

소마큐브(Soma Cube) 활동에서 포함-배제 방법의 활용에 대한 연구

심 상 길 (단국대학교)

황 선 옥 (승실대학교)¹⁾

I. 서론

학교 수학교육에서는 학생들에게 새로운 문제 상황에서 문제해결 능력을 향상시키기 위해 교수-학습 자료로 다양한 구체물의 활용을 권장하고 있다. 특히, 제7차 교육과정에서 공간 능력 계발을 강조하면서, 이러한 구체물로서 쌓기나무가 초등학교 수학 2-나(교육부, 2000)와 수학 6-가(교육부, 2002)에서 활용되고 있다. 쌓기나무를 낱개로 사용할 경우 이를 쌓아서 입체도형을 만든 후 개수 세기와 모양 관찰하기, 쌓여 있는 규칙 찾기 등과 같은 관찰 수준으로 활용된다. 그러나 쌓기나무를 2개 이상 붙여서 만든 모양 조각을 사용하면 더 다양하고 수학적 활동에 활용할 수 있다.

쌓기나무를 2개 이상 붙여서 만든 조각으로 구성된 퍼즐을 폴리큐브(Polycube) 퍼즐이라고 하는데 소마큐브(Soma Cube)가 대표적인 예이다(Zhang, 1996). 소마큐브는 수학과 영재교육과정 시안(한국교육개발원, 1999)에서 공간감각을 기르고 문제해결 능력을 신장시키는 기하 퍼즐로 소개되고 있으며, 재미있는 입체도형을 만들 수 있어 상상력과 추리력을 기를 수 있다고 소개되고 있다(전평국 외, 2002, p. 72). 또한, 미국 수학교사를 위한 수업 활동자료(Bennett & Nelson, 2004, p. 251)에서도 소마큐브를 사용하여 입체도형을 만드는 활동이 소개되고 있으며, 특히 공간감각을 키우는 활동교구로 활용하고 있다(Kremer, 1989; Mack & Feldt, 1993). 뿐만 아니라, 폴리큐브를 활용하는 활동이 우리나라에서는 주로 초등

학교나 중학교 정도의 수준에서 다루어지는 것과 달리, 외국에서는 고등학교 이상의 심화교육이나 영재교육의 수준에서도 다루어지고 있다(Averbach & Chein, 1980, pp. 284-286; Vaderlind et al., 2002, p. 15).

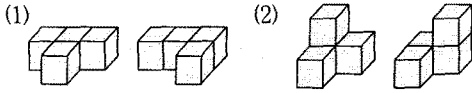
소마큐브는 단순히 흥미와 지적 호기심을 충족시키는 퍼즐로 인식되었으나, 10여 년 전부터 수학 학습과 창의성 향상을 위한 활동 소재로 활용하기 위한 노력이 진행되어 왔다(박영희, 1999; 한국교육개발원, 1999; 이강섭·심상길, 2005). 소마큐브는 학교 수학교육의 특별 활동이나 방과 후 활동, 영재교육 기관의 입체도형 만들기나 3×3×3 정육면체 맞추기 등의 활동에 활용되고 있지만, 수학적 개념이나 문제해결을 위한 소재로서 다양하게 활용되고 있지 못한 실정이다. 이는 소마큐브의 조합론적 기하학적 특성과 수학적 아이디어와의 연결에 대한 연구 등이 외국(Cooper & Sweller, 1989; Golomb, 1994; Guy & Paulhus, 2002)의 경우에 비해 미진하여 학교에서 손쉽게 활용할 수 있도록 체계적으로 정리된 자료가 상대적으로 부족하기 때문이다.

이 연구에서는 소마큐브를 사용하는 수학적 활동에서 포함-배제의 방법을 활용하여 해를 찾는 과정을 체계적으로 분석함으로써, 소마큐브를 학교수학에서 효과적으로 활용할 수 있도록 하기 위한 기초 자료와 방향을 제시하려고 한다.

II. 소마큐브의 구성

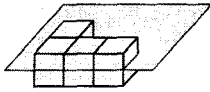
폴리큐브는 그 모양에 따라 '평편한 조각(flat pieces)'과 '평편하지 않은 조각(non-flat pieces)'으로 분류된다(Zhang, 1996, pp. 5-6). 평편한 조각은 <그림 1>의 (1)과 같이 단위 높이를 갖도록 놓힐 수 있는 조각을 말하고, 평편하지 않은 조각은 <그림 1>의 (2)와 같이 단위 높이를 갖도록 놓힐 수 없는 조각을 말한다.

* 접수일(2008년 10월 7일), 수정일(1차 : 2008년 11월 6일, 2차 : 2009년 12월 16일), 게재확정일(2009년 2월 9일)
* ZDM분류 : U63
* MSC2000분류 : 97U60
* 주제어 : 소마큐브, 포함-배제 방법, 합접성, 이접성
1) 교신저자(shwang@ssu.ac.kr)



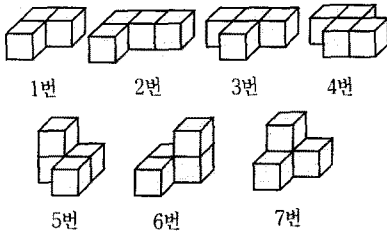
<그림 1> 평편한 조각과 평편하지 않은 조각

또, <그림 2>와 같이 평편한 조각은 모두 반사 대칭성(reflexive symmetry)을 갖는다(Zhang, 1996, p. 6).



<그림 2> 평편한 조각의 반사 대칭성

소마큐브는 1936년 덴마크의 Piet Hein에 의해 고안된 퍼즐로서(Zhang, 1996, p. 45), 이것으로 3×3×3 정육면체를 맞추는 서로 다른 방법은 거울 대칭인 것을 포함하여 480가지 방법이 있는 것으로 알려져 있다(한국교육개발원, 2004, p. 7; 송근운, 2007, p. 38). 소마큐브를 사용하는 활동에서 문제나 답을 제시할 때 각 조각을 구별하기 쉽도록 숫자 번호 또는 영어 알파벳을 부여하거나 색깔을 칠하는데, 이 연구에서는 아래 <그림 3>과 같이 숫자 번호를 사용하여 구별하기로 한다.



<그림 3> 소마큐브의 구성과 명칭

소마큐브에서 평편한 조각은 1번, 2번, 3번, 4번이고 평편하지 않은 조각은 5번, 6번, 7번이며, 정육면체 모양의 쌓기나무 4개 이하로 만들 수 있는 12개의 서로 다른 입체도형 중에서 직육면체 모양 5개를 제외하고 남은 7개로 구성되어 있음이 특징이다(Whinihan & Trigg, 1980, p. 20).

III. 소마큐브 활동에서 조각의 선택

쌓기나무와 같은 구체물을 사용하는 조작 활동에서

학생들이 가장 많이 사용하는 문제해결 방법은, 제시된 모양을 관찰한 후에 어떤 조각을 어느 위치에 놓느냐를 여러 번의 시행착오를 거쳐서 결정하는 것이다.

이와 같은 조각의 선택과 위치의 결정에 대한 문제해결 방법을 심상길(2003, p. 69)은 합접성(conjoining)과 이접성(disjoining)의 개념을 사용하여 설명하고 있다. 합접성과 이접성에 대해 Dienes(1960, pp. 36-37)는 일단의 경험을 논리적 관계를 써서 관련짓는다. 예를 들어, 벨소리와 수업의 시작처럼 두 사건이 늘 함께 발생하는 경우에는 그들이 합접성(conjoining)에 의해 연결된 것으로 생각한다. 즉, 이전에 연결되어 있지 않던 두 사건을 합접(conjunction)한 것이다. 이와 달리, 한 직위에 대한 추천 명단에 두 사람이 있다면 둘 중의 한 사람만이 그 직위에 임명될 수 있다. 두 개의 분리된 사건을 이접성(disjoining)에 의해 연결된 것으로 생각한다. 즉, 추천 명단이 작성되기 전에는 연결되지 않던 두 사건을 이접(disjunction)한 것이다.

교구를 활용하는 활동에서 합접성이란 어떤 조각을 선택하면 바로 그 옆에 어떤 조각이 와야 하는지 결정되어지는 경우를 뜻하고, 이접성이란 어떤 조각을 선택하면 바로 그 옆에 어떤 조각이 와야 하는지 결정되지 않는 경우를 뜻한다(이강섭, 심상길, 2007, p. 229). 예를 들어, <그림 4>의 모양을 만드는 문제에서 합접성과 이접성을 찾아보면 다음과 같다.



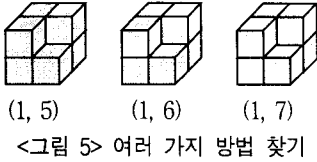
<그림 4> 두 조각으로 입체도형 만들기

<그림 4>의 모양은 쌓기나무 7개로 이루어져 있으므로 1번 조각이 반드시 포함되어야 한다. 왜냐하면, 1번 조각을 제외한 다른 조각들은 쌓기나무 4개로 이루어져 있기 때문에 주어진 입체도형을 만들기 위해 사용한 쌓기나무의 전체 개수가 4의 배수이면 1번 조각을 사용하지 않고, 4의 배수가 아니면 1번 조각을 사용해야 한다. 따라서 사용할 수 있는 조각을 순서대로 나타내면 다음과 같이 모두 6가지 경우가 나온다.

- (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)

그런데 2번, 3번, 4번 조각의 최대 길이가 3이므로 이들은 배제되어야 한다. 따라서 가능한 경우는 (1, 5), (1,

6), (1, 7)의 3가지인데, 각 경우에 <그림 5>와 같이 만들 수 있다.



이와 같이, 가능한 경우를 찾을 때 반드시 필요한 조각을 포함시키는 것을 포함 방법(inclusion method), 절대 필요하지 않은 조각을 배제시키는 것을 배제 방법(exclusion method)이라고 한다.

한편, 앞의 <그림 4>에서 5번 조각을 먼저 선택하게 되면 이 문제를 해결하기 위해서 반드시 1번 조각을 선택해야 한다. 즉, 5번 조각의 선택과 1번 조각의 선택은 합접성에 의해 결정된 것이다. 이와 달리, 1번 조각을 먼저 선택하게 되면 이 문제를 해결하기 위해 5번, 6번, 7번 조각 중 어떤 조각을 선택하여도 된다. 따라서 이 경우의 선택은 이접성에 의해 결정된다.

일반적으로 합접성이 나타나면 해를 찾기 위한 경우의 수가 줄고, 이접성이 나타나면 해를 찾기 위한 경우의 수가 늘어나게 된다. 따라서 조각의 선택과 위치의 결정에서 합접성이 나타나게 되면 해를 쉽게 구할 수 있고 이접성이 나타나면 여러 가지 경우를 조사해야 하므로 시간이 많이 걸리고 문제에 따라서는 해를 구하기 매우 어렵다. 따라서 합접성이 나타나도록 조각을 선택하는 것이 문제해결의 좋은 방법이 된다.

IV. 소마큐브를 사용하는 활동에서 포함-배제 방법의 활용

소마큐브는 일반적으로 7조각을 모두 사용하여 동물, 사람, 사물 등 다양한 입체 모양을 만든다. 그러나 처음부터 7조각을 모두 사용하는 활동은 소마큐브를 처음 접하는 학생들에게 매우 어렵게 느껴진다. 따라서 처음에는 일부 조각을 사용하는 활동을 통해 소마큐브의 구조와 특징을 파악한 후 어느 정도 익숙해지면 전부를 사용하는 방법이 바람직하다.

소마큐브는 1번 조각을 제외하고 2번 조각부터 7번

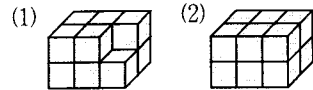
조각까지는 쌓기나무 4개로 구성되어 있으므로 그 부피가 같다. 따라서 주어진 입체도형을 만들 때 각 조각들의 위치를 적절히 바꾸어서 여러 가지 방법으로 만들 수 있다.

또, 두 조각부터 여섯 조각까지 일부 조각을 사용하여 입체도형을 만들 때도 사용하는 조각을 다르게 하여 같은 모양의 입체도형을 만들 수 있다. 일부 조각을 사용하는 문제는 선택하는 조각에 따라 <그림 5>와 같이 여러 가지 답이 나오므로, 모든 답을 찾는 문제로서의 수학적 활동에 활용할 수 있다. 이때, 주어진 문제의 모든 답을 찾는 활동은 단순히 시행착오를 통해 문제를 해결해서는 매우 어렵기 때문에, 다양한 문제해결 전략을 사용할 수 있어야 한다.

이 연구에서는 주어진 문제의 모든 답을 찾기 위하여 분석적인 방법으로, 조각을 분류한 후에 포함-배제 방법을 활용한다. 이는 사용하는 조각을 포함 또는 배제시켜 합접성이 나타나게 하여 문제를 해결하는 변수²⁾를 줄이기 위함이다. 포함 방법을 이용하면 문제에 제시된 조건에 따라 필요한 조각들을 포함시키면서 문제를 해결하게 되고, 배제 방법을 이용하면 조건에 따라 불필요한 조각을 배제시키면서 문제를 해결하게 된다.

이와 같이 분류와 포함-배제 방법을 활용하는 예는 다음과 같다.

(예 1) <그림 6>에 주어진 두 입체도형을 만들 수 있는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰는 문제. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)



<그림 6> 모든 방법 찾기 1

이 문제를 해결하기 위해 먼저 1번 조각의 사용 여부를 생각한다. 그 이유는 1번 조각의 사용 여부를 조사함

2) 조각 교구를 활용하는 활동에서 주어진 문제를 해결하기 위해 조각을 선택하고, 선택된 조각의 위치를 결정하는 데 다양한 경우의 수가 존재한다. 이러한 다양한 경우의 수를 문제해결을 위한 변수라고 한다(심상길, 2003).

으로써 문제해결을 위한 변수를 줄일 수 있기 때문이다.

<그림 6>의 (1)은 쌓기나무가 11개, (2)는 12개로 구성되어 있으므로 (1)은 1번 조각을 사용(포함 방법)해야 하고, (2)는 1번 조각을 사용하지 말아야(배제 방법)한다. 또, 두 입체도형은 모두 소마큐브 세 조각을 사용하는 문제이므로 사용할 수 있는 조각의 이름을 순서조로 나타내면 <표 1>과 같다.

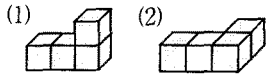
<표 1> 사용할 수 있는 조각의 순서조

(1)	(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 2, 7), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 3, 7), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (1, 5, 7), (1, 6, 7)
(2)	(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 6), (2, 5, 7), (2, 6, 7), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 6), (4, 5, 7), (4, 6, 7), (5, 6, 7)

* 밑줄 친 것은 답을 표시한 것임.

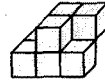
위에서 찾은 순서조의 조각들을 사용하여 가능한 경우를 일일이 찾는 방법도 있지만 포함-배제 방법을 활용하면 더 쉽게 해결할 수 있다.

<그림 6>의 (1)은 반드시 1번 조각을 사용해야 하므로 나머지 두 조각을 선택해야 한다. 먼저 1번과 2번 조각(포함 방법)을 사용하는 경우를 생각하자. 2번 조각을 <그림 7>의 (1)과 같이 놓고 1번과 3번, 1번과 5번 조각을 결합시켜 답을 구할 수 있고, <그림 7>의 (2)와 같이 놓고 1번과 4번, 1번과 6번, 1번과 7번을 결합시켜 답을 구할 수 있다.



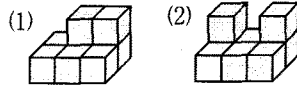
<그림 7> 2번 조각 사용

같은 방법으로 1번과 3번, 1번과 4번 조각을 사용하는 경우도 답을 찾을 수 있다. 그러나 3번과 4번을 같이 사용하는 경우 주어진 모양을 만들기 위해서는 <그림 8>과 같이 놓을 수밖에 없다. 따라서 3번과 4번을 같이 사용하는 경우는 주어진 입체도형을 만들 수 없다(배제 방법).



<그림 8> 3번과 4번을 사용하는 방법

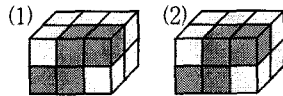
마지막으로 1번 조각과 평편하지 않은 조각인 5번, 6번, 7번 조각 중 두 조각을 선택하는 경우(포함 방법)는 5번과 6번(<그림 9>의 (1)의 경우), 5번과 7번 또는 6번과 7번(<그림 9>의 (2)의 경우)을 사용하는 경우이다. 이 경우도 1번 조각을 결합시키면 모두 답이 된다.



<그림 9> 5번, 6번, 7번을 사용하는 경우

따라서 <표 1>의 (1)에서 (1, 3, 4)를 제외한 나머지 14가지의 경우는 모두 답이 된다.

<그림 6>의 (2)의 경우 1번 조각을 사용하지 않고 세 조각을 선택해야 한다. 그러나 4번 조각을 선택할 경우 항상 <그림 10>의 (1)과 같이 놓이므로 다른 두 조각을 선택하여 주어진 입체도형을 만들 수 없다. 예를 들어, 4번 조각과 2번 조각을 선택하는 경우 다시 2번 조각이 필요하고, 마찬가지로 4번 조각과 5, 6, 7번 조각을 선택하는 경우 각각 똑같은 5, 6, 7번 조각이 필요하므로 주어진 입체도형을 만들 수 없다. 또, 4번 조각과 3번 조각을 선택하는 경우 <그림 10>의 (2)와 같이 놓이므로 답이 되지 않는다. 따라서 <표 1>의 (2)에서 4번 조각이 포함된 순서조는 답이 될 수 없다(배제 방법).



<그림 10> 4번 조각을 사용하는 경우

평편한 조각인 2번, 3번을 같이 사용하는 경우 <그림 11>과 같이 조각들이 놓이므로 주어진 입체도형을 만들 수 없다(배제 방법).

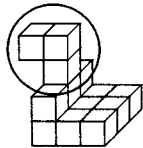


<그림 11> 2번, 3번 조각을 사용하는 경우

또, 평편하지 않은 조각을 세 개 사용하는 경우도 세 조각을 조합하여 주어진 입체도형을 만들 수 없다(배제 방법). 따라서 답이 될 수 있는 경우는 평편한 조각 한 개와 평편하지 않은 조각 두 개를 사용하는 (2, 5, 6), (2, 5, 7), (2, 6, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7)이다. 이는 앞에서 제시한 <그림 9>와 같이 평편하지 않은 조각을 두 개 사용하는 경우이다. 여기서 5번과 6번을 사용하는 경우에는 2번 조각이 필요하고, 5번과 7번 또는 6번과 7번을 사용하는 경우 3번 조각이 필요하다(포함 방법). 따라서 (2, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7)이 답이 된다.

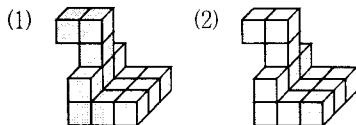
일반적으로 직육면체에 가까운 입체도형을 만들 때, 1번 조각을 사용하는 경우는 답이 많이 나오기 때문에, 사용 가능한 조각을 찾아 포함시키면서 답을 찾은 후 답이 되지 않는 것을 배제시키는 방법이 유리하다. 그러나 1번 조각을 사용하지 않는 경우는 상대적으로 답이 적게 나오므로 사용 가능하지 않은 조각을 먼저 배제시키면서 답을 찾는 것이 유리하다.

(예 2) <그림 12>에 주어진 입체도형을 만드는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰는 문제. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)



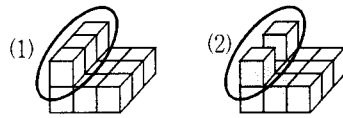
<그림 12> 모든 방법 찾기 2

<그림 12>는 쌓기나무가 15개로 구성되어 있으므로 1번 조각을 사용(포함 방법)해야 하고, 소마큐브 네 조각을 사용하는 문제이다. 또, 주어진 입체도형의 특징 상 <그림 12>에서 동그라미 친 부분에 놓일 수 있는 조각은 <그림 13>의 (1), (2)와 같이 1번과 2번 조각이다(포함 방법).



<그림 13> 1번과 2번 조각의 위치

<그림 13>의 (1)과 같이 놓는 방법은 1번 조각을 제외하고(배제 방법) 나머지 3조각을 사용하여 <그림 14>의 (1) 모양을 만들면 되고, <그림 13>의 (2)와 같이 놓는 방법은 2번 조각을 제외하고(배제 방법) 나머지 3조각을 사용하여 <그림 14>의 (2) 모양을 만들면 된다. 따라서 주어진 입체도형을 관찰하여 특정한 위치에 놓일 수 있는 조각들을 찾아 그 조각의 위치를 정하고 문제를 해결하면 4조각을 사용하는 문제가 3조각을 사용하는 문제로 단순화시킬 수 있다.



<그림 14> 1번과 2번 조각을 제외한 모양

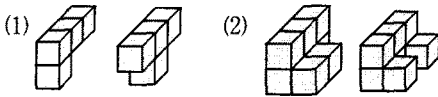
<그림 14>의 (1)을 만들기 위해서는 1번을 제외한 6조각 중 세 조각을 선택해야 한다. 세 조각을 선택하는 방법은 <표 2>와 같이 평편한 조각(또는 평편하지 않은 조각) 3개, 2개, 1개, 0개를 사용하는 경우로 분류된다.

<표 2> 세 조각을 선택하는 순서조

평편한 조각 3개 사용 (평편하지 않은 조각 0개 사용)	(2, 3, 4)
평편한 조각 2개 사용 (평편하지 않은 조각 1개 사용)	(2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 4, 7)
평편한 조각 1개 사용 (평편하지 않은 조각 2개 사용)	(2, 5, 6), (2, 5, 7), (2, 6, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 6), (4, 5, 7), (4, 6, 7)
평편한 조각 0개 사용 (평편하지 않은 조각 3개 사용)	(5, 6, 7)

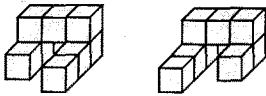
* 밑줄 친 것은 답을 표시한 것임.

평편한 조각을 3개 사용하는 경우 <그림 14>의 (1)에 동그라미 친 부분에 2번이나 3번 조각을 <그림 15>의 (1)과 같이 놓고 문제를 풀어야 하는데, 이 경우는 답이 되지 않는다. 평편한 조각을 0개 사용하는 경우 <그림 14>의 (1)에 동그라미 친 부분에 5번과 6번이나 5번과 7번(또는 6번과 7번)을 <그림 15>의 (2)와 같이 놓고 풀어야 하는데, 이 경우 역시 답이 되지 않는다(배제 방법).



<그림 15> 조각의 위치

평편한 조각을 2개 사용하는 경우 <그림 14>의 (1)에 동그라미 친 부분에 2번이나 3번 조각을 <그림 15>의 (1)과 같이 놓고 문제를 풀거나 2번과 5번 또는 2번과 6번을 <그림 16>과 같이 놓고 풀어야 하는데, 이 경우 모두 답이 되지 않는다(배제 방법).



<그림 16> 2번과 5번, 2번과 6번 조각의 위치

따라서 답이 되는 경우는 평편한 조각 1개와 평편하지 않은 조각 2개를 사용하는 방법이다. 평편하지 않은 조각을 2개 사용하는 방법은 앞에서 제시한 <그림 15>의 (2)에 2번과 3번 조각을 추가하여(포함 방법) 주어진 입체도형을 만들 수 있다. 따라서 (2, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7)을 사용하여 <그림 14>의 (1)을 만든 후 1번 조각을 놓으면 <그림 12>에 주어진 입체도형을 만들 수 있다.

이제, <그림 14>의 (2)를 만들기 위해서는 2번을 제외한 여섯 조각 중 1번을 포함하여 세 조각을 선택해야 한다. 세 조각을 선택하는 방법은 <표 3>과 같다.

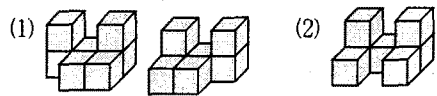
평편한 조각을 2개 사용하는 경우 <그림 14>의 (2)에 동그라미 친 부분에 3번 또는 4번 조각을 놓아야 하는데, 놓을 수 없으므로 답이 되지 않는다. 평편한 조각을 1개 사용하는 경우 <그림 14>의 (2)에 동그라미 친 부분에 3번 또는 4번 조각을 놓을 수 없으므로 평편하지 않은 조각 1개와 1번 조각이 놓여야 한다.

<표 3> 1번을 포함한 세 조각을 선택하는 순서조

평편한 조각 2개 사용 (평편하지 않은 조각 0개 사용)	(1, 3, 4)
평편한 조각 1개 사용 (평편하지 않은 조각 1개 사용)	(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 3, 7), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 4, 7)
평편한 조각 0개 사용 (평편하지 않은 조각 2개 사용)	(1, 5, 6), (1, 5, 7), (1, 6, 7)

* 밑줄 친 것은 답을 표시한 것임.

1번과 5번, 1번과 6번은 <그림 17>의 (1)과 같이 놓이므로 2번 조각이 필요하다. 그러나 2번 조각을 사용할 수 없으므로 답이 되지 않는다(배제 방법). 1번과 7번을 사용하는 경우 <그림 17>의 (2)와 같이 놓이므로 3번 조각을 사용하여(포함 방법) <그림 14>의 (2)를 만들 수 있다. 따라서 (1, 3, 7)을 사용하여 <그림 14>의 (2)를 만든 후 2번 조각을 놓으면 <그림 12>에 주어진 입체도형을 만들 수 있다. 즉, (1, 2, 3, 7)은 답이 된다.



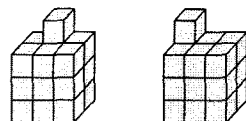
<그림 17> 1번과 5번, 6번, 7번 조각의 위치

평편한 조각을 0개 사용하는 경우 <그림 14>의 (2)에 동그라미 친 부분을 평편하지 않은 조각으로 만들어야 하는데, 5번과 6번을 사용해서는 만들 수 없으므로 답이 되지 않고, 5번과 7번, 6번과 7번으로는 <그림 9>의 (2)와 같이 만들 수는 있으나 나머지 1번 조각을 추가하여 <그림 14>의 (2)를 만들 수 없으므로 답이 되지 않는다.

따라서 <그림 12>는 (1, 2, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 6, 7), (1, 2, 3, 7)을 사용하여 만드는 네 가지 방법이 있다.

포함-배제 방법을 적용하다 보면, 주어진 입체도형을 만들기 위한 모든 경우가 답이 되는 입체도형을 찾을 수 있다. 이 연구에서는 이와 같이 가능한 모든 경우에 답이 되는 입체도형을 완전한 입체도형(perfect solid)이라고 하겠다. 다음 예는 3x3x2 직육면체에 쌓기나무 1개를 더 붙여서 만든 모든 입체도형이 완전한 입체도형임을 확인하는 예이다.

(예 3) <그림 18>에 주어진 입체도형을 만드는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰는 문제. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)



<그림 18> 다섯 조각으로 만든 완전한 입체도형 (1)

<그림 18>의 입체도형은 모두 쌓기나무 19개로 구성되어 있으므로 1번 조각을 포함하여 다섯 조각을 사용하는 문제이다. 앞에서 언급한 바와 같이 1번 조각을 사용하는 문제이므로 사용 가능한 조각을 포함시키면서 문제를 해결할 수 있다(포함 방법). 1번 조각을 포함하여 다섯 조각을 선택하는 방법은 <표 4>와 같이 평편한 조각을 3개, 2개, 1개 선택하는 경우로 분류할 수 있다.

<표 4> 1번을 포함한 다섯 조각 선택 방법

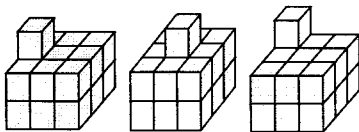
1번과 평편한 조각 1개 사용	(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 6), (1, 2, 3, 4, 7)
1번과 평편한 조각 2개 사용	(1, 2, 3, 5, 6), (1, 2, 3, 5, 7), (1, 2, 3, 6, 7), (1, 2, 4, 5, 6), (1, 2, 4, 5, 7), (1, 2, 4, 6, 7), (1, 3, 4, 5, 6), (1, 3, 4, 5, 7), (1, 3, 4, 6, 7)
1번과 평편한 조각 3개 사용	(1, 2, 5, 6, 7), (1, 3, 5, 6, 7), (1, 4, 5, 6, 7)

* 밑줄 친 것은 답을 표시한 것임.

이 경우 <표 4>의 모든 순서조를 사용하여 주어진 입체도형을 만들 수 있어서, 모든 경우가 답이 된다(<부록> 참조).

<그림 18>의 특징을 살펴보면 1번 조각을 사용하고, 3×3×2 직육면체에 쌓기나무 한 개를 더 붙인 모양이다. 이 문제에서는 포함 방법과 배제 방법을 모두 사용하고, <표 4>와 같이 분류하여 문제를 해결할 수 있다.

또, <그림 19>의 세 가지 입체도형도 완전한 입체도형이다. 이것들도 <그림 18>의 경우처럼 3×3×2 직육면체에 쌓기나무 한 개를 더 붙인 모양이다. 따라서 3×3×2 직육면체의 곁면에 쌓기나무가 한 개 붙은 입체도형은 모두 완전한 입체도형이 됨을 알 수 있다.



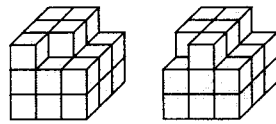
<그림 19> 다섯 조각으로 만든 완전한 입체도형 (2)

완전한 입체도형은 여섯 조각을 사용하는 문제에서도 찾을 수 있다. 먼저 사용하는 조각의 순서조가 여러 가

지로 나오려면 1번 조각이 반드시 포함되어야 한다. 이 때, 1번 조각을 포함한 여섯 조각을 선택하는 방법은 아래와 같이 2, 3, 4, 5, 6, 7번 조각을 하나씩 배제하면서 여섯 조각을 선택하는 방법과 같다.

(1, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 3, 5, 6, 7)
(1, 2, 3, 4, 6, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)

아래 <그림 20>은 여섯 조각으로 만들 수 있는 완전한 입체도형이다.



<그림 20> 여섯 조각으로 만든 완전한 입체도형

완전한 입체도형의 특징을 살펴보면, 1번 조각을 사용하고, 직육면체에 가까운 입체도형이다.

앞에서 제시한 예를 학생들에게 그대로 제시하여 모든 답을 찾게 하는 방법은 일부 우수한 학생들을 제외하고는 매우 어려운 문제이다. 그러나 같은 활동에 대해서도 학생들의 수준에 따라 발문을 달리하거나 답을 구하는 범위를 조절하는 방법으로 학습 효과를 극대화할 수 있다.

이와 같은 관점에서 앞에서 소개한 예들에 대한 구체적 발문 방법을 제시하면 다음과 같다.

1. (예 1)에서 가능한 발문은 다음과 같다.

(예 1) <그림 6>에 주어진 두 입체도형을 만들 수 있는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰시오. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)

(1) 모든 답을 찾고, 문제해결의 전략 또는 방법을 설명하시오.

(2) 찾은 답이 모든 해인지를 알 수 있는 방법을 설명하시오.

(3) <그림 6>의 (1)에서 반드시 사용해야 할 조각을 찾으시오.

(4) <그림 6>의 (1)에서 함께 사용할 수 없는 조각은 무엇인지 찾아보시오.

(5) <그림 6>의 (2)에서 사용할 수 없는 조각은 무엇인지 찾아보시오.

(6) <그림 6>의 (2)에서 5번 조각을 반드시 사용하여 답을 찾아보시오.

(7) <그림 6>의 (2)에서 6번 조각을 반드시 사용하여 답을 찾아보시오.

먼저, 영재와 같이 우수한 학생들에게 문제를 제시하는 경우에는 (1)과 (2)의 질문을 통해 학생들이 스스로 해결 방법을 찾고, 모든 답을 다 찾았는지에 대하여 분석적인 방법으로 확인하도록 한다. 그러나 일반 학생들에게는 이러한 전략을 연상할 수 있는 (3)~(7)의 발문을 통해 해를 찾도록 하는 것이 적절하다.

이러한 발문을 통해 포함-배제 방법과 유사한 전략을 찾을 수 있고, 반드시 사용하는 조각과 사용하지 않는 조각을 분류함으로써 문제해결 변수를 줄여 여러 가지 답을 찾을 수 있다.

2. (예 2)에서 가능한 발문은 다음과 같다.

(예 2) <그림 12>에 주어진 입체도형을 만드는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰시오. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)

(1) 모든 답을 찾고, 문제해결의 전략 또는 방법을 설명하시오.

(2) 찾은 답이 모든 해인지를 알 수 있는 방법을 설명하시오.

(3) 주어진 모양을 만들기 위해 반드시 사용해야 할 조각을 찾으시오.

(4) 주어진 모양을 만들기 위해 사용할 수 없는 조각을 찾으시오.

(5) 주어진 모양을 평편한 조각만으로 만들 수 있는지 알아보시오.

(6) <그림 12>의 동그라미 친 부분에 들어갈 수 있는 조각을 찾으시오.

(7) 주어진 모양을 만들 때, 5번 조각을 반드시 사용하여 답을 찾아보시오.

(8) 주어진 모양을 만들 때, 7번 조각을 반드시 사용하여 답을 찾아보시오.

(예 1)에서 제시한 방법과 같이 우수한 학생들에게는

(1)과 (2) 정도의 질문을 제시하고, 그렇지 못한 학생들에게는 학생들의 능력에 따라 질문의 수를 선택하여 사용하는 것도 한 가지 방법이다.

3. (예 3)에서 완전한 입체도형을 만드는 활동을 하기 전에 “일부 조각을 사용하는 활동에서 모든 경우가 답이 되는 입체도형을 만들 수 있을까?”라는 질문을 던진 후 (예 1)과 (예 2)에서는 일부만 답이 되지만 (예 3)에서 완전한 입체도형을 경험하게 하여 소마큐브 활동에 대한 탐구적 흥미를 높일 수 있다. 또, 다음과 같이 추가적으로 질문을 만들어 활용할 수 있다.

(예 3) <그림 18>에 주어진 입체도형을 만드는 모든 방법을 찾아 사용한 조각의 이름을 쓰시오. (단, 사용한 조각의 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.)

(1) 모든 답을 찾고, 문제해결의 전략 또는 방법을 설명하시오.

(2) 찾은 답이 모든 해인지를 알 수 있는 방법을 설명하시오.

(3) 주어진 모양을 만들기 위해 반드시 사용해야 할 조각을 찾으시오.

(4) 주어진 모양을 만들기 위해 가능한 모든 순서조를 구하시오.

(예 3)에 대한 추가적인 발문의 예는 다음과 같다.

(5) 완전한 입체도형의 특징을 설명하시오.

(6) 5조각으로 만들 수 있는 완전한 입체도형을 만들어 보시오.

(7) 6조각으로 만들 수 있는 완전한 입체도형을 만들어 보시오.

여기서 5조각을 사용하는 문제는 가능한 조합이 많아 어려울 수 있으므로 학생의 능력에 따라 답의 수가 적은 6조각을 사용하는 문제를 먼저 제시할 수 있다. 이와 같이 완전한 입체도형을 찾는 활동은 단순히 입체도형을 만드는 활동에서 벗어나 스스로 조건에 맞는 입체도형을 찾는 활동을 통해 더 높은 수준의 문제해결 능력을 기를 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구는 소마큐브의 조합론적 기하학적 특성을 알아보고, 소마큐브를 사용하는 수학적 활동에서 포함-배제의 방법을 활용하여 해를 찾는 방법을 체계적으로 분석하여, 소마큐브를 학교수학에서 효과적으로 활용할 수 있도록 하기 위한 기초 자료와 방향을 제시하는 것을 목적으로 한다.

소마큐브의 일곱 조각 중 두 조각부터 여섯 조각까지 일부 조각을 사용하여 입체도형을 만들 때, 사용하는 조각을 다르게 하여 같은 모양의 입체도형을 여러 가지 방법으로 만들 수 있다. 따라서 일부 조각을 사용하는 활동에서 모든 해를 찾는 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 주어진 문제의 모든 답을 찾기 위해서 단순 시행착오가 아닌 분석적인 방법으로, 사용되는 조각을 분류하여 포함-배제 방법을 활용할 수 있다. 이는 사용하는 조각을 포함 또는 배제시켜 합성성이 나타나게 하여 문제를 해결하는 변수를 줄이기 위함이다.

둘째, 일반적으로 직육면체에 가까운 입체도형을 만들 때, 소마큐브의 1번 조각을 사용하는 경우는 답이 많이 나오므로 사용 가능한 조각을 찾아 포함시키며 답을 찾은 후 답이 되지 않는 것을 배제시키는 방법이 유리하다. 반면에 1번 조각을 사용하지 않는 문제는 1번 조각을 사용하는 문제보다 답이 적게 나오므로 사용 가능하지 않는 조각을 배제시키며 답을 찾는 것이 유리하다.

셋째, 주어진 입체도형을 관찰하여 특정한 위치에 놓일 수 있는 조각들을 찾아 그 조각의 위치를 정하고 문제를 해결하면 한 조각의 위치가 결정되므로 그만큼 문제를 해결하는 변수가 줄어들어 손쉽게 문제를 해결할 수 있게 된다.

넷째, 소마큐브와 같은 폴리큐브는 평편한 조각과 평편하지 않은 조각으로 분류되므로 사용하는 조각의 순서 조를 구할 때, 효과적인 조각 과정을 위해 평편한 조각과 평편하지 않은 조각을 구분하여 분류하는 것이 효율적이다.

다섯째, 완전한 입체도형의 특징은 1번 조각을 사용하고, 직육면체에 가까운 입체도형인 점이다.

이 연구의 결과로부터 다음과 같은 점이 고려되어야 함을 제안한다.

첫째, 학생들에게 모든 답을 찾게 하는 활동은 일부 우수한 학생들을 제외하고는 매우 어려운 문제이다. 그러나 같은 활동에 대해서도 학생들의 수준에 따라 발문을 달리하거나 답을 구하는 범위를 조절하는 방법으로 학습 효과를 극대화할 수 있다. 따라서 해를 찾는 과정에서 포함-배제 방법의 원리를 적용하는 아이디어를 학생 스스로 찾아낼 수 있는 발문 방법을 사용하기를 제안한다. 이러한 방법을 사용하여 문제해결 변수를 줄여 여러 가지 답을 찾을 수 있다.

둘째, 우수한 학생들에게는 “모든 답을 찾고 문제를 해결하는 전략 또는 방법을 설명하시오”와 같은 비교적 일반적인 질문을 통해 문제를 해결하도록 하고, 그렇지 못한 학생들에게는 포함-배제 방법을 직접 활용할 수 있는 질문을 통해 문제를 해결하도록 하는 방법을 제안한다.

셋째, 주어진 입체도형을 단순히 만드는 활동에서 벗어나 완전한 입체도형을 찾는 활동처럼 스스로 조건에 맞는 입체도형을 찾는 활동을 통해 더 높은 수준의 문제를 해결할 수 있도록 하여 더 높은 수준의 문제해결 능력을 키울 수 있다. 따라서 이러한 유형의 문제의 개발에 대한 연구가 필요하다.

넷째, 이 연구에서 제안한 포함-배제 방법과 이에 대한 활용 외에 더 효과적인 방법이 있는지에 대한 연구와, 학생들에게 직접 적용했을 때 나타나는 학습 효과의 신장과 심리적 반응 현상에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- 교육부 (2000). 초등학교 수학 2-나, 서울: 대한 교과서 주식회사.
- 교육부 (2002). 초등학교 수학 6-가, 서울: 대한 교과서 주식회사.
- 박영희 (1999). 수학 영재 캠프 활동 사례: 소마큐브, 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지>, 4, pp.89-95

- 송근운 (2007). 소마큐브의 해 탐구, 한국수학교육학회 제12회 국제수학영재교육세미나 프로시딩, pp.37-59.
- 심상길 (2003). 초등학교 기하에서 교수매체를 활용한 조작활동 과정에 대한 연구, 단국대학교 대학원 박사학위 논문.
- 이강섭·심상길 (2005). 창의성 증진을 위한 수학 활동 프로그램과 평가 방법의 소개, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 19(1), pp.101-110.
- 이강섭·심상길 (2007). 교구를 활용한 활동에서 창의성 평가를 위한 학생들의 반응 유형 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 46(2), pp.227-237.
- 전평국·신동윤·방승진·황현모·정석규 (2002). 중학교 수학 7-나, 서울: (주) 교학사.
- 한국교육개발원 (1999). 수학과 영재교육과정 시안; 초·중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구, 한국교육개발원 수탁연구 CR 99-20-3.
- 한국교육개발원 (2004). 소마큐브의 해 탐구, 한국교육개발원 수탁연구 RM 2004-45-16.
- Averbach, B., & Chein, O. (1980). *Problem Solving Through Recreational Mathematics*, Mineola, NY: Dover Publications, Inc.
- Beenet, A. B., jr. & Nelson, S. T. (2004). *Mathematics For Elementary Teachers : An Activity Approach (6th Ed.)*, New York: The Mcgraw-Hill Companies.
- Cooper, M., & Sweller, J. (1989). Secondary School Students' Representations of Solids, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), pp.202-212, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*, New York: Hutchinson Educational.
- Golomb, S. W. (1994). *Polyominoes (2nd ed.)*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Guy, R. K., & Paulhus, M. M. (2002). Nine Cubits or Simple Soma, *The College Mathematics Journal*, 33(3), pp.188-195. Washington D. C.: Mathematical Association of America.
- Kremer, R. (1989). *Exploring with Squares and Cubes*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- Mack, C. W., & Feldt, C. C. (1993). *Spatial Reasoning with Soma Cube Activities*, Dedham, MA: Janson Publications, Inc.
- Vaderlind, P., Guy, R., & Larson, L. (2002). *The Inquisitive Problem Solver*, Washington D. C.: Mathematical Association of America.
- Whinihan, M. J., & Trigg, C. W. (1980). Parity and Centerness Applied to the SOMA Cube, In Schwartz, B. L. (Eds.). *Mathematical Solitaires and Games*, pp.20-25, New York: Baywood Publishing Company, Inc.
- Zhang, W. (1996). *Exploring math through puzzles: Blackline masters for making over 50 puzzles*, Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

A Study on The Application of Inclusion-Exclusion Method in Soma Cube Activity

Shim, Sang Kil

Accreditation Center for Educational Development, Dankook University, Chungcheongnam-do cheonan-si 330-714, Korea

E-mail : skshim22@dankook.ac.kr

Hwang, Sunwook³⁾

Department of Mathematics, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea

E-mail : shwang@ssu.ac.kr

The purpose of this article is to study characteristics of Soma Cube in combinatorial-geometric point of view, and to present basic substances and direction for efficient Soma cube activities in school mathematics upon systematical analysis of methods of finding solutions using Inclusion-Exclusion Method.

We can apply Inclusion-Exclusion Method to find all possible solutions in Soma Cube activities not as trial-and-error method but as analytical method. Because Inclusion-Exclusion Method can reduce the number of problem-solving variables by making high conjunction in the choice of pieces. Soma cube pieces can be sorted as 'flat' ones and 'non-flat' ones, which would be another effective method in the manipulation of Soma Cube pieces.

* ZDM Classification : U63

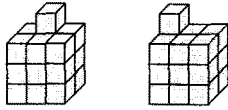
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60

* Key Words : soma cube, inclusion-exclusion method, conjunction, disjunction

3) Corresponding author(shwang@ssu.ac.kr)

<부록> 완전한 입체도형의 답

주어진 입체도형의 답을 표시하기 위해 각 층에 놓이는 소마큐브 조각의 이름을 표시한다.



(1, 2, 3, 4, 5)를 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5					<table border="1"><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3					
	5													
3														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	5	5	1	3	5	<table border="1"><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	5	1	3	1	1
1	5	5												
1	3	5												
3	5	1												
3	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	4	4	3	3	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	3	5	5	4	4	5
1	4	4												
3	3	3												
3	5	5												
4	4	5												
1층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	4	4	2	2	2	2	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	2	2	2	2	4	4
4	4	2												
2	2	2												
2	2	2												
2	4	4												

(1, 2, 3, 4, 6)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6					<table border="1"><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3					
	6													
3														
3층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	6	6	1	6	3	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr></table>	3	1	1	3	1	6
6	6	1												
6	3	1												
3	1	1												
3	1	6												
2층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	4	1	3	3	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	3	6	6	4	4	6
4	4	1												
3	3	3												
3	6	6												
4	4	6												
1층	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	4	4	2	2	2	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	2	2	2	2	4	4
2	4	4												
2	2	2												
2	2	2												
2	4	4												

(1, 2, 3, 4, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3					<table border="1"><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	7					
	3													
7														
3층	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>7</td></tr></table>	3	3	3	1	1	7	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	7	7	1	7	3	1
3	3	3												
1	1	7												
7	7	1												
7	3	1												
2층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>	4	4	7	1	7	7	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	4	1	3	3	3
4	4	7												
1	7	7												
4	4	1												
3	3	3												
1층	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	4	4	2	2	2	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	4	4	2	2	2
2	4	4												
2	2	2												
2	4	4												
2	2	2												

(1, 2, 3, 5, 6)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3					<table border="1"><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3					
	3													
3														
3층	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	3	3	2	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	3	1	2	1	1
3	3	3												
2	2	2												
3	3	1												
2	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	6	5	1	1	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	6	5	2	2	2
1	6	5												
1	1	2												
3	6	5												
2	2	2												
1층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	6	6	5	6	5	5	<table border="1"><tr><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	6	6	5	6	5	5
6	6	5												
6	5	5												
6	6	5												
6	5	5												

(1, 2, 3, 5, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1					<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1					
	1													
1														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	2	2	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	2	2	2
1	1	2												
2	2	2												
1	1	2												
2	2	2												
2층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	7	3	5	3	3	3	<table border="1"><tr><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	7	3	5	3	3	3
7	3	5												
3	3	3												
7	3	5												
3	3	3												
1층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	7	7	5	7	5	5	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	7	7	5	7	5	5
7	7	5												
7	5	5												
7	7	5												
7	5	5												

(1, 2, 3, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1					<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1					
	1													
1														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	2	2	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	2	2	2
1	1	2												
2	2	2												
1	1	2												
2	2	2												
2층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	6	3	7	3	3	3	<table border="1"><tr><td>6</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	6	3	7	3	3	3
6	3	7												
3	3	3												
6	3	7												
3	3	3												
1층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	6	7	7	6	6	7	<table border="1"><tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	6	7	7	6	6	7
6	7	7												
6	6	7												
6	7	7												
6	6	7												

(1, 2, 4, 5, 6)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		4					<table border="1"><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	4					
	4													
4														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	4	4	1	1	2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	4	1	2	4	1	1
1	4	4												
1	1	2												
4	1	2												
4	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	6	5	4	2	2	2	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	2	2	2	4	5	6
6	5	4												
2	2	2												
2	2	2												
4	5	6												
1층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	6	5	5	6	6	5	<table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	5	6	6	5	5	6
6	5	5												
6	6	5												
5	6	6												
5	5	6												

(1, 2, 4, 5, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5					<table border="1"><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	4					
	5													
4														
3층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	7	5	1	5	5	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	4	4	1	2	1	1
7	5	1												
5	5	1												
4	4	1												
2	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	7	7	1	7	4	4	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	7	4	5	2	2	2
7	7	1												
7	4	4												
7	4	5												
2	2	2												
1층	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	2	2	2	4	4	2	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	7	7	5	7	5	5
2	2	2												
4	4	2												
7	7	5												
7	5	5												

(1, 3, 4, 5, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		7					<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1					
	7													
1														
3층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>1</td></tr></table>	7	7	1	3	7	1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	1	1	5	3	5	5
7	7	1												
3	7	1												
1	1	5												
3	5	5												
2층	<table border="1"><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	3	5	5	3	5	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr></table>	3	7	7	3	5	7
3	5	5												
3	5	1												
3	7	7												
3	5	7												
1층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	4	4	5	3	4	4	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	4	4	7	3	4	4
4	4	5												
3	4	4												
4	4	7												
3	4	4												

(1, 2, 4, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6					<table border="1"><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	4					
	6													
4														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	1	6	7	1	6	6	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	4	4	1	2	1	1
1	6	7												
1	6	6												
4	4	1												
2	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>7</td></tr></table>	1	7	7	4	4	7	<table border="1"><tr><td>6</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	6	4	7	2	2	2
1	7	7												
4	4	7												
6	4	7												
2	2	2												
1층	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	2	2	2	2	4	4	<table border="1"><tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	6	7	7	6	6	7
2	2	2												
2	4	4												
6	7	7												
6	6	7												

(1, 3, 4, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1					<table border="1"><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	6					
	1													
6														
3층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	6	1	1	6	6	3	<table border="1"><tr><td>6</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	6	1	1	6	6	3
6	1	1												
6	6	3												
6	1	1												
6	6	3												
2층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	7	7	3	7	6	3	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	4	1	7	3	3
7	7	3												
7	6	3												
4	4	1												
7	3	3												
1층	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>	7	4	4	4	4	3	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	7	4	4	7	7	3
7	4	4												
4	4	3												
7	4	4												
7	7	3												

(1, 2, 5, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		7					<table border="1"><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	7					
	7													
7														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>2</td></tr></table>	1	7	7	1	7	2	<table border="1"><tr><td>7</td><td>7</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	7	7	1	7	1	1
1	7	7												
1	7	2												
7	7	1												
7	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>	1	5	5	6	6	2	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>	2	2	2	5	6	2
1	5	5												
6	6	2												
2	2	2												
5	6	2												
1층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	6	5	2	6	5	2	<table border="1"><tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	5	5	6	5	6	6
6	5	2												
6	5	2												
5	5	6												
5	6	6												

(1, 3, 5, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6					<table border="1"><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3					
	6													
3														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	1	6	3	1	6	6	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>	3	1	1	3	6	1
1	6	3												
1	6	6												
3	1	1												
3	6	1												
2층	<table border="1"><tr><td>5</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	5	5	3	1	7	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	3	5	6	7	6	6
5	5	3												
1	7	3												
3	5	6												
7	6	6												
1층	<table border="1"><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>	5	7	3	5	7	7	<table border="1"><tr><td>7</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>5</td></tr></table>	7	5	5	7	7	5
5	7	3												
5	7	7												
7	5	5												
7	7	5												

(1, 3, 4, 5, 6)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6					<table border="1"><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3					
	6													
3														
3층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	1	6	3	1	6	6	<table border="1"><tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	4	1	3	1	1
1	6	3												
1	6	6												
3	4	1												
3	1	1												
2층	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>	1	5	3	5	5	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	3	4	4	6	6	5
1	5	3												
5	5	3												
3	4	4												
6	6	5												
1층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	4	4	3	5	4	4	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	6	5	4	6	5	5
4	4	3												
5	4	4												
6	5	4												
6	5	5												

(1, 4, 5, 6, 7)을 사용하는 경우

4층	<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5					<table border="1"><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	4					
	5													
4														
3층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	4	5	1	5	5	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr></table>	4	1	1	4	1	5
4	5	1												
5	5	1												
4	1	1												
4	1	5												
2층	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	4	4	1	6	6	7	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	6	5	7	4	5	5
4	4	1												
6	6	7												
6	5	7												
4	5	5												
1층	<table border="1"><tr><td>6</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>	6	4	7	6	7	7	<table border="1"><tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	6	7	7	6	6	7
6	4	7												
6	7	7												
6	7	7												
6	6	7												