적 최적 전략이 $u \in (1/3,\ 11945/35601)$인 u에 의해

$$\begin{aligned} &\text{만약 } \pi_0(n) \geq u\text{이면 게임 A를 선택하고} \\ &\text{만약 } \pi_0(n) < u\text{이면 게임 B를 선택한다.} \end{aligned} \tag{2.4}$$

로 얻어짐을 보였다 (Parrondo 등, 2007). 이와 같이 $\rho = 1/3$일 때, 몇 개의 경계값 u에 대한 전략의 특성만 파악된 상태이다. 본 논문에서는 모든 $0 < \rho \leq 1$와 경계값 $0 < u < 1$에 대해 위의 (2.4)의 형태로 얻어지는 전략을 통한 궁극적인 게임의 선택 패턴을 파악하고, 최적의 전략 선택 기준 u의 범위와 그 기대상금을 찾고자 한다.

3. 최적 전략 기준

Dinís와 Parrondo (2003)와 Van den Broeck과 Cleuren (2004)에서 고려한 대로 여기서도 $N=\infty$라고 가정하자. x_i를 게임자들 중 현재 보유하고 있는 금액을 3으로 나눈 나머지가 i인 게임자들의 비율이라고 하면 $x_0+x_1+x_2=1$이 된다. 그러면 게임은 초기값 (1,0,0)에서 시작하여 다음의 상태 공간

$$\Delta := \{(x_0,x_1,x_2) : x_0 \ge 0, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_0+x_1+x_2=1\}$$

상에서 만약 게임 A가 선택되면 (x_0,x_1,x_2) 가 $(x_0,x_1,x_2)P_A$로 옮겨가고, 게임 B가 선택되면 (x_0,x_1,x_2)가 $(x_0,x_1,x_2)P_B$로 움직이는 이산시간 선형변환이 된다.

행렬 P_B의 고유값 (eigenvalue)은

$$1, e_1 := -\frac{1}{2}+\frac{(1-\rho)S}{2(1+\rho)(1+\rho^2)}, \quad e_2 := -\frac{1}{2}-\frac{(1-\rho)S}{2(1+\rho)(1+\rho^2)}$$

단, $S=\sqrt{(1+\rho^2)(1+4\rho+\rho^2)}$이고 이에 대응되는 고유벡터 (eigenvector)는

$$r_0 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad r_1 := \begin{pmatrix}(1+\rho)(1-\rho^2-S)\\ 2+\rho+2\rho^2+\rho^3+\rho S\\ -(1+2\rho+\rho^2+2\rho^3-S)\end{pmatrix}, \quad r_2 := \begin{pmatrix}(1+\rho)(1-\rho^2+S)\\ 2+\rho+2\rho^2+\rho^3-\rho S\\ -(1+2\rho+\rho^2+2\rho^3+S)\end{pmatrix}$$

로 얻어진다 (Ethier와 Lee, 2009a). 대각행렬 $D := diag(1,e_1,e_2)$과 고유벡터로 구성된 행렬 $R := (r_0,r_1,r_2)$과 그 역행렬 $L := R^{-1}$을 이용하면

$$P_B^n = RD^nL$$

로 얻어져서 게임 B의 반복으로 얻어지는 수렴성은 이 관계로부터 얻을 수 있다. 따라서 행렬 P_B의 정상확률분포는

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B = \left(\frac{1+\rho^2}{2(1+\rho+\rho^2)}, \frac{\rho(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)}, \frac{1+\rho}{2(1+\rho+\rho^2)}\right)$$

이다. π_B를 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B$의 첫 번째 요소라고 하면, 모든 $0<\rho<1$에 대해 $\pi_B := \dfrac{1+\rho^2}{2(1+\rho+\rho^2)} > 1/3$이다.

$\pi_{[1,n]}$을 행렬 $P_AP_B^n$의 정상확률분포의 첫 번째 요소라고 하자. 즉, $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{[1,n]} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{[1,n]}P_ARD^nL$을 만족하는 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{[1,n]}$의 첫 번째 요소라고 하면,

$$\begin{aligned}\pi_{[1,n]} =& \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{[1,n]}(1\ 0\ 0)^T\\ =& \{4(1+\rho^2)S + e_1^n(1+\rho)[-3(1-\rho)(1+\rho^2)+(1+\rho)S] + e_2^n(1+\rho)[3(1-\rho)(1+\rho^2)\\ &+(1+\rho)S] + 2\rho e_1^n e_2^n S\} \,/\, \{2(1+e_1^n)(1+e_2^n)(1+\rho+\rho^2)S\}\end{aligned}$$

이 된다. $\pi_{AB} := \pi_{[1,1]}$라 두고 π_{BA}를 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BA} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BA}P_BP_A$를 만족하는 정상확률분포 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BA}$의 첫 번째 요소라고 하면, 모든 $0<\rho<1$에 대해

$$\pi_{AB} = \frac{\rho}{1+\rho+\rho^2} < \frac{1}{3} < \frac{1+\rho^2}{2(1+\rho+\rho^2)} = \pi_{BA}$$

이므로 전략 (2.4)의 형태로는 어떠한 경계값 $0<u<1$에 대해서도 패턴 $[1,1]$로 수렴할 수 없다. 왜냐하면 패턴 [1,1]에서는 게임 A 다음에 게임 B가 선택되어야하는데 $1/3 < \pi_{BA}$이기 때문에 게임 B의 선

택 영역이 오른 쪽에 있어야 하고 유사한 이유로 게임 A의 선택 영역은 왼쪽에 있어야 하는데 이것은 전략 (2.4)의 형태와는 반대이기 때문이다.

한편, $n = 2$ 일 때, $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{[1,2]}$의 첫 번째 요소인 $\pi_{[1,2]}$는

$$\pi_{[1,2]} := \pi_{ABB} = \frac{1}{B(\rho)}(2 + 5\rho + 6\rho^2 + 9\rho^3 + 10\rho^4 + 9\rho^5 + 6\rho^6 + 5\rho^7 + 2\rho^8),$$

단, $B(\rho) := 3 + 12\rho + 20\rho^2 + 28\rho^3 + 36\rho^4 + 28\rho^5 + 20\rho^6 + 12\rho^7 + 3\rho^8$ 이다.

$\pi_{BBA} := \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABB} P_A (1\ 0\ 0)^T$로 $P_B^2 P_A$의 정상확률분포의 첫 번째 요소라고 하고, $\pi_{BAB} := \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABB} P_A P_B (1\ 0\ 0)^T$는 $P_B P_A P_B$의 정상확률분포의 첫 번째 요소라고 하면,

$$\pi_{BBA} = \frac{1}{2B(\rho)}(1 + 7\rho + 14\rho^2 + 19\rho^3 + 26\rho^4 + 19\rho^5 + 14\rho^6 + 7\rho^7 + \rho^8),$$
$$\pi_{BAB} = \frac{1}{B(\rho)}(1 + 4\rho + 7\rho^2 + 9\rho^3 + 12\rho^4 + 9\rho^5 + 7\rho^6 + 4\rho^7 + \rho^8)$$

이다. 따라서

$$\pi_{ABB} - \pi_{BAB} = \frac{1}{B(\rho)}(1-\rho)^2(1 + \rho + \rho^2)(1 + 2\rho + \rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4) > 0,$$
$$\pi_{BAB} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3B(\rho)}(1-\rho)^2\rho^2(1 + \rho + \rho^2) > 0,$$
$$\frac{1}{3} - \pi_{BBA} = \frac{1}{6B(\rho)}(1-\rho)^2(3 + 9\rho + 13\rho^2 + 16\rho^3 + 13\rho^4 + 9\rho^5 + 3\rho^6) > 0$$

이므로 모든 $0 < \rho < 1$에 대해

$$\pi_{BBA} < 1/3 < \pi_{BAB} < \pi_{ABB}. \tag{3.1}$$

유사하게 행렬 $P_A P_B P_A P_B P_B$, $P_B P_A P_B P_B P_A$, $P_A P_B P_B P_A P_B$, $P_B P_B P_A P_B P_A$, $P_B P_A P_B P_A P_B$의 정상확률분포의 첫 번째 요소를 각각 π_{ABABB}, π_{BABBA}, π_{ABBAB}, π_{BBABA}, π_{BABAB}라고 두면 π_{ABABB} 는 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} P_A P_B P_A P_B P_B$를 만족하는 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB}$의 첫 번째 요소이고,

$$\pi_{BABBA} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} P_A (1\ 0\ 0)^T$$
$$\pi_{ABBAB} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} P_A P_B (1\ 0\ 0)^T$$
$$\pi_{BBABA} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} P_A P_B P_A (1\ 0\ 0)^T$$
$$\pi_{BABAB} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB} P_A P_B P_A P_B (1\ 0\ 0)^T$$

로 얻어진다. 따라서

$$\begin{aligned} C(\rho) := {} & 5 + 30\rho + 84\rho^2 + 166\rho^3 + 267\rho^4 + 348\rho^5 + 378\rho^6 + 348\rho^7 \\ & + 267\rho^8 + 166\rho^9 + 84\rho^{10} + 30\rho^{11} + 5\rho^{12} \end{aligned}$$

에 대해

$$\begin{aligned}
\pi_{ABABB} =& \frac{1}{C(\rho)}(4 + 17\rho + 36\rho^2 + 61\rho^3 + 86\rho^4 + 104\rho^5 + 110\rho^6 \\
& + 104\rho^7 + 86\rho^8 + 61\rho^9 + 36\rho^{10} + 17\rho^{11} + 4\rho^{12}) \\
\pi_{BABBA} =& \frac{1}{2C(\rho)}(1 + 13\rho + 48\rho^2 + 105\rho^3 + 181\rho^4 + 244\rho^5 + 268\rho^6 \\
& + 244\rho^7 + 181\rho^8 + 105\rho^9 + 48\rho^{10} + 13\rho^{11} + \rho^{12}) \\
\pi_{ABBAB} =& \frac{1}{C(\rho)}(2 + 11\rho + 29\rho^2 + 56\rho^3 + 88\rho^4 + 115\rho^5 + 124\rho^6 \\
& + 115\rho^7 + 88\rho^8 + 56\rho^9 + 29\rho^{10} + 11\rho^{11} + 2\rho^{12}) \\
\pi_{BBABA} =& \frac{1}{2C(\rho)}(3 + 19\rho + 55\rho^2 + 110\rho^3 + 179\rho^4 + 233\rho^5 + 254\rho^6 \\
& + 233\rho^7 + 179\rho^8 + 110\rho^9 + 55\rho^{10} + 19\rho^{11} + 3\rho^{12}), \\
\pi_{BABAB} =& \frac{1}{C(\rho)}(1 + 8\rho + 25\rho^2 + 53\rho^3 + 90\rho^4 + 120\rho^5 + 132\rho^6 \\
& + 120\rho^7 + 90\rho^8 + 53\rho^9 + 25\rho^{10} + 8\rho^{11} + \rho^{12})
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
\pi_{ABABB} - \pi_{ABBAB} &= \frac{1}{C(\rho)}(1-\rho^2)^2(2 + 6\rho + 11\rho^2 + 17\rho^3 + 18\rho^4 + 17\rho^5 + 11\rho^6 + 6\rho^7 + 2\rho^8) \\
&> 0, \\
\pi_{ABBAB} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3C(\rho)}(1-\rho)^2(1+\rho+\rho^2)^3(1+2\rho+2\rho^3+\rho^4) > 0, \\
\frac{1}{3} - \pi_{BBABA} &= \frac{1}{6C(\rho)}(1-\rho)^2(1+\rho+\rho^2)^3(1+2\rho+2\rho^3+\rho^4) > 0, \\
\pi_{BBABA} - \pi_{BABAB} &= \frac{1}{2C(\rho)}(1-\rho^2)^2(1+\rho^2)(1+\rho+\rho^2)^3 > 0, \\
\pi_{BABAB} - \pi_{BABBA} &= \frac{1}{2C(\rho)}(1-\rho^2)^2(1 + 3\rho + 4\rho^2 + 7\rho^3 + 6\rho^4 + 7\rho^5 + 4\rho^6 + 3\rho^7 + \rho^8) \\
&> 0
\end{aligned}$$

이므로 모든 $0 < \rho < 1$에 대해

$$\pi_{BABBA} < \pi_{BABAB} < \pi_{BBABA} < \frac{1}{3} < \pi_{ABBAB} < \pi_{ABABB} \tag{3.2}$$

을 얻을 수 있다.

식 (3.1)과 (3.2)로부터, u의 다음 각 범위에 대해 (2.4)의 형태의 전략을 적용했을 때 선택되는 게임의 패턴은 다음과 같다.

case 1) $0 < u \le \pi_{BBABA}$

식 (3.2)에 의해 $u < 1/3$이고 또한 $u < \pi_B$이기 때문에 $(1,0,0)$에서 시작한 게임은 언젠가 게임 A의 선택 영역으로 들어오게 되고 결국은 게임 A를 무한 번 반복하는 AAA....의 패턴을 따르게 된다. 따라서 궁극적인 기대상금도 0이 된다.

case 2) $1/3 \le u \le \pi_{BAB}$

이 경우는 $1/3 \le u$이므로 게임 A만 무한 번 선택될 수 없다. 또한 $u \le \pi_{BAB}$이기 때문에 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BAB}$는 게임 A의 선택 영역에 포함되어 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BAB}$다음에 게임 B가 선택될 수가 없다. 따라서서 패턴 [1,2]에 수렴할 수 없다. 한편,

$$\begin{aligned}\pi_{ABBAB} - \pi_{BAB} =& \frac{1}{B(\rho)C(\rho)}(1-\rho)^2(1+\rho+\rho^2)(1+8\rho+28\rho^2+64\rho^3+118\rho^4 \\ &+184\rho^5+246\rho^6+292\rho^7+308\rho^8+292\rho^9+246\rho^{10}+184\rho^{11} \\ &+118\rho^{12}+64\rho^{13}+28\rho^{14}+8\rho^{15}+\rho^{16})\end{aligned} \tag{3.3}$$

이기 때문에 모든 $0 < \rho < 1$에 대해 $\pi_{BAB} < \pi_{ABBAB}$이다. 따라서 이 경우는 식 (3.2)에 의해 $u < \pi_{ABBAB} < \pi_{ABABB}$이고 $\pi_{BABBA} < \pi_{BABAB} < \pi_{BBABA} < u$이기 때문에 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABBAB}$와 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB}$는 게임 A의 선택 영역에 속하고 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BABBA}$, $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BABAB}$와 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BBABA}$는 게임 B의 선택 영역에 해당되어 궁극적으로 패턴 ABABB를 반복한다. 그러므로 식 (2.1)을 이용하여 기대상금은 점차적으로

$$\begin{aligned}&E(ABABB) \\ &= (\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABABB}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BABBA}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABBAB}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BBABA}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BABAB}\widetilde{\boldsymbol{\beta}})/5 \\ &= \frac{3}{5C(\rho)}(1-\rho)^3(1+\rho)(3+12\rho+23\rho^2+34\rho^3+39\rho^4+34\rho^5+23\rho^6+12\rho^7+3\rho^8)\end{aligned}$$

에 수렴한다.

case 3) $\pi_{ABBAB} < u \le \pi_B$

먼저

$$\begin{aligned}\pi_B - \pi_{ABBAB} =& \frac{1}{2(1+\rho+\rho^2)C(\rho)}(1-\rho)^2(1+6\rho+16\rho^2+30\rho^3+49\rho^4+64\rho^5+70\rho^6 \\ &+64\rho^7+49\rho^8+30\rho^9+16\rho^{10}+6\rho^{11}+\rho^{12}) \\ >& 0\end{aligned}$$

를 확인할 수 있다. 그리고 $\pi_{ABBAB} < u$인 경우는 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABBAB}$가 게임 B의 선택 영역에 속하기 때문에 ABABB의 패턴으로 수렴할 수는 없다. 한편

$$\begin{aligned}\pi_{ABB} - \pi_B =& \frac{1}{2(1+\rho+\rho^2)B(\rho)}(1-\rho)^2(1+4\rho+10\rho^2+16\rho^3+16\rho^4+16\rho^5 \\ &+10\rho^6+4\rho^7+\rho^8) \\ >& 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

이므로 이 구간의 u에 대해서는 항상 $u < \pi_{ABB}$이 성립한다. 따라서 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABB}$는 게임 A의 선택 영역에 속하고, 식 (3.1)과 (3.3)에 의해 $\pi_{BBA} < \pi_{BAB} < u$으로 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BBA}$와 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BAB}$는 게임 B의 선택 영역에 속한다. 따라서 패턴 [1,2]에 궁극적으로 수렴한다. 그러므로 이 범위의 u에 대해 얻어지는 기대상금은

$$\begin{aligned} E(ABB) &= (\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{ABB}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BBA}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{BAB}\widetilde{\boldsymbol{\beta}})/3 \\ &= \frac{1}{B(\rho)}(1-\rho)^3(1+\rho)(1+2\rho+\rho^2+2\rho^3+\rho^4) \end{aligned} \tag{3.5}$$

에 점차 가까워진다.

case 4) $\pi_{ABB} \le u < 1$

식 (3.4)에 의해 $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_B$는 게임 B의 선택 영역에 포함된다. 그러므로 결국 게임 B만 계속 선택되는 BBB...의 패턴이 되어 기대상금이 근사적으로 0이 된다.

모든 $0 < \rho < 1$에 대해

$$\begin{aligned} E(ABABB) - E(ABB) =& \frac{1}{5B(\rho)C(\rho)}(1-\rho)^3(1+\rho)(2+16\rho+74\rho^2+236\rho^3+547\rho^4 \\ &+1000\rho^5+1514\rho^6+1924\rho^7+2082\rho^8+1924\rho^9+1514\rho^{10} \\ &+1000\rho^{11}+547\rho^{12}+236\rho^{13}+74\rho^{14}+16\rho^{15}+2\rho^{16}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

이므로 ABABB 패턴의 기대상금이 [1,2]의 기대상금보다 항상 많다. 즉, **case 2)** $1/3 \le u \le \pi_{BAB}$의 범위에 있는 모든 u에 의한 선택이 Dinís (2008)의 결과에 의해 장기적으로 최대 기대상금을 제공하는 최적 전략 기준이 된다. 한편 **case 3)**에서 $u = \pi_B$인 경우는 Dinís와 Parrondo (2003)가 제안한 단기적 최적 전략에 해당되는 것으로 **case 3)**의 $\pi_{ABBAB} < u \le \pi_B$인 모든 경계값 u에 의한 전략들과 동일한 기대상금 (3.5)를 갖게 된다.

참고문헌

김혜경, 박준표 (2009). 일반화된 분수 지배게임에 대한 균형성. <한국데이터정보과학회지>, **20**, 49-55.

Abbott, D. (2009). Developments in Parrondo's paradox. In *Applications of Nonlinear Dynamics: Model and Design of Complex Systems*, Series: Understanding Complex Systems, Ed. In, V., Longhini, P., and Palacios, A., Springer-Verlag, New York.

Dinís, L. (2008). Optimal sequence for Parrondo games. *Physical Review E,* **77**, 021124.

Dinís, L. and Parrondo, J. M. R. (2003). Optimal strategies in collective Parrondo games. *Europhysics Letters,* **63**, 319-325.

Dinís, L. and Parrondo, J. M. R. (2004). Inefficiency of voting in Parrondo games. *Physica A,* **343**, 701-711.

Epstein, R. A. (2007). Parrondo's principle: An overview. In *Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling*, Ed. Ethier, Stewart N. and Eadington, William R., 471-492, Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, University of Nevada, Reno.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2009a). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability,* **14**, Paper no. 62, 1827-1862.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2009b). A Markovian slot machine and Parrondo's paradox. *Annals of Applied Probability* (to appear).

Kim, H. K. and Lee, D. S. (2007). Characterizations of the cores of integer total domination games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **18**, 1115-1121.

Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician. In *EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, Institute for Scientific Interchange Foundation, Torino, Italy.

Parrondo, J. M. R., Dinís, L., Garcia-Torano, E. and Sotillo, B. (2007). Collective decision making and paradoxical games. *European Physical Journal Special Topics,* **143**, 39-46.

Reed, F. A. (2007). Two-locus epistaxis with sexually antagonistic selection: A genetic Parrondo's paradox. *Genetics*, **176**, 1923-1929.

Spurgin, R. and Tamarkin, M. (2005). Switching investments can be a bad idea when Parrondo's paradox applies. *Journal of Behavioral Finance*, **6**, 15-18.

Van den Broeck, C. and Cleuren, B. (2004). Parrondo games with strategy. In *Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics II. SPIE*, Ed. Gingl, Z., Sancho, J. M., Schimansky-Geier, L. and Kertesz, J., Bellingham, WA.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(6), 973–982

한국데이터정보과학회지

Optimal strategies for collective Parrondo games

Jiyeon Lee[1]

Department of Statistics, Yeungnam University

Received 7 September 2009, revised 19 November 2009, accepted 23 November 2009

Abstract

Two losing games that can be combined, either by periodic alternation or by random mixture, to form a winning game are known as Parrondo games. We consider a collective version of Parrondo games in which players are allowed to choose the game to be played by the whole ensemble in each turn. In this paper, we analyze the long-range optimization strategy for all choices of the parameters and find the expected average profit in the steady state.

Keywords: Markov chain, optimal strategies, Parrondo games, stationary distribution.

[1] Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongbuk 712-749, Korea.
E-mail: leejy@yu.ac.kr