韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2009. 02. 제 48권, 제 1호, 81-91.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2009, Vol. 48, No. 1, 81-91.

학교수학에서 인수분해의 지도

최 상 기 (건국대학교)
이 지 혜 (건국대학교 대학원)

I. 서 론

이 논문에서의 인수분해는 수학과 교육과정에 나오는 자연수의 소인수분해와 다항식의 인수분해를 말한다. 인수분해는 하나의 소원(소수 또는 기약다항식)에 국소화(局所化)시키는데 필요한 계산으로 주어진 문제를 더 쉬운 단계의 문제로 만드는 절차이다. 이와 같은 과정은 다항식에 관한 문제를 풀 때 시행하는 첫 단계로써 계산의 기본적인 도구이다(Huneke, 1989 p.49). 인수분해를 한 다음 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있고, 주어진 다항식의 근도 더 쉽게 이해할 수 있다.

인수분해(유일인수분해)는 수학자들에게도 계산에 있어 이상적인 도구로 가우스 이후로 수와 방정식의 풀이에 활발하게 이용되었다. 1840 년 이후 완첼(Wantzel) 등은 바쉐방정식 $y^2 = x^3 - k$의 풀이에 유일인수분해를 이용하였고, 1847 년 파리 과학원 학술회의에서 라메(Lame)는 유일인수분해를 이용한 페르마의 마지막 정리의 풀이 방법을 제시하기도 하였다(Mordell, 1947, pp. 12-23). 유일인수분해는 특이점(singularuty)의 연구에 이용되며(Lipman, 1969), 행렬식(determinant)의 계산과도 관련이 있다(Eisenbud, 1975, Choi, 1988).

7 차와 8 차의 수학과 교육과정에서 인수분해에 대한 사항은 간략하게 서술되어, '인수분해를 익숙하게 할 수 있다'(교육부, 1997) 또는 '인수분해를 할 수 있다'(한국교육과정평가원, 2005)로 되어 있다. 인수분해를 하는 다항식이 속한 전체 집합에 대한 언급이 없어 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구하는 문제에서 수 인수에 대한 처리가 불명확하다. 교과서의 경우 책에 따라 수 인수의 처리에 대하여 세 가지 다른 방법으로 달리 서술하고 있다 (<표 III-4>).

'유리근의 정리(rational zero theorem)'는 다항식의 근을 찾거나 일차 인수를 계산하는데 필요한 기본적인 계산 도구이다. 그러나 7 차 수학과 교육과정과 8 차 수학과 교육과정에서 '유리근의 정리'에 대한 사항은 제외되고 있으며, 교과서의 경우 책에 따라 '유리근의 정리'에 관한 내용이 없거나 또는 여백에 간단한 보조설명으로 처리되고 있다(<표 III-5>).

인수분해에 대한 학생들의 이해도에서는 다양한 면을 볼 수 있다. 설문조사에 의하면 80 %가 넘는 학생들이 자연수의 소인수분해와 다항식의 인수분해 같은 원리라는 것을 잘 이해하고 있다. 그러나 수 인수에 대하여 학생들은 정확하게 이해하지 않고 있으며, 특히 유리수 계수 다항식의 경우에 많은 혼돈이 있는 것을 볼 수 있다. '유리근의 정리'의 경우 42 %의 학생들이 인수분해를 하는 한 방법으로 사용한다고 하였으나, 사용하는 학생 중 50 %가 넘는 학생들은 유리근의 정리가 수학적으로는 틀린 사실로 잘못 알고 있다. 이와 같이 수학과 교육과정의 제시와 그에 따른 교과서의 서술, 또 여백처리와 같은 교과서의 기술 방법조차도 하나의 수학 주제에 대한 학생들의 이해도에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

본 논문에서는 학교수학과 관련된 인수분해의 이론적 배경과 역사적 사실을 소개하고, 인수분해에 대한 수학과 교육과정(6, 7, 8 차)과 7 차 교육과정의 14 종의 수학 교과서를 비교 분석하였으며 2 종의 미국 교과서에 있는 유리근의 정리의 기술 방법을 참고하였다(Collins, 2007; Larson, 2007). 또 학생들의 이해도를 조사하기 위하여 설문조사와 함께 인수분해와 관련된 학생들의 문제풀이를 측정하였다. 이와 같은 조사와 분석을 통하여 가우스가 증명한 인수분해의 이론과 맞으면서 또한 학생들

* 접수일(2009년 1월 9일), 수정일(1차 : 2009년 2월 11일), 게재확정일(2009년 2월 14일)
* ZDM분류 : U24
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 인수분해, 수인수, 유리근의 정리

이 이해할 수 있는 인수분해에 관한 교과서의 기술 방법을 제시하고자 한다.

인수분해에 관한 이론적 배경으로 유클리드의 자연수의 소인수분해 정리(산술의 기본정리)와 다항식의 인수분해에 관한 가우스의 정리 등을 서술하고 증명 방법을 간략하게 제시하였다.

II 이론적 배경

1. 인수분해와 가우스의 정리

학교수학에서 인수분해는 7 학년의 자연수의 소인수분해와 9 학년과 10 학년의 다항식의 인수분해 두 가지가 있다. 이와 같은 인수분해는 유일인수분해(unique factorization, Bourbaki는 factorial이라고 함)를 말하며, 다음과 같이 유일인수분해 아닌 것은 학교수학에서 다루지 않는다.

보기 1 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$에서 6은 다음과 같이 두 가지 방법으로 인수분해되며, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$는 유일인수분해정역이 아니다.

$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

보기 2 정역이 아닌 $\overline{\mathbb{Z}_6}$를 계수로 하는 다항식환 $\overline{\mathbb{Z}_6}[x]$에서 일차다항식 $3x$는 다음과 같이 세 가지로 인수분해되며, $3x$의 근은 0, 2, 4의 3개이다.

$3x=3(x-2)=3(x-4)$

위의 보기에서와 같이 유일인수분해가 아닌 경우 최대공약수나 최소공배수를 정의할 수 없고, n차 다항식의 근이 n 개보다 많을 수 있다.

인수분해에 관한 최초의 결과는 산술의 기본 정리라고 불리는 자연수의 소인수분해이며, 이는 유클리드에게서 그 흔적을 찾을 수 있다.

정리 1 (유클리드 '원론' 9 권 정리 14 - Burton, 1995, p.184; Heath, 1926) 어떤 자연수가 주어진 소수들을 약수로 갖는 가장 작은 수이면, 다른 소수들은 그 수의 약수가 아니다("If a number be the least that can be measured by prime numbers, it will not be measured by any other prime numbers except those originally measuring it").

유클리드가 위의 정리에서 자연수를 소수의 곱으로 나타내는 것이나 또 곱에 있는 소인수의 개수에 대하여 명확하게 이해하지 못했다고 비판하는 이도 있다. 그러나 유클리드가 원론 9 권에서 소수가 무한히 많다는 것을 보였으며, 소수의 개념을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보였다(Hartshorne, 2000, p. 460; Heath, 1926). 더욱이 유클리드 보조정리(Euclid Lemma)라고 불리는 다음의 정리에서 자연수의 소인수분해에 대한 유클리드의 이해를 볼 수 있다.

정리 2 (유클리드 보조정리) 세 자연수 a, b, c가 $a\mid bc$이고 $(a,b)=1$이면, $a|c$이다.

$(a,b)=1$이므로 $1=ax+by$인 정수 x,y가 있고, $c=c(ax+by)=cax+cby$는 a의 배수이다.

유클리드 보조정리는 계산에 있어 기본적으로 쓰이는 중요한 도구로써 이 장에 있는 유리근의 정리의 증명에도 쓰인다.

산술의 기본 정리가 오늘날과 같이 '정수환은 유일인수분해정역이다'로 서술된 것은 가우스가 1801년 발표한 「수론 연구(Disquisitiones Arithmeticae)」이다. 그런데 정수의 유일인수분해성이나 다항식환의 유일인수분해성은 근본적으로 유클리드 알고리즘이라고 불리는 나눗셈과 나눗셈을 할 수 있는 유클리드정역에서 비롯된다.

정수계수 다항식 $f(x)$의 계수인 정수들의 최대공약수를 $f(x)$의 내용(the content of $f(x)$, 기호는 $c(f(x))$)이라 하고, 내용이 1인 다항식을 원시다항식(a primitive polynomial)이라 한다.

가우스는 소수의 성질(p가 소원이라는 정의 : $p|ab$이면, $p|a$ 또는 $p|b$)을 이용하여 두 원시다항식의 곱이 원시다항식이라는 사실을 처음으로 증명하였다.

정리 3 (가우스, 1801년) $f(x)$와 $g(x)$가 정수 계수 다항식일 때,

(1) $f(x)$와 $g(x)$가 원시다항식

$\Leftrightarrow$ $f(x)g(x)$가 원시다항식

(2) $c(f(x)g(x)) = c(f(x))c(g(x))$

등식 $c(f(x)g(x)) = c(f(x))c(g(x))$을 증명하기 위해서는 정수 계수 다항식을 그 다항식의 내용과 원시다항식의 곱으로 나타낸 다음 정리 3(1)을 이용하여 증명한다. 이 식은 가우스가 정수 계수 다항식을 유리수 계수 다항식의 곱으로 인수분해한 다음 정수계수 다항식의 곱으로 인수분해하는 각 과정마다 필요한 식이다.

가우스는 다음과 같이 세 단계의 과정을 거쳐서 정수 계수 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$가 유일인수분해정역이라는 것을 증명하였다.

단계 1 정수 계수 다항식을 그 다항식의 내용과 원시다항식의 곱으로 표시한다. 즉, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$에 대하여 $f(x) = af_1(x)$, a는 $f(x)$의 내용, $f_1(x)$는 원시다항식.

단계 2 $f_1(x)$를 유리수 계수 다항식의 곱으로 인수분해한 다음 정수계수 다항식의 곱으로 인수분해한다.

단계 3 정수환 $\mathbb{Z}$와 유리수 계수 다항식환 $\mathbb{Q}[x]$의 유일인수분해성에 의하여 정수 계수 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$의 유일인수분해성이 증명된다.

단계 2가 잘 인용되는 Gauss Lemma인데 보통 다음과 같이 서술된다.

정리 4 (Gauss Lemma) 정수계수 다항식 $f(x)$가 r차와 s차의 두 유리계수 다항식의 곱으로 인수분해되면, $f(x)$는 r차 s차의 두 정수계수 다항식의 곱으로 인수분해된다.

$\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해와 인수분해의 곱을 나타내는 기약다항식을 이해하기 위하여 정리 4를 다음과 같이 더 상세하게 서술하고 증명할 수 있다.

정리 5 $f(x)$가 정수계수 다항식일 때,

(1) $\deg(f(x)) = 0$인 경우(즉, $f(x) = a \in \mathbb{Z}$).

a는 $\mathbb{Z}[x]$에서 기약다항식 $\Leftrightarrow$ a는 정수소수

(2) $\deg(f(x)) \geq 1$인 경우.

$f(x)$는 $\mathbb{Z}[x]$에서 기약다항식 $\Leftrightarrow$

$c(f(x)) = 1$, $f(x)$는 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약다항식

즉, 주어진 정수 계수 다항식 $f(x)$에 대하여 정수 계수 다항식으로서의 인수분해와 유리수 계수 다항식으로서의 인수분해의 차이는 다항식의 계수들의 최대공약수인 $c(f(x))$ 처리에서만 달라진다(정리 5(2)). 이 때, $c(f(x))$의 인수분해는 $\mathbb{Z}[x]$에서는 정수의 소인수분해이고(정리 5(1)), $\mathbb{Q}[x]$에서는 0이 아닌 정수는 단원이므로 항등원 1과 마찬가지로 인수분해의 대상이 되지 않는다.

정리 5의 증명은 기약다항식의 정의(p가 기약원이라는 정의: $p = ab$이면, a 또는 b가 단원)에 따르는 논리적인 과정으로 각 환에서의 단원을 이해해야 한다. 환 R의 단원을 $U(R)$이라 할 때, 다음과 같다.

$U(\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z}[x]) = \{1, -1\}$

$U(\mathbb{Q}) = U(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q} - \{0\}$

정리 5는 전체집합을 $\mathbb{Z}[x]$로 고려하는 경우와 $\mathbb{Q}[x]$로 고려하는 경우에 인수분해의 차이를 설명하는 것으로써, 교과서에서 책에 따라 달리 기술되는 '수 인수'에 대한 이론적 배경이다. '수 인수'라 불리는 것은 주어진 다항식 $f(x)$의 수로서 약수인 $f(x)$의 내용, $c(f(x))$ 또는 $c(f(x))$의 약수를 말한다.

1801 년 가우스가 증명한 일반적인 정리(R이 유일인수분해정역이면, $R[x]$도 유일인수분해정역이다)도 $\mathbb{Z}[x]$의 유일인수분해성을 증명하는 위의 계산 과정이나 방법과 같다. 가우스의 결과는 체를 계수로 하는 멱급수환의 유일인수분해성(Lasker, 1905)과 정규국소환의 유일인수분해성(Auslander & Buchsbaum, 1959)의 증명 등으로 이어졌다.

2. 유리근의 정리

유리근의 정리(Rational Zero Theorem)는 정수 계수 다항식이 유리수를 근으로 가지면, 그 근을 기약분수로 적을 때, 분자는 다항식의 상수항의 약수이고 분모는 최고차항이 계수의 약수가 된다는 정리이다.

정리 6 (유리근의 정리) 정수계수 다항식

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n (a_n \neq 0)$가 기약분수 $\dfrac{b}{c}$ $(b, c \in \mathbb{Z})$를 근으로 가지면, $b \mid a_0$, $c \mid a_n$이다.

유리근의 정리는 등식 $f(\dfrac{b}{c}) = 0$에 c^n을 곱한 다음, $a_0 c^n$(또는 $a_n b^n$)을 이항하여 얻은 식에서 정리 2(Euclid Lemma)를 적용하여 간단히 증명할 수 있다. 또 유리근의 정리는 가우스의 공식(정리 3(2))를 이용하여 증명할 수 있다.

유리근의 정리는 6 차 수학과 교육과정의 삼차방정식과 사차방정식의 부분에서 인수정리를 이용하는 과정에 간접적으로 서술되어 있다(교육부, 1992 p. 97). 그러나 7 차와 8 차 수학과 교육과정 해설서에는 유리근의 정리는 제외되어 있다(<표 III-6>).

유리근의 정리는 대수방정식(다항방정식)의 근을 찾는 도구로 먼저 학습한 다음 인수정리와 결합되어 다항식의 인수분해에 이용하는 과정으로 전개되어야 한다. 그러나 교과서에서는 인수분해의 소단원에서 인수분해를 할 때 필요한 도구 중 하나로 이용하는데, 책에 따라 그 공식을 여백이나 하단에 포함시키고 있다(<표 III-5>). 또 유리근의 정리는 삼차방정식과 사차방정식의 소단원에서 인수정리를 적용하는 과정에 간접적으로 포함되어 있다.

정리 7 (인수정리) 정수 계수 다항식 $f(x)$와 정수 a에 대하여,

$$x - a\text{는 } f(x)\text{의 약수} \Leftrightarrow f(a) = 0$$

그러나 인수정리는 동치 명제로 그치며, 실제로 $x-a$ 또는 a를 발견하기 위해서는 유리근이 정리를 적용하여야 한다. 이와 같이 유리근의 정리는 다항식의 근이나 일차인수를 계산할 수 있게 하는 실질적인 도구로써 다항식의 이해에 필요한 기본적인 도구이다.

III 수학과 교육과정과 14종의 교과서 분석

1. 수학과 교육과정과 인수분해

다항식의 인수분해와 다항식의 약수와 배수는 6 차 교육과정에서는 공통수학(10 학년)의 대수 중 다항식 부분에 있으며, 7 차와 8 차 교육과정에서는 10 학년 문자와 식에 포함되어 있다. 그 내용은 다음과 같다(교육부, 1992; 교육부, 1997; 한국교육과정평가원 2005).

<표 III-1> 수학과 교육과정의 인수분해

6차	중학교에서 학습한 인수분해의 기능을 더욱 깊게 하고, 이차다항식의 인수분해를 할 수 있도록 한다.
7차	인수분해를 익숙하게 할 수 있다.
8차	인수분해를 할 수 있다.

다항식의 약수와 배수 부분은 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구하는 내용으로 7 차에서 5-가의 자연수의 최대공약수와 최소공배수, 7-가의 자연수의 소인수분해와 최대공약수와 최소공배수를 구하는 것과 같은 원리이며, 그 연계성이 매우 중요하다.

<표 III-2> 수학과 교육과정의
10 학년 다항식의 약수와 배수

6차	수의 약수, 배수의 이해를 바탕으로 다항식의 약수, 배수를 이해하게 하며, 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있도록 한다. 또, 수의 약수 배수를 생각할 때에는 자연수에서만 생각할 것이 아니라, 주어진 **전체집합**을 고려해야 함을 이해시킨다.
7차	식의 약수와 배수의 뜻을 알고, 그 계산을 할 수 있다.
8차	다항식의 약수와 배수의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 다항식의 최대공약수와 최소공배수의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

6 차의 경우 7 차나 8 차보다 기술이 상세할 뿐만 아니라, 수 인수와 관련된 전체집합을 고려해야 함을 지적하고 있다. 즉, 다항식이 속한 전체집합(다항식환)이 정수 계수 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$인 경우와 유리수 계수 다항식환 $\mathbb{Q}[x]$인 경우 수 인수의 문제가 달라짐을 지적하고 있다. 이것은 II 장의 이론적 배경에 있는 가우스 정리가 명확히 설명하고 있다. 즉, 전체집합이 $\mathbb{Z}[x]$인 경우에는 수 인수를 $\mathbb{Z}$에서와 같이 소인수분해하는 것이 $\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해이다(II장 정리 5(1)). 그러나 전체집합이 $\mathbb{Q}[x]$인 경우에 수 인수는 단원이므로 인수분해의 대상이 되지 않는다. 또한 원시다항식의 경우에는

$\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해와 $\mathbb{Q}[x]$에서의 인수분해가 일치한다(II장 정리 5(2)).

2. 수 인수에 대한 교과서의 기술

교과서에서 인수분해와 관련된 수 인수와 유리근의 정리 등의 기술 방법을 분석하기 위하여 다음의 14 종의 교과서를 선정하였다.

<표 III-3> 14 종 교과서

출판사	저자
교학사	박규홍 외 3명
금성출판사	양승갑 외 8명
대한교과서-A	박윤범 외 5명
대한교과서-B	우정호 외 3명
동아서적	박세희 외 3명
동화사	강행고 외 6명
두산	임재훈 외 7명
법문사	박배훈 외 4명
고려출판	최상기 외 3명
새한교과서	이광복 외 3명
중앙교육진흥연구소	최봉대 외 6명
지구문화사	장건수 외 4명
지학사	김수환 외 6명
천재교육	신현성 외 1명

교과서에서 다항식 $f(x)$의 계수들의 최대공약수인 $f(x)$의 내용 또는 $f(x)$의 내용의 약수를 $f(x)$의 수 인수라 부른다. 주어진 두 다항식의 최대공약수나 최소공배수를 구하는 문제에서 교과서에 따라 다음과 같이 세 가지 방법으로 설명하고 있다.

<표 III-4> 수 인수에 관한 교과서의 기술

수 인수를 고려하거나 무시한다.	천재교육, 두산, 고려출판, 지구문화사, 법문사, 지학사, 동화사, 중앙교육진흥연구소, 교학사
수 인수를 무시한다.	새한교과서, 금성 출판사, 대한교과서-B
수 인수에 관한 언급이 없고, 최고차항의 계수가 1인 다항식만 다룬다.	대한교과서-A, 동아서적

수 인수를 고려하는 것은 $\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해이며, 수 인수를 무시하는 것은 $\mathbb{Q}[x]$에서의 인수분해이다. 또 최고차항이 1인 다항식은 원시다항식이므로 두 가지의 인수분해가 일치한다.

3. 유리근의 정리에 대한 교과서의 기술

유리근의 정리는 정수 계수 다항식의 유리수 근을 찾거나 일차 인수를 계산하는데 필요한 정리이다. 교과서에서는 삼차다항식 또는 사차다항식의 인수분해에 관한 예제에서 여백이나 하단 등에 간단히 기술되고 있다. 유리근의 정리에 대한 교과서의 기술은 다음과 같이 세 가지 유형이 있다.

<표 III-5> 유리근의 정리에 대한 교과서의 기술

삼차다항식을 인수분해하는 예제의 옆 또는 하단에 유리근의 정리를 공식으로 제시한다.	교학사, 새한교과서, 법문사, 지학사
삼차다항식을 인수분해하는 예제의 풀이 과정 안에서 유리근의 정리가 성립함을 보이고, 다항식의 일차 인수를 찾는 방법으로 제시한다.	금성출판사, 천재교육, 두산, 대한교과서 2 종, 고려출판, 동화사, 동아서적
유리근의 정리에 관한 내용이 없다.	중앙진흥교육원, 지구문화사

유리근의 정리는 6 차 수학과 교육과정의 방정식 중 삼차방정식과 사차방정식에서 인수정리를 적용하는 과정에 간접적으로 서술되어 있다(교육부, 1992). 그러나 7차와 8 차 수학과 교육과정에서는 제외되었으며 다음과 같다.

<표 III-6> 삼차방정식과 사차방정식에 대한 수학과 교육과정의 기술

6차	실계수인 삼차, 사차방정식은 주로 정수 계수로서, 유리수의 범위에서인수분해가 되는 것만이 대상이 된다. 이 때, 삼차방정식의 근은 중근을 포함해 3 개, 사차방정식의 근은 중근을 포함해 4 개임을 인식하도록 한다. **인수분해의 방법은 상수의 약수에 대하여 다항식에서 학습한** 나머지정리, 인수정리, 조립제법을 활용하도록 한다.
7차	간단한 삼차방정식, 사차방정식을 풀 수 있다.
8차	간단한 삼차방정식, 사차방정식을 풀 수 있다.

6 차 교육과정에서 '유리수의 범위에서 인수분해가 되는 것'은 유리수의 범위에서 일차 또는 이차다항식의 곱으로 인수분해하고 이차인수의 경우에 근의 공식을 적용하여 푸는 것을 말한다. 또 '인수분해의 방법은 상수의 약수에 대하여 다항식에서 학습한'이라는 부분은 최고차항의 계수가 1인 다항식에 유리근의 정리를 적용하는 것을 말한다('정수근의 정리'-Integral zero theorem라고 불린다). 교과서서에서도 유리근의 정리가 삼차방정식 또는 사차방정식을 풀 때 실질적인 도구임에도 인수정리에 의하여 푸는 과정에 간접적으로 포함되고 있다.

조사된 두 종류의 미국 교과서의 경우에는 유리근의 정리는 다항식을 다루는 대단원의 후반부에 10 쪽 정도의 독립된 소단원으로 구성되어 있다(Collins, 2007, pp.509-518, Larson, 2007, pp. 370-377). 11 학년의 수학 교재인 Larson의 ALGEBRA 2의 경우에 유리근의 정리에 관한 소단원은 다음과 같다. 생각열기와 증명 없이 유리근의 정리 기술(p 370), 최고차항의 계수가 1인 삼차 다항식(a monic polynomial)의 가능한 유리근 찾기(예제 1), 최고차항의 계수가 1인 삼차 다항식의 유리근을 찾고 그 다항식을 인수분해하기(예제 2)와 최고차항의 계수가 1이 아닌 사차 다항식의 유리근을 찾고 그 다항식을 인수분해하기(예제 3), 실생활 문제에 응용(예제 4), 연습문제(pp. 374-378)로 구성되어 있다.

IV. 학생들의 이해도 측정과 분석

인수분해와 유리근의 정리에 대한 학생들의 이해도를 조사하기 위하여 서울 소재 K 고등학교 1 학년 138 명을 대상으로 7 개 문항으로 다음과 같이 조사하였다.

1. 자연수의 소인수분해와 다항식의 인수분해의 비교와 각 경우 최대공약수와 최소공배수를 구하는 원리에 대한 이해도

문제 1 자연수의 최대공약수, 최소공배수를 구하는 문제와 다항식의 최대공약수, 최소공배수를 구하는 것은,
① 수학적으로 같은 원리이고 계산하는 방법도 같다.
② 수학적으로 같은 원리이나 계산하는 방법이 다르다.
③ 수학적으로 다른 원리이나 구하는 방법이 비슷한 문제이다.
④ 수학적으로 다른 원리이고 구하는 방법도 다르다.

번호	①	②	③	④	미응답
학생 수	65	46	20	4	3
비율 (%)	47.1	33.3	14.5	2.9	2.2

분석 : 자연수(정수)의 소인수분해와 다항식의 인수분해, 또 그에 따른 최대공약수와 최소공배수를 계산하는 과정은 같은 원리이다.

7 차 교육과정의 5-가에서 자연수의 약수와 배수, 두 자연수의 최대공약수와 최소공배수를 구하게 하고, 7-가에서 자연수의 소인수분해를 하고 두 자연수의 최대공약수와 최소공배수를 구하게 한다. 다항식의 최대공약수와 최소공배수는 10-가에서 구하게 하는데, 80.4 %의 학생들이 같은 원리라고 잘 이해하고 있으며 47.1 %의 학생들은 계산하는 방법도 같다고 이해하고 있다. 이와 같이 이해도가 높은 이유는 각 단원이 시작 부분에 준비 학습이나 생각열기로 그 연계성이 잘 강조했기 때문이다.

2. 두 다항식의 최대공약수를 구하는 문제에 대한 이해도

문제 2 두 다항식 $2x(x-1)$와 $6x(x+1)$의 최대공약수로 맞는 것을 보기에서 모두 고르시오.
① x ② $2x$ ③ $6x$ ④ $x(x-1)(x+1)$

번호	①	②	③	④	①, ②	①, ②, ③	기타
학생수	14	63	9	9	27	3	13
비율	10.1	45.7	6.5	6.5	19.6	2.2	9.4

분석 : 두 다항식을 $\mathbb{Z}[x]$의 원소로 고려할 경우(수 인수를 고려하는 경우)에는 최대공약수는 $2x$이고, 두 다항식을 $\mathbb{Q}[x]$의 원소로 고려할 경우(수 인수를 무시하는 경우)에는 x, $2x$, $6x$가 모두 맞는 답이다.

다수의 학생들이(45.7 %) 수 인수를 고려한 답을 하고 있다. 교과서에서 수 인수를 무시할 경우 최고차항의 계수가 1인 다항식을 최대공약수로 제시하고 있다. 즉,

교과서에서 제시되는 답은 ① 또는 ② 또는 ①과 ②이며, 그와 같이 답한 학생은 모두 75.4 %이다.

①, ②, ③을 모두 답한 경우에 학생이 $\mathbb{Q}[x]$에서 세 가지가 모두 최대공약수가 된다는 것을 이해하는지 판단하기 어렵다.

3. 두 다항식의 최소공배수를 구하는 문제에 대한 이해도

문제 3 두 다항식 $2x(x-1)$와 $6x(x+1)$의 최소공배수로 맞는 것을 보기에서 모두 고르시오.
① $x(x-1)(x+1)$ ② $2x(x-1)(x+1)$
③$6x(x-1)(x+1)$ ④ $12x(x-1)(x+1)$

번호	①	②	③	④	① ③	① ② ③	① ② ③ ④	기타
학생수	18	18	55	11	2	5	3	26
비율	13	13	39.9	8	1.4	3.6	2.2	18.9

분석 : 두 다항식을 $\mathbb{Z}[x]$의 원소로 고려할 경우(수 인수를 고려하는 경우)에는 최소공배수는 $6x(x-1)(x+1)$이고, 두 다항식을 $\mathbb{Q}[x]$의 원소로 고려할 경우(수 인수를 무시하는 경우)에는 보기의 네 다항식이 다 맞는 답이다.

다수의 학생들이(39.9 %) 수 인수를 고려한 답을 하고 있다. 교과서에 제시된 답인 ① 또는 ③ 또는 ①과 ③으로 답한 학생은 모두 54.3 %이다. 이와 같이 최대공약수보다 최소공배수에 대한 학생들의 정답률과 이해도가 낮음을 볼 수 있다.

수 인수를 무시할 경우 네 다항식이 이론적으로 다 맞다 하더라도 ②나 ④ 또는 그것을 포함하는 답을 한 경우에 학생의 이해나 계산 과정을 정당화할 수 없다.

4. 유리수 계수인 두 다항식의 최소공배수를 구하는 문제에 대한 이해도

문제 4 두 다항식 $\frac{3}{2}x(x-1)$와 $\frac{9}{4}x(x+1)$의 최소공배수로 맞는 것을 보기에서 모두 고르시오.
① $x(x-1)(x+1)$ ② $\frac{3}{2}x(x-1)(x+1)$
③ $\frac{3}{4}x(x-1)(x+1)$ ④ $\frac{2}{9}x(x-1)(x+1)$

번호	①	②	①,②, ③,④	미응답	기타
학생수	21	52	4	20	41
비율	15.2	37.7	2.9	14.5	29.7

분석 : 두 다항식의 계수가 정수가 아닌 유리수이므로 전체집합은 $\mathbb{Q}[x]$이며, 이 경우 네 다항식이 모두 답이 된다. 교과서에서 최대공약수나 최소공배수의 문제에서 최고차항의 계수가 1인 다항식을 답으로 제시함에도 불구하고 $x(x-1)(x+1)$보다 $\frac{3}{2}x(x-1)(x+1)$을 더 많이 선택하였다(37.7 % > 15.2 %).

교과서에서 정수 계수 위주로 문제를 다루므로 학생들이 익숙하지 않은 문제이다. 또 답안의 분포를 볼 때, 정수가 아닌 유리수 계수 다항식의 계산에서는 수 인수를 무시해야 한다는 사실을 학생들이 더 이해하지 못 함을 볼 수 있다.

5. 두 다항식이 서로소임을 이해하는 문제

문제 5 다음 두 다항식이 서로소이면 0, 아니면 X로 답하시오.
① $8x(x+1)$, $15x(x+1)(x+2)$ ( )
② $12x(x+1)$, $27(x+2)(x+3)$ ( )
③ $x(x+1)$, $(x+1)(x+2)$ ( )
④ $x(x+1)$, $(x+2)(x+3)$ ( )

분석 : 두 다항식을 $\mathbb{Z}[x]$의 원소로 고려할 경우에 답은 ④이고, $\mathbb{Q}[x]$의 원소로 고려할 경우에 답은 ②와 ④이다. 최대공약수와 최소공배수 모두에서 수 인수를 고려한 학생(2 번 문제에서 ②, 3 번 문제에서 ③)이 42명(30.3 %)인데, 42 명 중 26 명이 수 인수를 고려하여 ④을 답으로 하였으며, 42 명 중 11 명은 수 인수를 고려하지 않은 ②와 ④ 모두를 답하였다. 이와 같이 수 인수를 고려하거나 무시하는 문제에 있어 학생들의 사고과정이나 계산이 일관되지 않음을 볼 수 있다.

6. 유리근의 정리를 인수분해에 이용하는 문제

문제 6 다음의 공식을 이용하여 인수분해를 한 적이 있다. (예, 아니오로 답함) 공식 : 정수 계수 다항식이 유리수를 근으로 가지면, 그 근은 다음 중 하나이다. $\pm \dfrac{\text{상수항의약수}}{\text{최고차항의계수의약수}}$			
	예	아니오	미응답
학생수	58	72	8
비율(%)	42	52.2	5.8

분석 : 유리근의 정리는 다항식의 일차 인수를 계산하거나 근을 찾는데 필요한 기본적인 도구임에도 42 %의 학생만이 이 공식을 이용하고 있다. 유리근의 정리가 교과서에 따라 소개되지 않거나, 여백에 수록되므로 유리근의 정리에 대한 학생들의 이해도나 활용도가 낮은 편이다.

7. 유리근의 정리에 대한 이해도와 신뢰도의 문제

문제 7 문제 6에서 '예'라고 답한 학생은 다음 중 옳은 것을 고르시오. ① 위의 방법은 수학적으로 맞고, 근이 있는 경우 그 근을 찾는 옳은 방법이다. ② 위의 방법은 수학적으로 맞으나, 근을 찾는데 도움이 되지 않는다. ③ 위의 방법은 수학적으로 틀리나, 다만 근을 찾는데 도움이 된다. ④ 위의 방법은 수학적으로 틀리고, 근을 찾는데 도움이 되지 않는다.					
	①	②	③	④	미응답
학생 수	21	3	30	1	3
비율(%)	36.2	5.2	51.7	1.7	5.2

분석 : 유리근의 정리를 이용하여 인수분해를 하는 58 명 중에서 51.7 % 해당하는 30 명이 유리근의 정리를 틀린 명제로 알고 있다. 불과 36.2 %의 학생들이 수학적으로 맞고 근을 찾는 옳은 방법이라고 이해하고 있다. 이는 수학의 정리나 공식을 여백이나 하단처리를 하는 경우 또는 특정한 보기에 적용하여 서술되는 경우에 대다수의 학생들이 수학적인 정리로 이해하고 있지 않음을 보여 주는 예이다.

V. 결론 및 제안

이 논문의 주된 내용은 수학과 교육과정 10 학년의 문자와 식 중에서 인수분해, 약수와 배수의 단원 나오는 '수 인수'와 '유리근의 정리'이다. 교과서에서는 인수분해, 약수와 배수의 단원과 삼차방정식과 사차방정식의 단원이다. 이 부분은 수 인수 문제(전체집합)와 유리근의 정리(인수정리)의 이용 등에서 6 차 교육과정에 제시된 것을 따르고 있다(<표 III-2>, <표 III-6> 참고).

수 인수의 경우 교과서에 따라 달리 서술되는 점을 논하였는데 그 이론적 배경은 전체 집합이 $\mathbb{Z}[x]$인 경우와 $\mathbb{Q}[x]$인 경우에 기약다항식이 달라지기 때문이다(II 장 정리 5).

교과서에서는 인수분해의 소단원 다음에 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 다루는 약수와 배수의 소단원이 이어지고 있다. 교과서의 인수분해의 소단원에는 수 인수에 대한 내용이 없으며, 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구하는 약수와 배수의 소단원에서는 교과서에 따라 수 인수에 대한 설명이 달라지고 있다(<표 III-4>).

조사된 14 종의 교과서 중에서 9 종의 교과서가 '수 인수를 고려하거나($\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해) 무시한다($\mathbb{Q}[x]$에서의 인수분해)'의 두 가지 방법을 다 제시하고 있다. 수 인수를 고려한 다항식의 인수분해는 7 학년에서 학습한 자연수의 소인수분해와 연관되는 장점이 있다. 학생들도 수 인수를 고려한 경우를 가장 많게 정답으로 선택하였다(IV 장 문제 2에서 수인수를 고려한 최대공약수는 45.7 %, 문제 3에서 수인수를 고려한 최소공배수는 39.9 %). 그러나 14 종의 교과서 중 어느 것도 수 인수를 고려한 것만으로 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 제시하고 있지 않다. $\mathbb{Z}[x]$가 유일인수분해정역이라는 가우스의 증명 과정에서도 $\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해는 $\mathbb{Q}[x]$에서의 인수분해에서 유도된다. 즉, 이론적으로도 $\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해는 $\mathbb{Q}[x]$에서의 인수분해가 설명된 이후에 설명할 수 있다. 또한, 수 인수를

고려한 $\mathbb{Z}[x]$에서의 인수분해만을 채택할 경우 선행되는 인수분해의 소단원에서도 정수의 소인수분해도 다항식의 인수분해의 일부분이라는 것을 설명해야 한다. 그러나 이와 같은 점은 학생들이 더욱 이해하기 어려운 부분이다.

'수인수를 고려하거나 무시한다'의 두 가지 방법을 다 제시할 경우 전체집합에 따라 인수분해가 달라지는 것을 설명해야 하는 어려움이 있다. 또 각 문제마다 전체집합을 $\mathbb{Z}[x]$ 또는 $\mathbb{Q}[x]$로 달리 제시하여 문제를 풀게 하는 것은 중등대수의 범위를 벗어난다.

교과서에 있는 다항식을 조사해 보면, 대부분은 정수 계수 다항식이다. 그러나 실생활 문제(수학 외적 문제)의 경우에 상당수의 다항식은 그 계수가 정수가 아닌 유리수이다. 이런 실생활 문제는 화살의 궤도, 수확량, 생산원가 등을 나타내는 2 차 또는 3 차 다항식인데, 문제의 실제 상황이 정수가 아닌 유리수 계수 다항식으로 나타나기 때문이다. 학교수학의 중요한 소재인 이와 같은 실생활 문제에 나오는 다항식을 배제할 수는 없다.

위와 같은 상황을 고려할 때 교과서의 인수분해 단원에서 다항식 전체의 집합은 유리수 계수 다항식환(변수가 x 하나일 때, $\mathbb{Q}[x]$)으로 고려되어야 한다. 따라서 최대공약수와 최소공배수를 구하는 문제에서는 '수 인수를 무시한다'로 설명하며, 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수는 정수 계수 다항식으로서 최고차항의 계수가 1인 것 또는 계수들의 최대공약수가 1인 원시다항식으로 제시하는 것이 타당하다.

'정수계수 다항식이 기약분수를 근으로 가지면 기약분수의 분자는 상수항의 약수이고, 분모는 최고차항의 계수의 약수'라는 유리근의 정리는 다항식의 근이나, 일차인수를 찾는데 필요한 기본적인 도구이다. 조사된 14 종의 교과서 중에서 12 종의 교과서가 간접적인 방법으로 유리근의 정리를 기술한 점에서도 유리근의 정리가 다항식을 이해하는 기본적인 도구이며 교과서에 포함되어야 함을 볼 수 있다(<표 III-5>). 인수정리를 이용하여 다항식 $f(x)$의 인수 $x-a$를 찾을 때 유리근의 정리를 이해하여야 $f(x)=0$의 근인 a를 찾을 수 있다. 6 차 수학과 교육과정 지침서에 이에 대한 간접적인 서술이 있으며, 7 차와 8 차 수학과 교육과정 지침서에서 이 부분이 제외되어 있다(<표 III-6>).

학생들의 설문조사를 보면 138 명 중 42 %인 58 명 학생이 유리근의 정리를 이용하고 있다. 그러나 유리근의 정리를 이용한 58 명 중 30 명(51.7 %)의 학생은 유리근의 정리를 '수학적으로 틀리나 근을 찾는데 도움이 된다'고 답하고 있다(IV 장 문제 6, 7). 학생들이 유리근의 정리가 수학적으로 틀리다고 생각하는 이유는 다음의 두 가지로 분석된다.

1. 교과서에서 유리근의 정리를 분명하게 제시하지 않는다(<표 III-5>).
2. 유리근의 정리를 인수분해 단원에서는 이용하지만 방정식의 단원에서는 인수정리 안에 포함되어 있다.

유리근이 정리는 다항식을 이해하는데 필요한 기본적인 도구이므로 수학과 교육과정에 수록되어야 한다. 또 교과서에서는 인수분해의 단원과 방정식이 단원 다음에 유리근의 정리를 하나의 독립된 소단원으로 구성할 필요가 있다. 이 소단원은 생각열기와 유리근의 정리의 기술(증명없이), 방정식의 근을 찾는 예제와 연습문제, 다항식의 일차인수를 찾는 예제와 연습문제로 구성하도록 한다. 학생들의 이해를 돕기 위하여 소단원의 구성 순서는 유리근의 정리를 이용하여 방정식의 근을 찾게 하고, 그 다음 다항식의 일차인수를 찾는 인수정리의 적용과 인수분해로 구성하는 것이 타당하다.

참 고 문 헌

교육부 (1992). 고등학교 수학과 교육과정 해설, 서울 : 대한교과서주식회사.

교육부 (1997). 제 7 차 수학과 교육과정, 서울 : 대한교과서주식회사.

한국교육과정평가원 (2005). 수학과 교육과정 개정 시안 및 수준별 수업활성화 방안, 서울 : 한국교육과정평가원.

강행고 외 (2001). 수학 10-가, 동화사.

김수환 외 (2001). 수학 10-가, 지학사.

박규홍 외 (2001). 수학 10-가, 교학사.

박배훈 외 (2001). 수학 10-가, 범문사.

박세희 외 (2001). 수학 10-가, 동아서적.

박윤범 외 (2001). 수학 10-가, 대한교과서.

신현승 외 (2001). 수학 10-가, 천재교육.

양승갑 외 (2001). 수학 10-가, 금성출판사.

우정호 외 (2001). 수학 10-가, 대한교과서.

이광복 외 (2001). 수학 10-가, 새한교과서.

임재훈 외 (2001). 수학 10-가, 두산.

장건수 외 (2001). 수학 10-가, 지구문화사.

최봉대 외 (2001). 수학 10-가, 중앙교육진흥연구소.

최상기 외 (2001). 수학 10-가, 고려출판.

Auslander, M., & Buchsbaum, D. Unique factorization in regular local rings, *Proceeing in Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 42, pp.36-38

Burton, D. M. (1995). *History of Mathematics* (3rd ed), Wm. C. Brown Publishers.

Choi, S. (1988). The divisor class group of surfaces of embedding dimension 3, *Journal of Algebra,* **vol 119, No1**. pp.162-169.

Collins, W., & Winters, L (2007). *Glencoe Algebra 2,* McGraw-Hill.

Eisenbud, D. (1975). Recent progress in commutative algebra, *Algebraic Geometry - Arcta 1974,* Proc. pure math. vol 29, AMS pp.111-128.

Hartshorne, R. (2000). Teaching geometry according to Euclid, *Notices of the American Mathematical Society,* **vol 47, No 4**.

Heath, T. L. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements,* Cambridge University Press.

Huneke, C. (1989). An algebraist commuting in Berkeley, *Mathematical Intelligencer,* **vol 11, No1**, Springer-Verlag New York.

Larson, R., Boswell, L., Kanold, T., & Stiff, L. (2007). *Algebra 2,* McDougal Littell.

Lasker, E. (1905). Zur Thoerie der Modulin and ideale. *Math. Ann. 60* pp.20-116.

Lipman, J. (1969), Rational singularities with application to algebraic surfaces and unique factorizations, *IHES* 36, pp. 195-279.

Mordell, L. J. (1947). *A chapter in the theory of numbers-An inaugural lecture,* Cambridge University Press.

Teaching Factorization in School Mathematics

Choi, Sangki
Department of Mathematics Education, Konkuk University, Seoul 143-710, Korea
Email : schoi@konkuk.ac.kr

Lee, Jee Hae
Graduate School, Konkuk University, Seoul 143-710, Korea
Email : pretty2sense@naver.com

This paper focuses on two problems in the 10th grade mathematics, the rational zero theorem and the content(the integer divisor) of a polynomial.

Among 138 students participated in the problem solving, 58 of them (42 %) has used the rational zero theorem for the factorization of polynomials. However, 30 of 58 students (52 %) consider the rational zero theorem is a mathematical fake(false statement) and they only use it to get a correct answer.

There are three different types in the textbooks in dealing with the content of a polynomial with integer coefficients. Computing the greatest common divisor of polynomials, some textbooks consider the content of polynomials, some do not and others suggest both methods. This also makes students confused.

We suggests that a separate section of the rational zero theorem must be included in the text. As for the content of a polynomial, we consider the polynomials are contained in the polynomial ring over the rational numbers. So computing the gcd of polynomials, guide the students to give a monic(or primitive) polynomial as an answer.

* ZDM Classification : U24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : factorization of polynomials, content, rational zero theorem