대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 1, 143-161. Feb 2009

중등 기하문제 해결에서 시각화 과정[1)]

류 현 아[*] · 장 경 윤[**]

본 연구는 기하문제해결에서 시각화 과정을 분석하여 기하추론교육에 시사점을 얻기 위하여 이루어졌다. 이를 위하여 선행연구를 근거로 시각화 과정을 구분하였으며 Duval의 이론을 기초로 시각화 과정 분석틀을 개발하였다. 서울과 경기지역의 중학교 3학년생 2명과 고등학교 1학년생 6명이 이 연구에 참여하였다. 각 학생들에게 평행선, 평행사변형, 닮음비, 닮음도형, 중선, 무게중심, 수직이등분선, 각의이등분선 등 평면도형 과제를 제공하고 각 학생의 문제해결 과정을 질적인 방법으로 분석하였다. 분석 결과 평면도형 문제해결에서 시각화는 도형의 이해를 도와 문제해결에 중요한 통찰을 제공하는 것으로 나타났다. 시각화 과정에서 도형에 대한 담론적 이해와 조작적 이해는 구성 요소들 간의 성질과 성질들 간의 관계를 알게 하고, 도형의 구조를 파악할 수 있게 하는 발견적 역할을 하였다.

Ⅰ. 서 론

수학의 이해와 문제해결 연구에서 이미지에 기반을 둔 추론의 중요성이 크게 주목을 받아 왔다(Krutetskii 1976; Battista, Wheatley & Talsma, 1989; Tweney 1989; Goldin 1992; Sfard, 1994). 도형이 없는 기하는 생각하기 어려울 만큼 기하학습에서 시각적 이미지가 큰 비중을 차지하고 있다. 시각적 이미지는 기하적 추론을 용이하게 도울 수 있다. 그 이유는 개념과 명제들 사이의 형식적인 관계에 대한 이해를 발달시키기 위해 이미지 스키마의 내적인 구조가 구성적으로 확장될 수 있기 때문이다. 그러므로 기하 추론과 문제해결 활동 등에서 시각화를 사용할 수 있다.

기하문제에서 개념과 명제 사이의 수학적 관계에 대한 이해는 문제의 구조를 파악하는 것과 관련된다. 구조 파악은 문제를 단순화시킬 수 있게 한다. Wertheimer(1959)는 기본이 되는 구조, 즉 수학적 구조에 대한 이해는 생산적 사고와 세련된 문제해결을 이끌 수 있다고 주장하였다. 이는 문제 구조에 대한 통찰을 통하여 문제의 요소들과 알고 있는 해결 절차들의 관련성을 이해할 수 있기 때문이다. 문제해결에 대한 형태심리학의 관점은 통찰이 문제를 전체로 이해함으로써 그리고 전체와 부분들 간의 관계로부터 이루어지며, 재구성 과정에서 나타난다는 것이다(구광조 외, 1995). 기하문제의 구조를 파악하고 전체와 부분들 간의 관계를 이해하는 데 시각화는 보다 효율적인 추론 활동으로 생각할 수 있다.

* 건국대학교 강사, ryuha29@naver.com
** 건국대학교, kchang@konkuk.ac.kr
1) 이 논문은 2008년 류현아의 박사학위논문의 일부를 요약한 것임.

따라서 학교수학에서 학생들로 하여금 문제해결에서 기하 추론에 도움을 줄 수 있는 시각적 사고를 확대하기 위해, 실제 학생들의 시각적 사고의 인지과정을 분석해 볼 필요가 있다. 이에 본 연구는 기하문제해결에서 시각화가 어떻게 이루어지고 문제해결에 어떻게 영향을 미치는지 그 과정을 분석해 봄으로써 기하교육에서 시각화의 중요성을 재검토 하고자 한다. 이를 위해 시각화와 관련된 연구와 도형의 시각화에 관한 Duval의 연구를 바탕으로 시각화 과정에 관한 분석틀을 고안하고 이를 기초로 학생들의 기하문제 해결 과정을 분석하였다.

II. 이론적 배경

1. 시각화와 시각화 과정

수학 교육 분야에서 시각화 또는 시각적 사고와 관련된 연구(Lean & Clements, 1981; Clements, 1982; Presmeg, 1986; Yakimanskaya, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991; Gutiérrez, 1996; Nemirovsky & Noble, 1997)에서 관련된 용어들이 광범위하게 표현되어 있거나 애매한 정의를 하고 있다는 것을 볼 수 있다.

Zazkis, Dubinsky와 Dautermann(1996)는 시각화에 관해서 외부로부터 인식된 대상을 정신적으로 구성하는 것과 내적으로 구성된 대상을 외적으로 표현하는 것 모두를 인정하고, 이들 사이의 연결을 강조하였다. 또한 Gutiérrez(1996)는 수학에서 시각화는 '수학 문제를 해결하거나 수학적 성질을 증명할 때 내적이든 물질적이든 시각적이거나 공간적인 요소를 사용하는 각종 추론 활동'(p.9)이라 하였다. 특히 그는 시각화는 네 가지 주요 요소(정신적 이미지, 외적 표현, 시각화 과정, 시각화 능력)에 의해 통합되며, 추론 활동의 일종으로 문제를 해결하거나 증명할 때 실행된다고 하였다.

이러한 관점에서 수학 활동에서 시각화는 외부로부터 지각된 대상이나 정보에 대하여 정신적으로 관련된 이미지를 구성하거나, 정신적으

<표 Ⅱ-1> 시각화 과정

	Bishop (1983)	Kosslyn (1983)	Ben-Chaim, Lappan & Houang(1989)	Yakimanskaya (1991)	Gutiérrez (1996)	본 연구
시각화 과정	시각적 처리 능력 (VP)	이미지 가져오기	비도형적 정보에서 시각적 이미지 생성	내적 이미지 생성	정보의 시각적 해석	정보의 시각적 해석
						시각적 이미지 생성
	도형 정보 해석 능력 (IFI)	이미지 살펴보기	시각적 정보 해석	이미지 조종・사용	정신적 이미지 해석	시각적 이미지 변형 및 조작
		이미지 변형・조종				
		이미지 유지				

로 구성된 이미지를 펜이나 테크놀로지를 수단으로 외적으로 표현하는 활동으로 해석될 수 있다. 본 논문에서는 이에 더하여 넓은 의미로 수학의 이해와 발견을 목적으로 내적 또는 외적으로 이미지를 다루는 과정을 모두 (수학 활동에서) 시각화에 포함하였다.

시각화는 하나의 형태로 머물러 있는 것이 아니라 주어진 상황에 따라 변화하는 실행 과정이라 할 수 있다. Bishop(1983)은 시각화에서 두 가지 능력을 발견하였다. 하나는 '시각적 처리 능력(VP: the ability for Visual Processing)'으로 추상적인 관계와 도형이 아닌 자료를 시각적 용어로 해석하는 것, 시각적 이미지의 조작과 외삽법, 하나의 시각적 이미지를 다른 시각적 이미지로 변형하는 것을 말한다. 다른 하나는 '도형의 정보 해석 능력(IFI: the ability for Interpreting Figural Information)'으로 모든 형태의 기하적인 연구, 그래프, 차트, 도표에서 약속한 시각적 내용들과 공간적 어휘에 대한 지식과 시각적 이미지를 읽고 해석하는 능력을 의미한다. Bishop은 VP와 IFI를 사람들의 능력으로 제시하였지만 정의를 분석하면 실행 과정으로 볼 수 있다.

또한 다른 연구(Gutiérrez, 1996; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989; Yakimanskaya, 1991)에서도 Bishop이 말한 시각화 과정과 유사하게 두 가지 과정으로 기술하고 있으며, Kosslyn (1983)은 이미지 과정을 세분화하여 네 가지로 분류하였다. 그것은 이미지를 가져오는 과정, 이미지에 대한 질문에 답하기 위해 이미지를 면밀히 살펴보는 과정, 이미지를 변형시키고 조종하는 과정, 다른 정신적 조종으로 이미지를 유지하는 과정이다(Clements & Battista, 1992).

이상을 종합해 볼 때, 시각화 과정을 주어진 정보를 시각적으로 해석하여 정신적으로 이미지를 생성하는 내적인 이해 과정과 생성된 시각적 이미지를 외적으로 표현하는 두 과정으로 구별할 수 있다. 그러나 내적인 이해와 외적인 표현은 밀접하게 관련되어 상호작용하기 때문에 이 두 과정을 명확히 구분하기는 어렵다. 정신적으로 생성한 이미지는 즉각적으로 외적 표현이 가능하고 생성된 시각적 이미지를 변형하거나 조작할 때에는 내적 이해와 외적 표현이 동시에 실행될 수도 있다.

따라서 본 연구에서는 시각화 과정을 다음과 같이 구분하였다. 첫 번째는 추상적인 관계 또는 (그림이든 그림이 아니든) 어떤 주어진 정보를 시각적으로 해석하여 이미지를 생성하는 '시각적 해석과 시각적 이미지 생성' 과정이고, 두 번째는 문제해결에 접근할 수 있도록 생성된 시각적 이미지를 변형하고 조작하는 '시각적 이미지 변형 및 조작' 과정이다. <표 Ⅱ-1>은 위에서 언급한 연구자들의 시각화 과정과 본 연구의 시각화 과정을 정리한 것이다.

2. 도형의 이해에 관한 Duval의 관점

가. 도형의 시각화

Duval(1998)은 기하 도형의 시각화 과정에서 도형을 해석하는 관점에 따라 차원의 변화, 도형의 변화, 기저의 변화가 나타난다고 하였다.

첫째, 차원의 변화(dimensional change)이다. 이것은 대상을 바라보는 지각적 조직에서 보는 방법의 내적인 움직임을 의미한다. 3D/2D[2] 표현에서 공간을 인지하기 위해서는 먼저 2D/2D 형태의 평면을 규명하는 것이 필요하고, 2D/2D[3] 형태는 그것을 구성하고 있는 1D/2D 형태를 지각함으로써 그것의 윤곽을 볼 수 있다.

2) 3차원 입체도형에 대한 2차원적 표상으로 예를 들면 겨냥도의 형태.
3) 2차원 평면에 표현된 2차원 면의 형태.

이와 같이 공간이든 평면이든 차원의 변화는 가장 분명하게 나타난다.

둘째, 도형의 변화(figural change)이다. 이것은 주어진 대상을 변화시켜 조작적으로 이해할 때 발생한다. 이것은 지각적인 이해와 완전하게 독립적으로 구별되어야 한다. 왜냐하면, 지각은 모양을 바라보는 시각적 조직을 변형시키기 보다는, 몇몇의 모양을 첫눈에 본 모양으로 고착시키기 때문이다(Duval, 1999).

셋째, 기저의 변화(anchorage change)이다. 이것은 다음 절에서 설명하는 담론적 이해 과정에서 찾아볼 수 있다. 예를 들면, 한 사각형 ABCD가 제시되고 그 도형의 요소들로부터 평행사변형임을 이해하게 되는 경우와 'ABCD를 평행사변형이라 하자'라는 명제로부터 평행사변형 ABCD와 그 성질을 시각적으로 표현하는 경우에서 볼 수 있다. 전자의 경우는 기저가 시각적 대상이었다가 담론적인 것으로 이동하는 것이고, 후자는 담론적인 명제로부터 시각적 대상으로 이동되는 것이다.

나. 도형의 이해

Duval(1995)은 동일한 수학적 상황에서 도형이 문제해결의 실마리를 발견하는데 어떤 역할을 하는지 분석하기 위해 먼저 도형에 관한 인지적 이해를 몇 가지로 구분하였다. 도형이해의 첫 단계는 지각적 이해(perceptual apprehension)이다. 그 다음 절차적 이해(sequential apprehension), 담론적 이해(discoursive apprehension), 조작적 이해(operative apprehension) 세 가지 중 하나로 이해하는 것이다.

지각적 이해는 어떤 대상을 첫 눈에 보이는 단지 하나의 형태로 받아들이는 것으로, 예를 들어, 주어진 모양을 보고, '지붕처럼 보인다', '탁자 위 부분처럼 보인다', '정면 보다는 다른 평면의 정사각형처럼 보인다', '평행사변형처럼 보인다' 등으로 인지하는 것이다. 즉 2D/2D 형태를 규명하는 것이다.

절차적 이해는 도형을 작도하거나 또는 그 도형의 작도를 설명해야 할 때 요구된다. 작도 절차에는 여러 단위도형이 나타나는 특정한 순서가 있다. 도형을 작도하기 위한 자와 컴퍼스 또는 기하 소프트웨어 등의 작도 도구와 수학적 성질 사이의 관계가 고려되지 않은 채 작도하게 되면 그리려고 했던 도형을 제대로 그리지 못하고 다른 도형으로 우회하는 경우가 발생한다.

담론적 이해는 묘사된 대상을 결정하는 형태와 명제의 결합으로부터 형성된다. 그림에 표현된 수학적 성질은 지각적 이해만을 통해 결정될 수 없다. 몇 가지 성질은 먼저 말로 주어져야 하고 나머지는 주어진 성질로부터 파생될 수 있다. 지각적 이해에서 단 하나의 형태로 이해되었다면, 담론적 이해는 동일한 형태가 그 자신의 선분이나 점을 각각 표현하는 몇 가지 구성 형태들의 윤곽으로 이해된다.

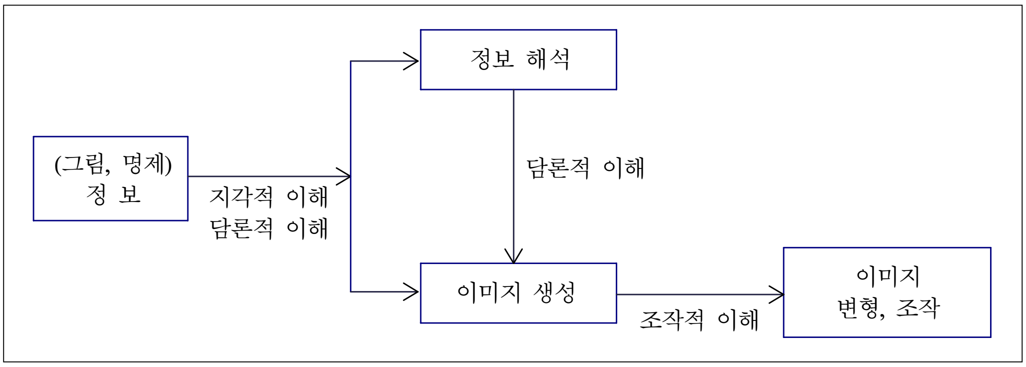
조작적 이해는 모양을 바라보는 시각적 조작을 변형시킴으로써 수행된다. 시각적 조작이란 "초기 도형의 성질을 유지한 채 초기 기하 도형을 다른 것으로 변하게 하는 것"(Duval, 1999, p.18)이다. 조작적 이해 과정에서는 주어진 도형 전체를 부분도형으로 나누는 메레올로지(mereologic) 방법, 마치 렌즈나 거울 등을 사용한 것처럼 도형을 더 넓거나 더 좁은 모양으로 또는 비스듬하게 만들 수 있는 광학적 방법, 평면 그림이나 스크린에서 대상의 위치나 방향을 바꿀 수 있는 위치 변화 방법 등이 이용될 수 있다. 이러한 도형의 조작은 문제의 해결책을 보여주거나 증명의 주요 단계를 암시하는 도형의 변형을 돋보이게 할 수 있다. 다시 말해, 조작적 이해는 주어진 도형에서 몇 개의 도형으로 발전시킬 수 있으며, 그 중 한 가지 대한 이해로부터 추론에 직관적인 도움을 제공

해 줄 수 있음을 언급하였다.는 해답을 위한 통찰을 제공해 줄 수 있다.

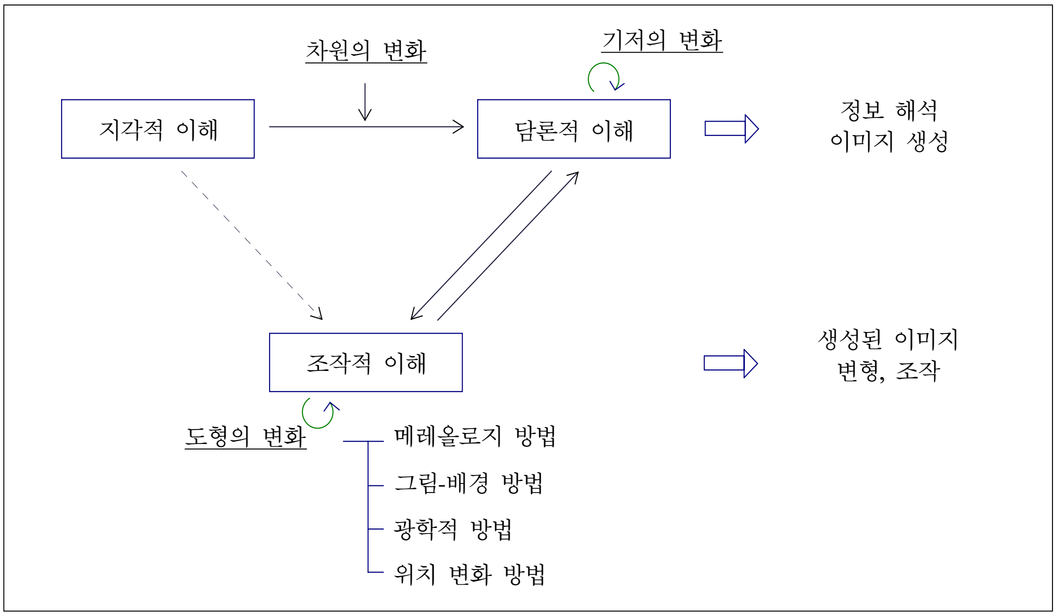
III. 시각화 과정 분석틀

Duval(1998)은 기하 활동에서 학습자에게서 나타나는 기본적인 인지과정을 작도, 시각화, 추론의 상호작용으로 설명하였다. 특히, 도형에 대한 이해로부터 추론에 직관적인 도움을 제공해 줄 수 있음을 언급하였다.

본 연구자는 시각화에 관한 여러 연구(Bishop, 1983; Kosslyn, 1983; Ben-Chaim, Lappan & Houang ,1989; Yakimanskaya, 1991; Gutiérrez, 1996)에서 기술한 시각화 과정에 기초하여 시각화 과정을 정의하고, 도형의 이해에 관한 Duval의 관점을 바탕으로 기하문제 해결에서 시각화 과정에 대한 분석틀을 개발하였다([그림 Ⅲ-1], [그림 Ⅲ-2]).



[그림 Ⅲ-1] 시각화 과정 분석 틀(Ⅰ)



[그림 Ⅲ-2] 시각화 과정 분석 틀(Ⅱ)

[그림 Ⅲ-1]은 기하문제 해결에서 시각화 과정(정보 해석 및 이미지 생성, 이미지 변형 및 조작)을 중심으로 도식화 한 것이다. 먼저 그림이나 그림이 아닌 정보를 해석하고, 이것으로부터 도형 이미지를 생성하기 위해서 담론적 이해가 중요한 역할을 하게 된다. 정보를 해석하기에 앞서 즉각적으로 도형 이미지를 지각하고 생성할 수도 있는데 이때는 도형을 지각적으로 이해한 경우이다. 다음으로 생성된 도형을 문제해결에 유용하도록 새롭게 변형·조작하기 위해 도형을 조작적으로 이해할 필요가 있으며, 이때 변화된 도형의 부분들로부터 문제해결을 위한 결정적 정보를 획득할 수 있게 된다.

<그림 Ⅲ-2>는 시각화 과정에서 도형에 대한 이해를 중심으로 도식화 한 것이다. 시각화 과정에서 차원의 변화와 기저의 변화는 주어진 정보를 시각적으로 해석하거나 시각적 이미지를 생성하는 과정에서 수시로 발생될 수 있다. 도형을 지각적으로 이해하고 그것을 담론적으로 이해하기 위해서는 반드시 차원의 변화가 요구된다. 또한 기저의 변화는 도형을 담론적으로 이해할 때 무엇을 근거로 어떻게 이해하느냐에 따라 달라진다. 다시 말해, 시각적 요소를 근거로 담론적으로 이해하느냐, 담론적 요소를 근거로 시각적으로 이해하느냐에 따라 기저는 달라질 수 있다. 또한 시각화 과정에서 생성된 이미지를 변형·조작할 때 도형을 변화시킴으로써 도형을 조작적으로 이해할 수 있다.

Ⅳ. 연구 방법

본 연구는 기존의 이론적 틀을 근거로 한 새로운 분석 틀에 기초하여 사례를 분석함으로써 이론적 틀을 강화하고 새로운 사실이나 관계 등을 발견하는 형식으로 설명적 사례 연구이다. 또한 본 연구는 연구 사례에 대한 일정한 이론적 틀을 가지고 그에 입각하여 수집된 자료를 주의 깊게 체계적으로 분석하여 그 이론적 전제 등을 검증하는 연역적 분석 방법을 따른다. 본 연구는 사례 연구로써 관찰의 방법을 따르고 있으므로 관찰자의 주관이 개입될 수도 있지만, 질문지나 표준화 검사 등에서 측정할 수 없는 개인의 내면적 특성이나 사고 과정을 구체적으로 파악할 수 있다는 의의를 갖는다.

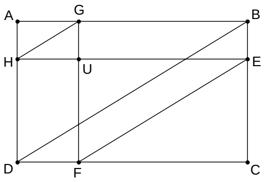
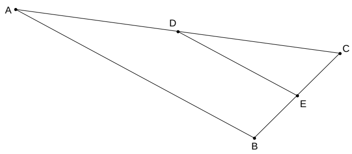
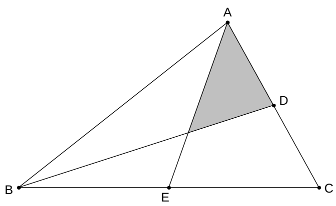
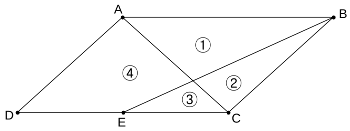
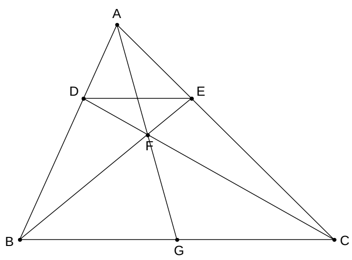
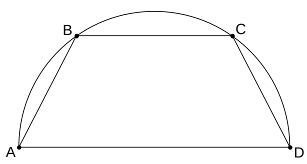
1. 연구 참여자

본 연구 참여자는 서울과 경기 지역의 중학교 3학년 남학생 1명(진수)과 여학생 1명(가영), 고등학교 남학생 4명(근호, 태연, 상호, 성진)과 여학생 1명(윤진)이 지도교사의 추천과 본인의 동의하게 본 연구에 참여하였다. 연구 참여자들의 평소 수학 성적은 중상위 정도이다.

2. 실험 과제

문제는 중학교 3학년까지의 기하 영역에서 평행선, 평행사변형, 닮음비, 닮음도형, 중선, 무게중심, 수직이등분선, 각의이등분선 등의 내용을 기초로 하여 고안하였다. 문제는 도형을 다양한 측면에서 바라보고 부분도형을 시각화함으로써 문제해결에 접근할 수 있는 형태로 구성하기 위해 예비실험을 거쳐 기존에 암기하고 있는 수학적 공식 등을 이용해 즉각적으로 해결할 수 있는 문제는 제외하고, 문제에 제시한 그림이 시각적으로 해답을 유도하는 경우 그림을 삭제하였다. 7개 문항 중 5문항(1~5번)은 도형의 성질을 이용하여 길이와 넓이를 측정하는 문제이고, 2개 문항(6, 7번)은 도형의 성질을 추측하고 설명하는 증명 문제이다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 실험 과제

번호	내 용		조 건
	그림	문 제	
1		아래 그림에서 사각형 AGUH와 ABCD는 가로의 비와 세로의 비가 같은 닮음인 직사각형이다. BD=20, HG=6 일 때, EF는 얼마인가?	
2		삼각형 ABC와 DEC는 닮음이며 길이 비는 2:1이다. 삼각형 DEC의 넓이가 4일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?	
3		삼각형 ABC에서 점 D는 AC의 중점이고 점 E는 BC의 중점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 36일 때, 색칠한 부분의 넓이는 얼마인가?	보조선 힌트
4		사각형 ABCD는 평행사변형이고, 점 E는 DC의 중점이다. 평행사변형 ABCD의 넓이가 60일 때, ①, ②, ③, ④ 각각의 넓이는 얼마인가?	보조선 힌트
5	 (보조 문제용 그림)	삼각형 ABC에서 AB에 점 D에서 BC에 평행하게 그었을 때 AC와 만나는 점을 E라 하고, DC와 BE의 교점을 F라 하자. 그리고 AF를 연장했을 때 BC와 만나는 점을 G라 하자. 그림을 그리고, BC의 길이가 20일 때, BG의 길이를 구하여라.	그림 있는 보조 문제
6	 (보조문제용 그림)	AD를 지름으로 하는 원 위에 점 B와 C가 있어서 사각형 ABCD를 만들 수 있다. AB=BC=CD일 때, 사각형 ABCD는 어떤 도형인지 답하고 증명하여라.	그림 있는 보조문제
7		사각형 ABCD의 네 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 할 때, 사각형 EFGH는 어떤 사각형인지 답하고 증명하여라.	보조선 힌트

3. 실험 절차

2006년 11월부터 2007년 8월까지 두 차례의 예비실험과 본실험을 실시하였다. 두 차례의 예비실험 분석 결과는 본실험의 분석 틀을 고안하는데 기초 자료가 되었다. 예비실험에서 학생들의 시각화 과정의 윤곽을 파악할 수 있었다.

본실험은 2007년 8월 실시하였다. 과제 해결은 연구자와 1대 1 면담 상태에서 개별적으로 이루어졌고 검사지의 모든 문항을 해결하는 데 각각 1시간 정도 소요되었다.

학생들은 문제에 대한 답과 설명을 말하거나 쓰기에서 선택적으로 행하도록 하였다. 경우에 따라 학생들이 말로 설명한 것을 다시 쓰거나 쓴 것을 다시 말로 설명하도록 요구하기도 하였다. 본 연구자가 관찰자로서 학생의 문제해결 과정을 관찰하다가 필요할 때마다 그 학생이 문제를 어떻게 이해하고 어떻게 접근하고 있는지 알아보기 위해 질문을 하였고, 경우에 따라 학생이 원하는 경우 보조선 힌트를 제공하거나 문제와 관련된 그림이 그려져 있는 보조 문제를 제공하였다.

학생들의 사고 과정을 분석하기 위한 자료 수집은 비디오 녹화, 지필 답안으로 이루어졌다. 학생들의 개인별 문제해결 과정과 면담 상황을 비디오로 녹화하였다. 녹화된 자료는 모두 전사하였으며 학생들의 검사지는 분석을 위해 수합하였다.

Ⅴ. 결과 분석

연구에서 수집한 비디오, 검사지, 면담자료 등의 질적 자료를 기초로 기하문제해결 과정에 나타난 학생들의 시각화 과정을 분석하였다. 모든 학생들의 모든 문제해결 과정을 기술하기에는 한계가 있으므로 세 문항(문제 1, 문제 3, 문제 6) 각각에서 사례 두 가지씩을 대표적으로 기술하였다.

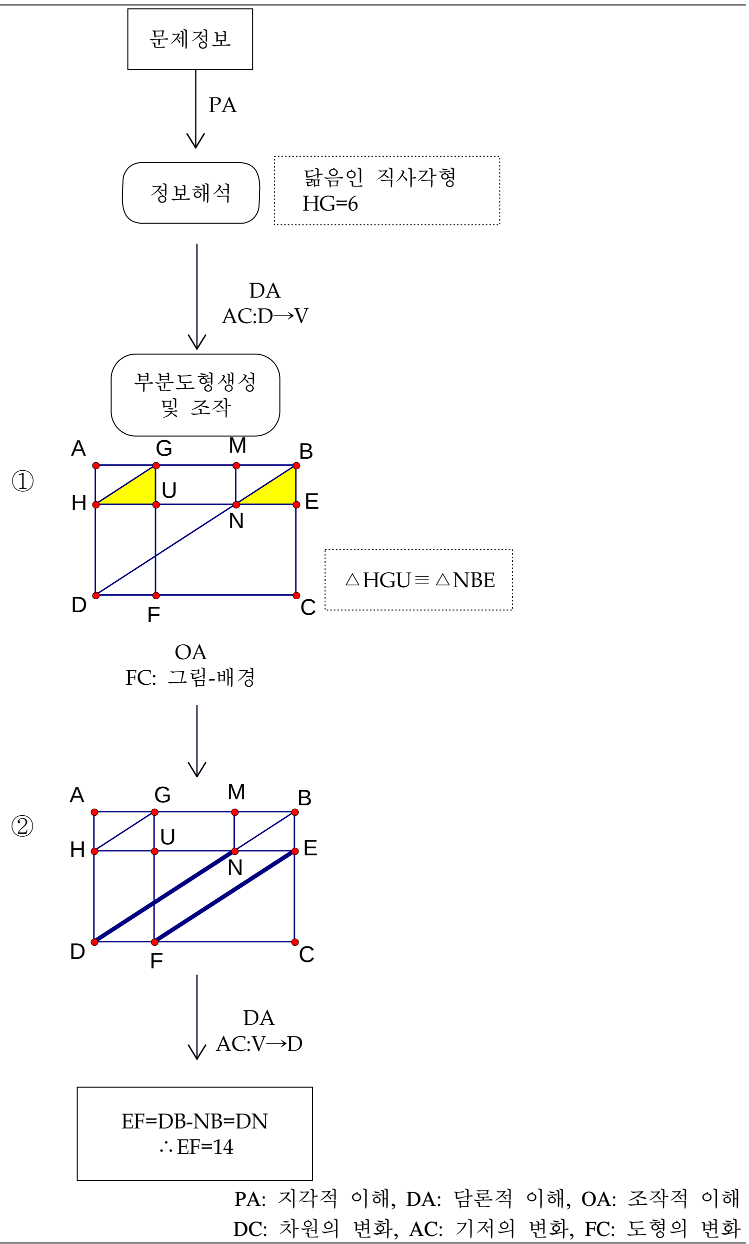
• **사례 (1) 문제1_윤진**

[그림 Ⅴ-1]은 [문제 1]에 대한 윤진의 문제해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 이 학생은 처음에 가로의 길이와 세로의 길이 비가 같은 두 직사각형을 지각하고 HG의 길이가 6이라는 조건에 집중하여 △GUH와 같은 △BEN을 시각화 하였다. 이것은 도형에 변화를 주지 않고 초기 그림 정보에 포함되어 있는 부분도형을 장독립적으로 인지한 것이다. 직접 도형에 변화를 주지는 않았지만 도형을 바라보는 시각적 조직에 변화를 주었다는 의미로 해석할 때 그림-배경 방법이 이용된 것이다. 결과적으로 도형①과 같이 △GUH와 합동인 △BEN을 시각화 한 것은 BD의 길이에서 BN의 길이를 분리시킴으로써 DN과 FE의 길이가 같다는 결과를 이끌어 내는데 결정적인 역할을 하였다. 이렇게 도형을 바라보는 시각적 조작의 변화만으로 문제의 구조를 명확히 파악할 수 있으며, 이것은 곧바로 문제해결로 이루어질 수 있다.

• **사례 (2) 문제1_가영**

[그림 Ⅴ-2]는 [문제 1]에 대한 가영의 문제해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 이 학생은 문제에서 가로의 길이와 세로의 길이 비가 같은 두 직사각형을 지각하고 HG의 길이가 6이라는 조건에 집중하여 도형①과 같이 △GUH와 합동인 △PFD를 시각화 하여 GH와 길이가 같은 PD를 발견하였다. 또한 주어진 BD의 길이를 이용하기 위해 도형②와 같이 △UFE와 합

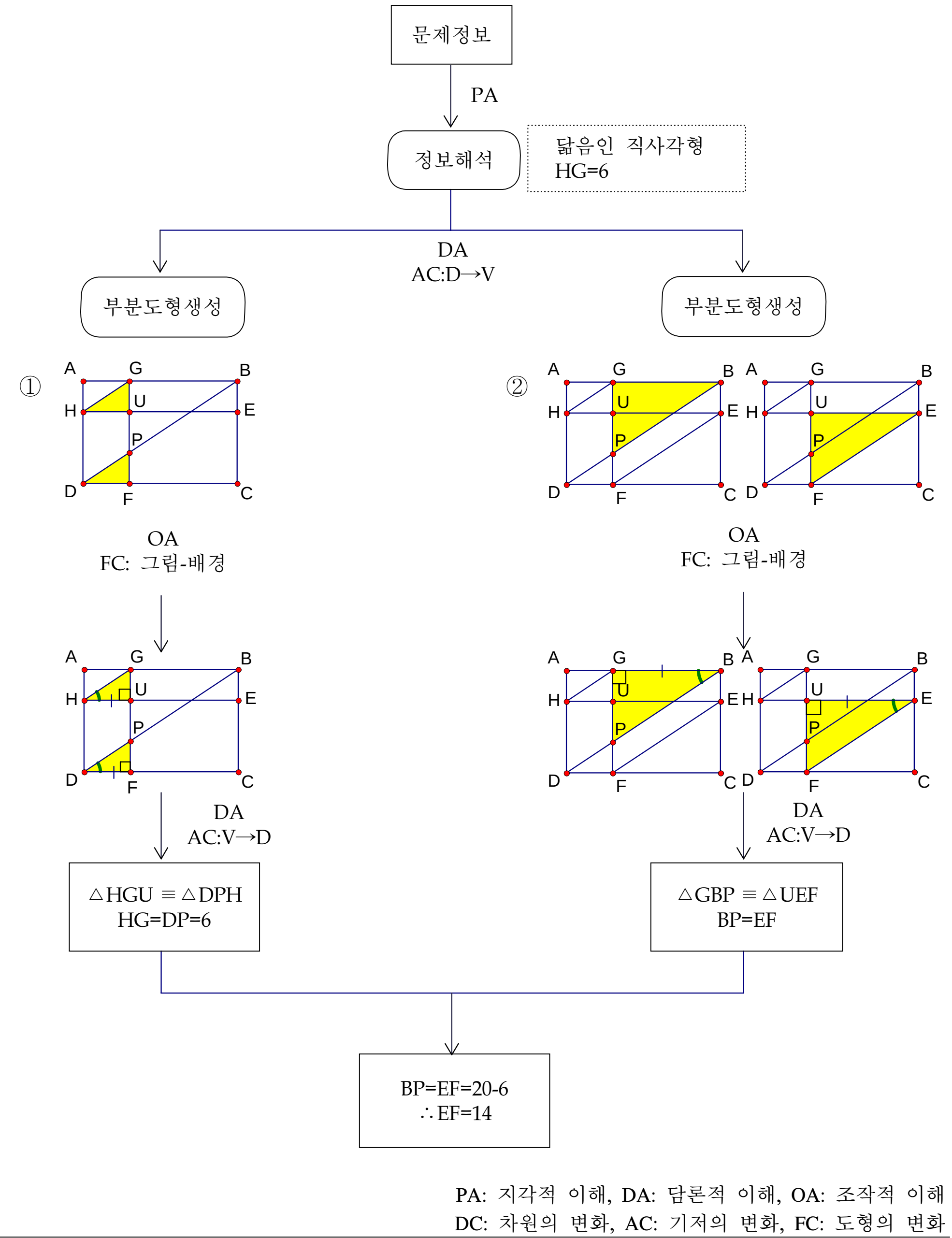
동인 △GPB를 시각화 하였다. 이 경우 문제해결에 결정적 역할을 한 것은 문제에서 요구하는 선분의 길이를 구하기 위해 그 선분을 포함하는 면으로써 △UFE를 부분도형으로 시각화 한 것이다. 이때 차원의 변화가 일어난다. 또한 도형의 구성 요소들 간의 성질과 성질들 간의 관계를 통해 부분도형을 생성하고 부분도형들을 조작한 것이다. 이것은 명제에 입각한 담론적 이해이며 기저가 시각적 도형으로 변화한 것이다.



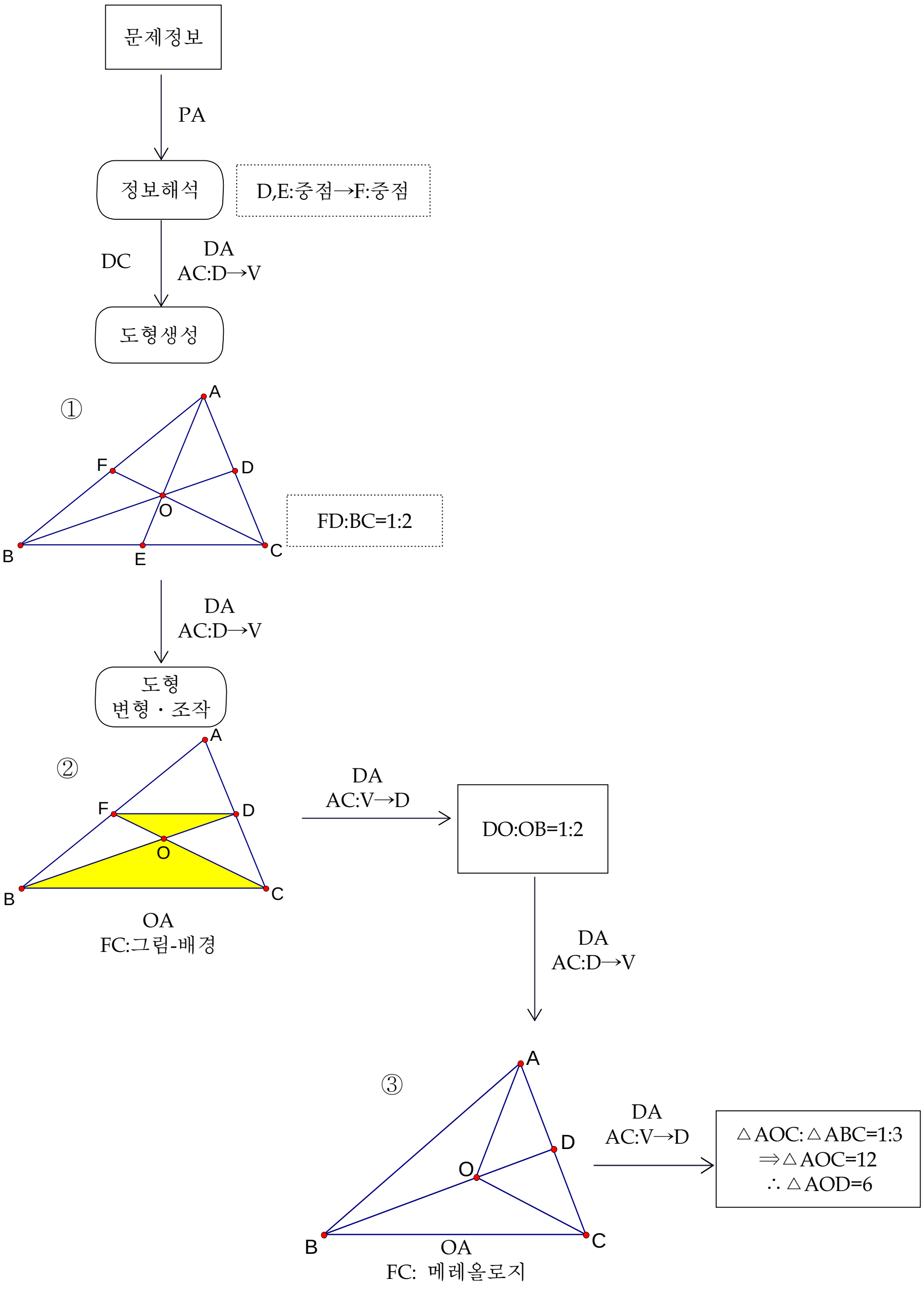
[그림 Ⅴ-1] 윤진의 [문제 1] 해결에서 시각화와 도형 이해

• 사례 (3) 문제3_근호

[그림 Ⅴ-3]은 [문제 3]에 대한 근호의 문제 해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 이 학생은 주어진 문제에서 점 D와 E가 삼각형 ABC의 변에서 각각 중점이라는 명제에 근거하여 도형

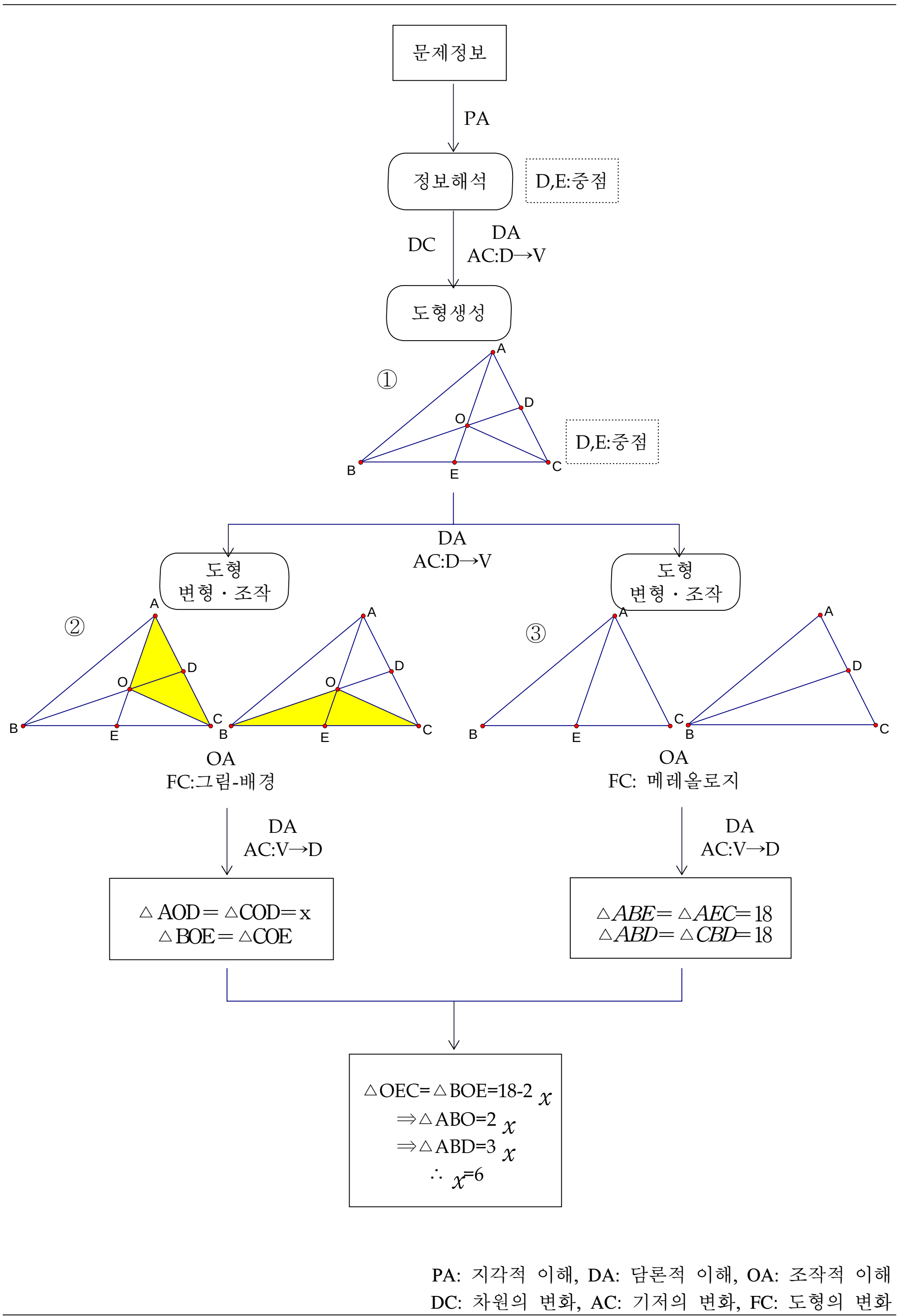


[그림 Ⅴ-2] 가영의 [문제 1] 해결에서 시각화와 도형 이해



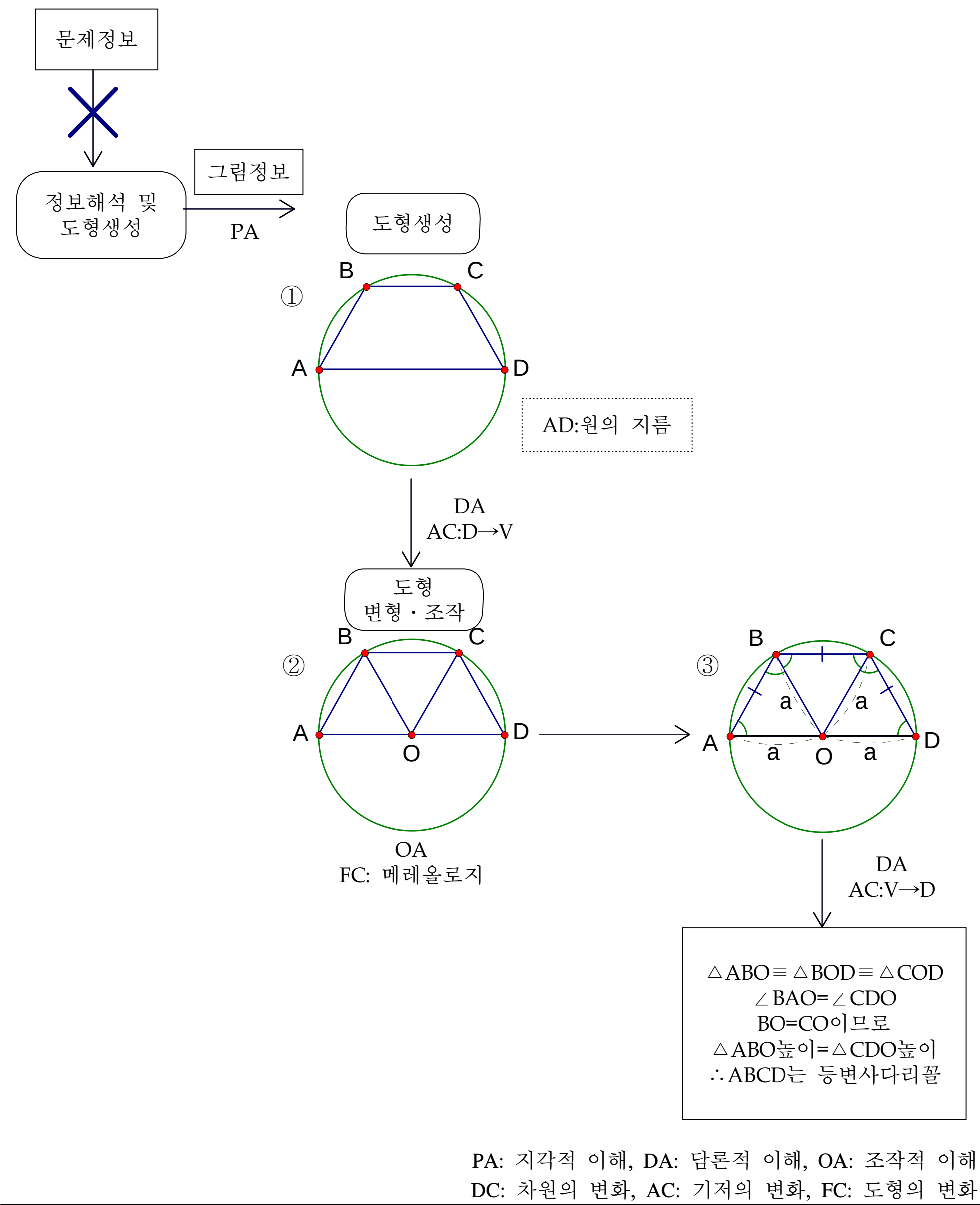
PA: 지각적 이해, DA: 담론적 이해, OA: 조작적 이해
DC: 차원의 변화, AC: 기저의 변화, FC: 도형의 변화

[그림 V-3] 근호의 [문제 3] 해결에서 시각화와 도형 이해

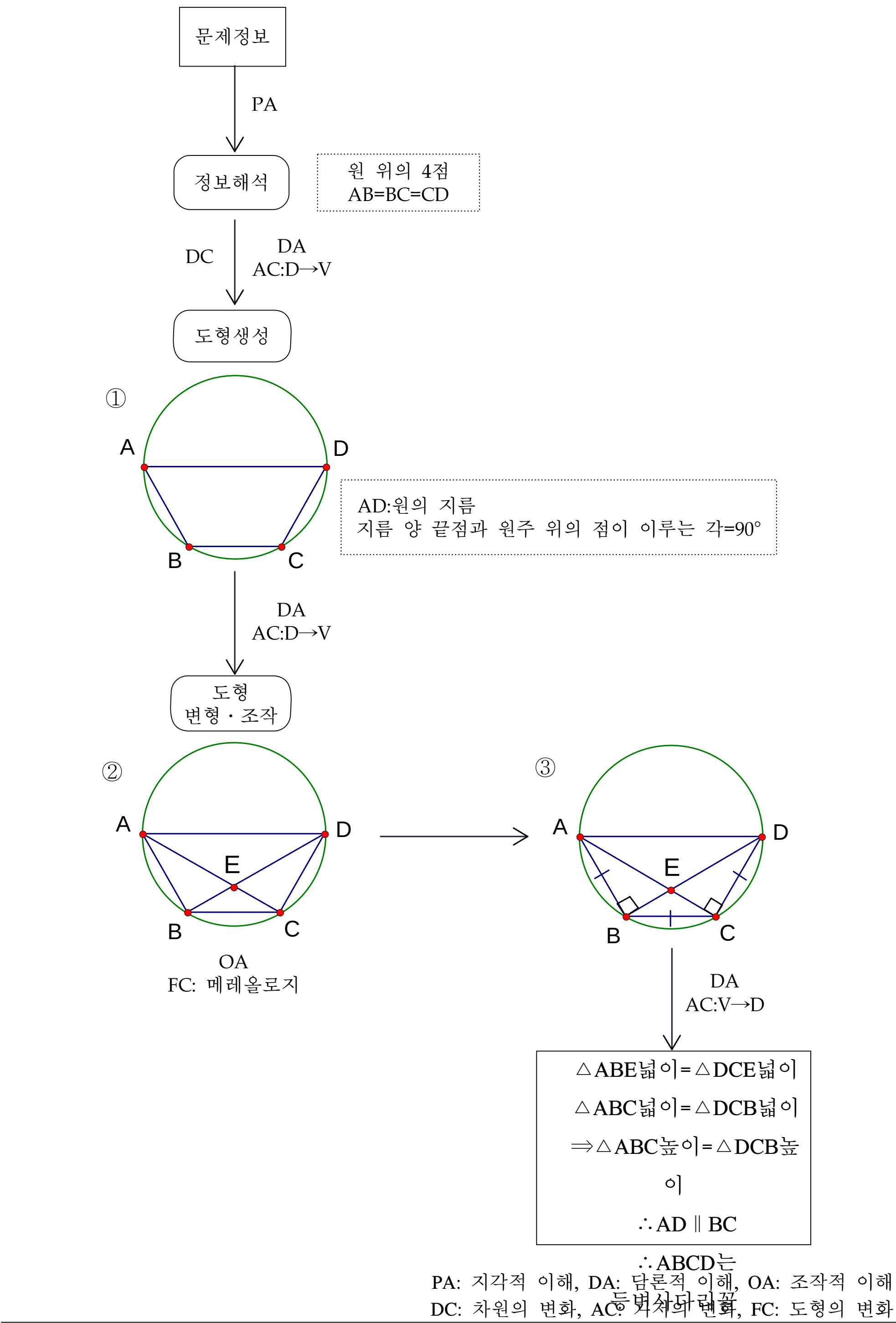


[그림 Ⅴ-4] 상호의 [문제 3] 해결에서 시각화와 도형 이해

①을 생성하였는데, 점, 선 등과 같은 1차원적 요소로부터 도형①과 같은 2차원적 도형을 생성할 때 차원의 변화가 요구된다. 이것은 명제에 입각한 담론적 이해이며, 기저가 시각적 도형으로 이동한 것이다. 도형①은 점 F는 AB의 중점이고 FD와 BC의 길이 비가 1 대 2가 된다는 중점 연결정리를 이끌어 낼 수 있었고, 이어서 중점 연결 정리에 근거하여 도형②와 같이 변형하였다. 이것은 FD와 BC의 길이 비가 1:2라는 명제로부터 도형②로의 시각화가 이루



[그림 Ⅴ-5] 윤진의 [문제 6] 해결에서 시각화와 도형 이해



[그림 Ⅴ-6] 지윤의 [문제 6] 해결에서 시각화와 도형 이해

어진 것이므로 기저가 담론적인 것에서 시각적인 것으로 이동한 담론적 이해가 적용된 것이라 할 수 있다. 또한 도형에 대한 조작적 이해로부터 가능하다. 여기서 도형을 조작할 때 적용된 방법은 그림-배경 방법으로 문제해결과 관련된 부분만 독립적으로 시각화 하는 것이다. 이것은 그림 전체에 의존하지 않고 구조적으로 특정 부분만 인지할 수 있는 장독립적 인지양식이 요구되는 부분이다. 이렇게 변형·조작된 도형②는 도형의 구조를 한 눈에 인지할 수 있는 발견적 형태로 실제로 문제해결에 결정적인 통찰을 제공해 준 것이라 할 수 있다.

• **사례 (4) 문제3_상호**

[그림 Ⅴ-4]는 [문제 3]에 대한 상호의 문제해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 이 학생은 문제에서 점 D와 E는 각각 AC와 BC의 중점이라는 조건으로부터 도형①을 생성하였는데, 점, 선 등과 같은 1차원적 요소로부터 도형①과 같은 2차원적 도형을 생성할 때 차원의 변화가 요구된다. 그리고 도형①에서 밑변의 길이가 같고 높이가 같은 삼각형은 넓이가 같다는 명제에 입각하여 도형②와 도형③으로 각각 변형·조작할 수 있었다. 이것은 명제에 입각한 담론적 이해이다. 이때, 도형 조작에 있어서 그림-배경 방법과 메레올로지 방법이 각각 이용되었다. 그림-배경 방법은 그림 전체에 의존하지 않고 구조적으로 특정 부분만 인지할 수 있는 장독립적 인지양식이 요구되는 방법이다. 메레올로지 방법 또한 도형 전체를 각기 다른 형태의 부분도형으로 나누어 인지하는 것으로 도형 전체의 윤곽에 대한 통찰이 요구된다고 할 수 있다. 결국 이 학생은 각각 변형한 도형②와 도형③에서 생성되는 삼각형들의 넓이 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있었다. 이 문제해결 과정에서는 도형②와 도형③과 같이 도형을 변형하여 부분도형을 시각화한 것이 문제해결을 위한 결정적 단서를 제공한 것이라 할 수 있다.

• **사례 (5) 문제6_윤진**

[그림 Ⅴ-5]는 [문제 6]에 대한 윤진의 문제해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 윤진은 처음에 명제로 주어진 도형에 대한 정보로부터 도형을 생성하는데 있어서 어려움이 있었다. 그래서 연구자가 문제의 조건에 따라 그려진 그림 정보를 제공하였다. 이 학생은 주어진 그림 정보로부터 지름 AD의 중점 즉 원의 중심(O)을 찾고 도형②와 같이 변형하였다. 이것은 원이라는 조건과 AD가 원의 지름이라는 조건에 입각하여 담론적으로 이해한 것이며, 기저는 담론적인 것에서 시각적인 것으로 이동한 것이다. 이 학생은 도형②와 같이 사각형 ABCD를 변형하고 합동인 삼각형을 인지함으로써 선분의 길이, 각의 크기 등과 같은 구성 요소들 간의 성질과 관계를 이해할 수 있었다. 도형②와 같이 사각형을 몇 개의 삼각형으로 나누어 조직하는 것은 메레올로지 방법이다. 이 학생의 문제해결 과정에서는 도형②에서 합동인 삼각형을 시각적으로 재조직하는 과정에서 통찰이 이루어지고 이것이 문제해결의 결정적 실마리를 제공한 것이라 할 수 있다.

• **사례 (6) 문제6_지윤**

[그림 Ⅴ-6]은 [문제 6]에 대한 지윤의 문제해결 과정에서 시각화와 시각화 과정에서 도형 이해에 대하여 도식화 한 것이다. 이 학생은 명제로 주어진 도형에 대한 정보를 명확하게 해석하여 그림을 올바르게 표현할 수 있었다. 이 때, 정보에서 주어진 점, 선 등과 같은

1차원적 요소로부터 도형①과 같은 2차원적 도형을 생성할 때 차원의 변화가 요구된다. 이렇게 생성한 도형①에서 AD가 지름이고 지름의 양 끝점에서 원 주 위의 한 점까지 연결하여 만들어지는 각의 크기가 90°라는 명제에 입각하여 도형②와 같이 변형하였다. 이것은 명제에 입각한 담론적 이해로 기저가 담론적인 것에서 시각적인 것으로 이동된 것이다. 이때, 사각형 ABCD를 잘라서 삼각형들로 나누어 시각화 하는 메레올로지 방법을 이용하였다. 변형한 도형②에서 길이가 같은 선분과 각의 크기를 인지함으로써 도형을 담론적으로 이해하여 문제를 해결하였다. 이 학생은 도형②와 같이 사각형 ABCD를 변형하고 여러 개의 특징적인 삼각형을 인지함으로써 선분의 길이, 각의 크기 등과 같은 구성 요소들 간의 성질과 관계를 이해할 수 있었다. 이 학생의 경우는 도형②에서 여러 개의 삼각형을 시각적으로 재조직하는 과정에서 통찰이 이루어진 것이고, 이것이 문제해결로 연결된 것으로 판단된다.

위의 6가지 사례를 포함하여 나머지 문제해결의 시각화 과정을 분석한 결과 본 연구에서 문제해결에 나타난 학생들의 시각화 과정은 다음과 같이 요약할 수 있었다.

학생들은 먼저 주어진 성질에 입각하여 부분도형들을 시각화 하거나 주어진 성질과 관련 없이도 직관적으로 부분도형을 시각화하는 것을 시작으로 하였다. 그리고 부분도형들 간의 성질을 관련지어 또 다른 성질을 발견해 내거나 새로운 도형을 시각화 하는 것으로 발전하였다. 이때 문제해결에 결정적인 단서가 되는 것은 문제해결에 알맞게 시각화한 부분도형이었으며, 도형을 바라보는 시각이 한 가지에 고착되어 적절한 부분도형을 시각화 하지 못하는 경우 문제해결에 실패하는 것으로 나타났다.

Ⅳ. 결론 및 논의

본 연구 결과 평면도형 문제해결에서 시각화는 도형의 이해를 도와 문제해결에 중요한 통찰을 제공하는 것으로 나타났다. 학생들이 문제를 해결하기 까지 시각화 과정을 요약하면 다음과 같다.

먼저 학생들은 문제에 주어진 도형을 지각적으로 이해하거나 주어진 성질과 관련하여 담론적으로 이해하여 전체도형 또는 부분도형을 시각화 하였다. 이는 정보를 해석하고 시각적 이미지를 생성하는 과정이다.

다음으로 학생들은 위 과정에서 시각화한 도형을 다양한 방법으로 변형·조작하여 또 다른 성질을 발견하거나 새로운 부분도형을 시각화 하였다. 이는 도형에 대한 조작적 이해를 통한 과정이다.

이와 같은 시각화 과정에서 도형에 대한 이해를 통해 시각화한 부분도형은 학생들이 문제를 해결하는 데 결정적 단서로 작용하였다.

본 연구에서 도형의 시각화는 문제해결을 위한 추론의 시작을 열어 주어 문제해결로 이끄는 유용한 수단임을 발견하였다. 이것은 기하 활동에서 하나의 인지과정이 다른 인지과정을 지원할 수 있다는 Duval(1998)의 연구를 뒷받침 해준다. 또 본 연구에서 학생들의 문제해결 과정을 분석한 결과 문제해결 활동에서 Duval (1995)이 언급한 도형에 대한 지각적 이해, 담론적 이해, 조작적 이해가 발견되었고, 그것이 문제해결에 도움이 된다는 것을 알 수 있었다.

본 연구를 통해 Duval 연구에서 명확하게 드러나지 않은 시각화 과정을 보완·설명할 수 있었다. 본 연구에서 시각화 과정을 정보를 해석하고 시각적 이미지를 생성하는 과정과 도형을 변형·조작하는 과정으로 구분한 바 있다. 학생들이 정보를 해석하고 이미지를 생성하는

과정에서 도형에 대한 지각적 또는 담론적 이해가 요구되었고 도형을 변형·조작하는 과정에서 도형에 대한 조작적 이해가 요구되었다. 또한 도형에 관한 지각적 이해가 담론적 이해로 이어지기 위해 도형에 대한 차원의 변화가 일어났다. 그리고 담론적 이해 과정에서는 주로 기저의 변화가 일어나며, 조작적 이해 과정에서는 도형의 변화가 일어남을 알 수 있었다. 그러므로 시각화가 문제해결에 유용하기 위해 도형의 구조에 대한 이해가 반드시 뒤따라야 함을 알 수 있다.

연구 결과에 따라 평면도형을 지도할 때 학생들이 도형의 구조를 명확히 파악하고 부분도형들 간의 관련성을 보다 잘 이해할 수 있도록 교사는 도형에 대한 이해에 유념하여 시각화를 강조해야 할 것이다.

참고문헌

구광조·오병승·전평국. (1995). **수학학습심리학.** (pp.157-191). 서울: 교우사.

Battista, M. Wheatley, G. & Talsma, G. (1989). Spatial visualization, formal reasoning, and geometric strategies of preservice elementary teachers. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(4), 17-30

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11*(1), 49-60.

Bishop, A. J. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking, *Proceedings of the IV I.C.M.E.*, 176-178.

Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics (2nd part). *For the Learning of Mathematics 2*(2), 33-39.

Duval. R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In Sutherland, R., & Mason, J. (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematic education* (pp.142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the international Group for the Psychology of Mathematics Education 21st.* Cuernavaca, 3-26.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*, 3-20.

Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine.* New York, NY: W. W. Norton.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Lean, G. & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in*

Mathematics, 12(3), 267-299.

Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics, 33*(2), 99-131.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Tweney, R. D. (1989). A framework for the cognitive psychology of science. In B. Cholson, W. R. Shadish, Jr., R. A. Neimeter, & A. C. Houts (Eds.), *Psychology of science: Contributions to metascience* (pp. 342-366). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Wertheimer, M. (1959). *Productive Thinking.* NY: Harper & Row.

Yakimanskaya, I. S. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. In J. Kilpatrick, I. Wirszup, A. Buccino, & R. Streit(Eds.), *Soviet Studies in Mathematics Education 3.* Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is Mathematical Visualization?, In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.1-8), Washington, DC: Mathematical association of america.

Process of Visualization in 2D-Geometric Problem Solving among Secondary School Students

Ryu, Hyun Ah (Konkuk University)
Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This study was designed to gain insights into students' visualization process in geometric problem solving. The visualization model for analysing visual process for geometric problem solving was developed on the base of Duval's study.

The subjects of this research are two Grade 9 students and six Grade 10 students. They were given 2D-geometric problems. Their written solutions were analyzed problem is research depicted characteristics of process of visualization of individually.

The findings on the students' geometric problem solving process are as follows: In geometric problem solving, visualization provided a significant insight by improving the students' figural apprehension. In particular, the discoursive apprehension and the operative apprehension contributed to recognize relation between the constituent of figures and grasp structure of figure.

* Key words : geometric problem solving(기하문제해결), visualization(시각화), processes of visualization(시각화 과정), dimensional change(차원의 변화), figural change (도형의 변화), anchorage change(기저의 변화), figural apprehension(도형의 이해), discoursive apprehension(담론적 이해), operative apprehension(조작적 이해)

논문접수: 2009. 2. 1.
논문수정: 2009. 2. 17.
심사완료: 2009. 2. 23.