대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 1, 81-98. Feb 2009

초등학교 6학년 학생의 양적 추론 사례 연구

전 형 옥* · 이 경 화** · 방 정 숙***

본 연구는 초등학교 6학년 학생들의 양적 추론의 특성을 그 유형과 표현 방식의 특성에 기초하여 분석하였다. 먼저 검사지를 통해 양적 추론의 특성을 관찰하기에 적합한 초등학교 6학년 학생 3명을 선정한 후, 문제 해결 과정에 대한 학생들의 사고 전략과 의미 도출 과정에 대한 심층 면담을 실시하였다. 3명의 학생은 문제 해결 과정에서 다른 양적 추론 유형을 사용하였으며, 그에 따라 다른 전략적 특성이 관찰되었으며, 특히 그 추론 수준이 달라서 동일한 문제해결 전략을 사용하더라도 그 세부 양상이 달랐다. 학생들은 또한 시각적·언어적·기호적 표현을 각기 다른 목적과 기능으로 활용하였다. 특히 시각적 표현은 문제 상황에 포함된 양과 그 관계를 표현하고 이를 바탕으로 새로운 관계를 추론하는 양적 추론의 과정에서 가장 큰 역할을 하고 있는 것으로 파악되었다. 연구 결과를 바탕으로 문장제 해결에서 양적 추론의 역할과 초기 대수의 도입에 관한 논의점을 도출하였다.

Ⅰ. 서 론

지금까지 대수는 중등에서 지도되는 것으로 여겨져 왔으나, 최근의 대수 관련 연구들은 K 단계에서부터 대수와 관련된 학습이 이루어져야 함을 제안하고 있다. NCTM (2000)에서는 모든 학생이 대수를 배워야 하며, 함수 등을 통한 양 사이의 관계, 수학적 관계의 표현 방법, 변화의 분석 등을 학습 내용으로 제시하였다. 초등학년에서부터 대수를 도입하기 위한 논의는 1990년대 이후 '초기 대수(Early Algebra)'로 구체화되어 논의되기 시작하였다. '초기 대수'는 "모든 학생들은 대수를 배울 수 있다"는 것을 전제로 하며, 초등학교에서 대수를 지도하는 방법, 대수적 사고의 특성 등에 대한 논의를 중심으로 한 일단의 연구 성과 및 관점을 지칭한다.

대수와 대수적 추론에 대해 넓은 관점을 취하는 초기 대수 관련 연구들은 양적 추론을 대수적 추론에 바탕이 되는 사고 요소로 주목하고 있다(김성준, 2004; Carraher & Schliemann, 2007; Smith & Thompson, 2008). 양이 수학적 대상으로서 합당하다는 주장은 예전부터 있어 왔다. 이를 초기 대수의 도입과 관련하여 양을 산술의 대상으로 다루어야 함을 제안하는 논의들이 있다(Carraher & Schliemann, 2007). 이에 대한 논의들을 발전시켜 산술영역에서 양에 초점을 두는 것이 대수적 추론을 개발하는 좋은 방법이 될 수 있음을 제안하고 있는 연구들 또

* 한국교원대학교 대학원, antree@hanmail.net
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr
*** 한국교원대학교 jeongsuk@knue.ac.kr

한 이루어지고 있다(Dougherty, 2007; Smith & Thompson, 2008). 특히, Dougherty는 양에 초점을 둔 활동에 변수와 함수에 대한 이해가 포함될 수 있다고 주장하였다.

초등의 산술영역을 양적으로 접근하는 것이 산술을 깊게 이해하게 하는 동시에 대수적 추론의 개발을 위한 좋은 방법이기 때문에 초기 대수와 관련한 연구에서는 양적 추론에 관한 연구의 필요성을 제기하고 있다. 하지만 양적 접근에 대한 부족한 이론적 토대로 통일된 접근이 어려우며, 특히 국외에 비해 국내에서는 이에 대한 논의가 거의 이루어지고 있지 않다.

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로, 문장제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 양적 추론의 특성을 분석하는 것을 목적으로 하였다. 이를 위하여, 문제 해결 과정에서 사용한 추론의 유형과 그 특성, 양적 추론의 표현을 중심으로 면밀히 분석하였다. 이 연구의 결과는 초기 대수의 관점에서 초등 수학의 문제 해결의 지도 방향에 대한 교육적 시사점을 제시하는 하나의 경험적 근거자료가 될 것이다.

II. 이론적 배경

1. 양적 추론의 의미

본 연구의 목적은 학생들의 양적 추론의 특성을 분석하는 것으로 먼저 양적 추론이 무엇을 의미하는지를 명확히 할 필요가 있다. 그러나 양적 추론에 관한 기존의 연구에서도 양적 추론을 명확히 정의내리고 있지 않으며, 양에 대한 관점도 일치되지 않고 있다. 이 때문에 양적 추론의 연구가 어려우며, 실제로 양에 대한 이론적 토대가 현실적으로 부족하다(Carraher & Schlimann, 2008).

Carraher와 Schlimann(2007)은 양과 크기가 초등 수학의 산술의 대상이 되어야 함을 역설하면서, 여러 학자의 연구로부터 양과 관련된 요소를 <표 Ⅱ-1>과 같이 구분하여 기술하였다. Thompson(1994)은 양을 대상과 대상의 속성이나 특성, 고유 단위를 포함하는 개념적 총체, 그리고 양에 수 값을 대응시키는 과정 모두를 포함하는 것으로 설명하였다(Lobato & Siebert, 2002, p.90에서 재인용).

<표 Ⅱ-1> Carraher와 Schlimann(2007)에 의한 양의 구성 요소

구 분		설 명
양		셀 수 있고, 측정 가능한 속성(질량, 길이, 시간)과 유도된 속성(부피, 면적, 속력, 가속도, 밀도, 마찰계수)을 내포한 것
수	불명수	구체적 상황이나 수학 이외의 참조물이 없는 수 (3, -0.12, 3/4, 4i, π)
	명수	세기) 단위와 함께 표현된 집합의 기수, 예) 3개의 계란
		측정) 대상의 측정 결과(수와 측정단위로 표현) 또는 유도되거나 결합된 측정치
측정 가능한 일차원의 양		스칼라 양) 순서지어질 수 있는 양
		가법적 양) 덧셈과 뺄셈의 연산에 적용하는 스칼라 양
크기 (magnitude)		수학 외적인 양을 언급하지 않고 크기에 대해 일반적으로 표현한 것

양에 대한 개념은 매우 광범위하여 간단히 정의내리기는 어려우나, 본 연구에서는 Thompson (1994)의 정의에 따라 측정 가능한 물리적 대상의 속성 또는 유도된 속성, 측정과 세기의 결과로 단위와 함께 표현한 수, 크기를 표현한 수나 문자를 양으로 본다.

Smith와 Thompson은 양적 추론을 양과 양 사이의 관계에 대한 이해를 통해 추론하는 것으로 설명하였다. 특히, 양 사이의 관계 중에서 양의 비교를 통해 출현하는, '차이'와 '비' 또한 양으로 취급할 수 있다고 설명한다. 두 양 사이에 곱셈적 관계가 성립하면 '비', 덧셈적 관계가 성립하면 '차이'로 표현할 수 있으며, 이것은 모두 비교를 통하여 측정 가능한 속성이므로 그 자체로 양이 된다(Smith & Thompson, 2008). Lobato와 Siebert(2002)는 양적 연산을 이미 인식된 양을 서로 관련지음으로써 새로운 양을 만들기 위해 사용하는 개념적 연산이라고 설명하였다. 예를 들어, 비의 양을 구성할 때, 산술적 연산인 나눗셈으로 구성하지 않고, 하나의 양이 다른 양보다 몇 배 더 커지는지 비교하여 비를 구성하는 것이 양적 연산이다. 양적 연산은 산술연산과 달리 양의 변화와 관계에 주목한다.

본 연구에서는 Smith와 Thompson의 정의에 따라 양적 추론을 양과 여러 양들 사이의 관계를 분석하고 새로운 양을 만드는 추론과정으로 생각한다. 그리고 양 사이의 차이 관계를 추론하는 양적 추론을 차이추론으로, 곱의 관계를 추론하는 양적 추론을 곱 추론이라 하였다.

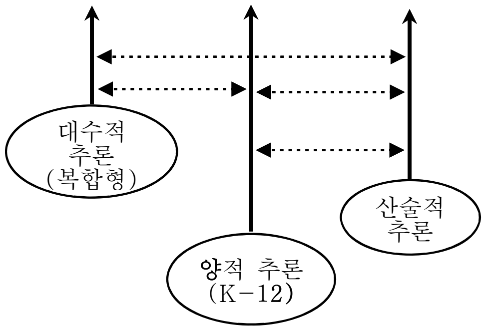
2. 양적 추론의 연구

Smith와 Thompson(2008)은 양적 추론을 대수에 대한 다양한 접근의 개념적 뿌리로 표현하면서 초기 대수에서의 양적 추론의 의미를 종합적으로 논의하였다. 서로 밀접한 관계가 있는 양들을 포함한 문장제를 해결하는 과정에서 양적 추론이 대수적 추론 그리고 산술적 추론과 어떻게 다른지, 세 추론이 어떻게 연결될 수 있는지에 대해 논하였다.

문장제 해결에 있어서 대수적 추론은 변수를 도입하여 방정식을 세우고 구문론적 규칙으로 그 방정식을 해결하는 표준적인 패턴을 따르며, 일반성을 가지고 있다. 양적 추론으로 문장제를 해결하는 과정은 양 인식하기, 양 특징 파악하기, 양 관계 파악하기, 새로운 양 만들기, 새로운 양과의 관계 파악하기와 같은 과정을 포함한다. 문장제에 포함된 양의 특징에 따라, 관계의 특징에 따라, 그리고 학생이 주목하는 양과 그 관계에 따라 다양한 과정으로 해결될 수 있다. 그래서 양 사이의 관계에 대한 추론을 바탕으로 하는 과정은 대수적 추론과 같은 표준적인 패턴이나 기호적인 식에 의존하지 않고 유연한 추론을 지원하는 역할을 한다. 그리고 미래의 대수 학습에서 대수적인 표기에 내용을 제공하는 역할을 한다. 산술적 추론은 문제에 포함된 수치와 계산에 초점을 두는 해결과정이며, 양적 추론은 산술적 추론을 정당화한다. 그러므로 양적 추론은 대수적 추론이 갖는 일반성에 대한 수학적 아이디어를 개발하고, 산술적 추론을 지지하는 데 도움을 준다.

Smith와 Thompson(2008)은 초기 대수에 관한 논의에서 [그림 Ⅱ-1]과 같이 양적 추론, 산술적 추론, 그리고 대수적 추론의 발현 사이의 연결에 관한 틀을 제안하였다(p.127). 현행 교육과정에서 수치적이거나 기호적인 표현과 조작을 강조하는 것의 근본적인 결함은 수학과 학생의 경험의 세계를 연결 짓는데 실패한 것이며, 양적 추론을 통해 이를 극복할 수 있다는 것이 위 연구의 주장이다. 학생들의 양적 추론 능력을 초등 이전의 단계부터 지속적으로 개발

하여 대수적 추론과 산술적 추론의 바탕이 되도록 해야 함을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 양적 추론 도입의 관점

Carraher와 Schlimann(2007)은 양과 크기를 수학의 대상으로 다루어야 하며, 수학이 양으로부터 멀어지고 있음을 비판하였다. 또, 어린 학생들에게 처음에 수의 대수를 가르치고 난 다음 대수의 응용으로 양이 포함된 문제를 제시하는 것은 실제적이지 않다고 주장하였다. 그러므로 교수학적으로 건전한 접근은 초기 대수 단계에서 양적인 사고에 충분히 주목하는 것이다.

Carraher와 Schlimann(2007)은 추상적인 수의 영역에서 제기되지 않지만 양에서는 제기되는 많은 쟁점들이 있다고 설명하면서, 그 중 곱셈과 나눗셈의 참조-변환 성질을 언급하였다. 예를 들어, 자동판매기에서 한 병에 700원하는 음료수를 8병 산다고 가정하였을 때 얼마를 넣어야 하는지 생각해보자. 이 문제를 해결하기 위해 세 가지 형태의 곱셈을 할 수 있다: 1) 추상적인 수의 영역에서의 계산으로 700과 8을 곱하여 결과값 5600에 단위 '원'을 붙이는 것이다; 2) 외연량 700원에 수 8을 곱하여 5600원을 얻는 것이다. 이것은 반복된 덧셈 방법과 같은 성질이 된다; 3) 내포량 700원/병에 외연량 8병을 곱하여 결과로 5600원을 얻는 것이다. 이것은 투입값이 산출값으로 변환되는 것을 보여준다. 그들은 이러한 쟁점이 곱셈을 처음 배우기 시작하는 학생들에게는 이해되기 어려운 것이지만 미래에 꼭 다룰 필요가 있다고 제안한다.

양적 추론과 관련한 논의에서 주목되고 있는 것은 수직선과 관련한 연구들이다. 현실적 수학 교육(RME)의 연구들(Gravemeijer, 1999; Klein, Beishuizen, & Trffers, 1998)은 "비어있는 수직선"을 양적 추론과 관련하여 연구하였다. 이 연구들에서는 양을 나타내는 표시를 직접 수행하도록 선분과 점에 값을 정하지 않았다. 이 때 수직선은 양을 표현하는 수단으로 사용된다. 그리고 "시각화가 대수적 추론을 스스로 할 수 있게 하고 대수적 일반화의 새로운 공간 구조를 이해하는 것을 촉진한다"는 주장의 한 예로도 볼 수 있다(Boester & Leher, 2008).

지금까지 논의한 바를 요약하면, 양적 추론에 대한 연구들이 산술, 초기 대수의 관점에서 양적 추론의 중요성과 그 역할에 대하여 논의하였다. 양을 산술의 대상으로 보고, 학생들의 양과 양 사이의 관계에 대한 사고를 촉진하고자 하는 구체적인 방안들에 대한 연구도 수행되었다.

본 연구는 문장제 해결 과정에서 학생들의 양적 추론의 특성을 면밀히 파악하기 위하여 문장제 해결 과정을 양 인식하기, 양 특징 파악하기, 양의 관계 파악하기, 새로운 양 만들기, 새로운 양과의 관계파악하기로 세부 분류하고 그 과정에서 학생이 주목하는 양과 추론하는 관계인 양적 추론의 유형을 분석하였다. 이를 바탕으로 각각의 양적 추론의 유형이 어떠한 사고 과정을 바탕으로 하는지 면밀히 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

6학년 학생들의 양적 추론의 특성을 분석하기 위해, 먼저 한 학급 전체를 대상으로 양적 추론 양상을 확인할 수 있는 검사지를 투입하였다. 그 결과 나타나는 양적 추론을 일차적으로 분석하여 심층 면담 대상 학생 3명을 선정하였다. 선정을 위해 고려한 사항은 자신의 생각을 자세히 쓰는 표현 능력, 문제를 해결한 방법에 양적 추론이 반영되었는가 여부였다.

2. 연구 절차

본 연구는 양적 추론의 특성을 연구하는 것에 목표를 두었으므로, 관련 특성을 지닌 것으로 보이는 사례에 초점을 두고 연구하는 사례 연구 방법을 따른다. 6학년 한 학급을 대상으로 문장제로 구성된 검사지를 해결하게 한 후, 검사지 분석을 통해 3명의 학생을 선정하여 검사지를 바탕으로 임상 면담을 실시하였다. 양적 추론은 학생들의 문제 해결의 바탕이 되는 사고 과정으로, 그 특징을 조사하기 위해서는 임상면담이 필수적이다.

본 연구에서 사용한 문제는 Smith와 Thompson (2008)의 연구를 참고하여 우리나라 초등학교 6학년 학생들에게 적합한 형태로 재구성한 것이다. 각각의 문제는 나이, 몸무게, 속력과 그 양들의 관계인 차와 비를 포함한다(<표 Ⅲ-1>).

3. 자료 수집 및 분석

이 연구에 사용한 자료로는 검사지 해결 과정, 임상 면담을 위해 사용한 활동지, 면담 내용을 녹화하고 전사한 자료, 연구자의 현장 기록물이 있다. 최종 면담 대상 학생들의 반응을 문제 해결 과정에서의 양적 추론의 유형, 양적 추론의 표현에 대한 범주에 따라 분류하여 분석하였다. 선행 연구를 통하여 파악된 양적 추론을 포함한 문제 해결 과정 중 학생들의 반응에서 관찰된 과정은 양 관계 파악하기, 새로운 양 만들기, 새로운 양과의 관계 파악하기 과정이다. 각 과정에서 학생이 사용한 양적 추론의 유형은 무엇인지, 그 양적 추론의 양상은 어떠한지 세부 분석하였다(표 Ⅳ-1).

<표 Ⅲ-1> 문제 상황

상 황	문 제
나이	1. 승헌의 동생은 승헌보다 3살 어리고, 아빠는 승헌보다 27살이 많다. 승헌과 엄마 나이의 합은 동생과 아빠의 나이의 합과 같다. 1) 승헌이 가족의 나이 사이의 관계를 설명하시오.(중략) 4) 아빠 나이가 동생 나이의 6배가 될 때, 승헌이 가족의 나이는?
몸무게	2. 다이어트를 하고 있는 두 친구의 대화입니다. 태환 : 난 몸무게의 1/8을 뺐어. 그러니까 7kg이 빠진 거지. 미란 : 난 몸무게의 1/6을 뺐는데, 네가 나보다 1kg이 적게 나가네. 미란이의 처음 몸무게는 얼마입니까?
속력	3. 내가 집에서 학교까지 걸어가는 데 30분이 걸린다. 내 동생은 60분이 걸린다. 내 동생이 나보다 6분 빨리 출발하였다면 몇 분 후에 동생을 앞지를 수 있을까?

사례 연구의 타당성을 높이기 위해 분석 사례에 대해 풍부하고 상세히 기술하고자 하였으며, 분석 주체를 연구자, 보조교사 3인으로 하였다. 또, 분석 결과는 제 3의 수학교육 전문가에게 검증을 받았다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 해결과정에서의 양적 추론의 유형

양적 추론의 특성은 <표 Ⅳ-1>과 같이 문제를 해결하는 과정에 따라 나타나는 추론의 유형으로 범주화하여 분석하였다. 표에서 볼 수 있듯이, 학생들이 사용하는 양적 추론의 유형은 차이 추론과 곱 추론이며, 몸무게 문제의 해결 과정에서는 추론 유형이 같은 순서로 사용되었으나, 나이와 속력 문제 해결 과정에서는 다른 순서로 추론의 유형을 사용하였다. 사용한 추론의 순서에 따라 매우 다른 해결과정의 특성이 나타났다. 양적 추론의 유형을 파악하는 것에 그치지 않고, 양과 그 양들 사이의 관계에 대해 추론하는 과정을 면밀히 분석하고, 문제 해결 과정에서 이러한 양적 추론이 어떤 역할을 하고 전략과 어떻게 관련되는지 분석하였다.

가. 나이문제 해결과정에서 나타난 양적 추론

나이 문제의 특징은 구체적인 나이 값은 제시하지 않고, 가족 사이의 나이의 차의 관계와 아빠와 동생 나이의 곱의 관계만을 제시하였다는 점이다. 세 학생의 해결 과정에서 나타난 양적 추론 패턴은 서로 달랐다.

1) 양의 새로운 관계 파악에서의 차이 추론

B학생과 C학생은 모두 예상하고 확인하기 전략을 사용하여 문제를 해결하였다 그러나, 주목한 양과 관계는 서로 다르며, 새로운 관계를 파악하는 정도도 서로 달랐다.

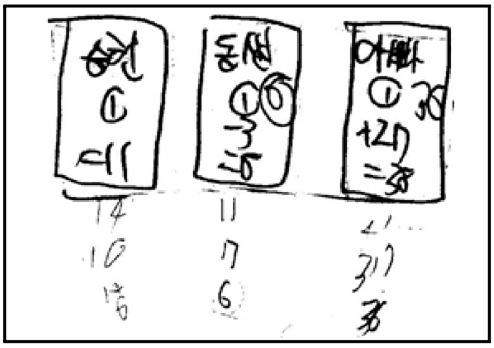
B학생은 [그림 Ⅳ-1]에서 볼 수 있듯이, 문제에 제시된 관계 그대로 '승헌의 나이'를 생각하고, 그것을 기준으로 가족의 나이를 예상하였다. '승헌의 나이'는 11 → 14 → 10 → 9의 순서를 따라 예상되었다. 다음으로 '아빠와 동생의 나이'의 곱 관계를 사용하여 '동생 나이'의 6배가 '아빠의 나이'가 되는지 확인하였다.

B학생의 문제 해결 과정의 특징은 문제에서 제시된 가족 나이의 차이 관계를 파악하고 그 관계를 사용하여 예상한다는 점이며, 곱의 관계를 사용하여 확인한다는 점이다.

<표 Ⅳ-1> 해결 과정에서 나타난 양적 추론의 유형

문제 상황	나이			몸무게			속력		
학생 / 문제 해결 과정	A	B	C	A	B	C	A	B	C
양의 새로운 관계 파악	○ ◉		○	◉	◉	◉	◉	◉	◉
새로운 양 만들기	◉	○	◉	○	○	○	○	○	
새로운 양과의 관계 파악	◉	◉	○	◉	◉	◉	◉	○	

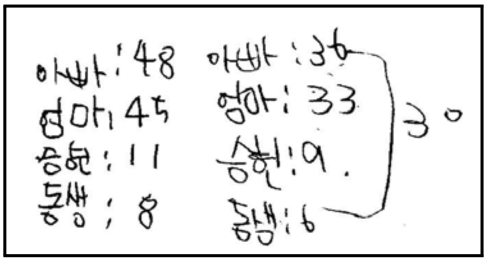
(차이 추론 : ○, 곱 추론 : ◉)



[그림 Ⅳ-1] B학생의 검사지

'승헌 나이'를 선택할 때 무작위로 선택하지 않고, '아빠와 동생 나이'의 곱 관계를 인식하면서 '승헌의 나이'를 조절하여 선택하고 있음을 알 수 있다. 문제에 제시된 나이 사이의 관계를 바탕으로 새로운 관계를 추론하지는 않았다.

C학생 또한 [그림 Ⅳ-2]에서 볼 수 있듯이, 예상하고 확인하기 전략을 사용하였다. 그러나 B학생과는 달리 '동생과 아빠의 나이'의 곱 관계를 사용하여 예상하고, '아빠와 동생의 나이'의 차이 관계로 확인하였다.



[그림 Ⅳ-2] C학생의 검사지

C학생의 해결과정에서 B학생과 구별되는 특징은 예상하는데 차의 관계 대신 곱의 관계를, 확인하는데 곱의 관계 대신 차의 관계를 사용하였다는 것 이외에도 '새로운 나이의 관계'를 파악하고 있다는 것이다. C학생은 문제에서 제시된 가족 나이의 차이 관계를 파악하여, '동생과 아빠의 나이' 사이의 차이 관계를 추론하였다.

> C학생 : 아빠랑 동생이랑 30살 차이가 나잖아요. 아빠와 동생의 나이만 나오면 그 다음의 나이는 쉬워지는 것 같아요. 30살 차이가 나는 6의 배수를 만들어야 하잖아요. 나머지는 가면 갈수록 서른 살 차이가 크게 나니까.

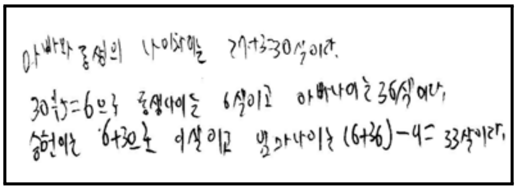
C학생의 문제 해결 과정에 대한 설명은 C학생이 새로운 관계를 파악하여 문제 해결에 사용하였음을 나타낸다. 그리고 더 나아가 예상하는데 '30살 차이가 나는 6의 배수'로 한정하면서 예상하는 경우의 수를 효과적으로 줄이고, '동생과 아빠의 나이'의 차이 관계와 곱의 관계에만 초점을 둠으로써 B학생보다 더 단순한 방법으로 해결하는 것을 확인할 수 있다.

B학생과 C학생은 모두 예상하고 확인하기 전략을 사용하고 있으나, 그 전략의 사용과정에서 효율성의 차이를 보였다. C학생이 문제에 제시된 관계를 바탕으로 새로운 관계를 추론하고 이를 통해 더 효과적으로 '동생과 아빠의 나이'를 예상하고 확인한 반면, B학생은 문제에 제시된 관계를 바탕으로 새로운 관계를 추론해내지 못하고 있다. 그래서 가족의 나이를 예상하기 위해 항상 '승헌 나이'를 기준으로 시작하는 절차를 반복하였다. 이는 문제를 해결할 때에 어떠한 전략이 사용되어야 하는가에 앞서 양적인 관계를 파악하는 것이 중요하다는 것을 보여주는 경험적 근거가 된다.

2) 새로운 양 만들기에서의 곱 추론

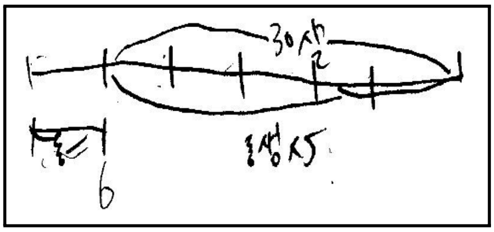
A학생은 B학생과 C학생이 해결한 '예상하고 확인하기 전략'을 사용하지 않고, [그림 Ⅳ-3]과

같이 문제에 제시된 나이 사이의 관계를 바탕으로 새로운 관계를 추론하여 문제를 해결하는 대안적인 전략을 나타냈다. 이 전략은 교육과정에서 지도되고 있지 않는 학생이 창안한 해결 전략이라는 점에서 대안적 해결 전략이다.



[그림 Ⅳ-3] A학생의 검사지

A학생의 해결과정을 [그림 Ⅳ-3]을 통해 분석하면, 먼저 문제에 제시된 가족 나이의 차이 관계를 파악하여 ‘아빠와 동생 나이’의 새로운 차이 관계를 추론하였다. 그런 다음 그 차를 5로 나누어 동생 나이를 구하였다.



[그림 Ⅳ-4] A학생의 활동지

면담자는 학생에게 ’아빠와 동생의 나이의 차‘인 30을 왜 5로 나눈 값이 ’동생 나이‘가 되는지를 물었다. A학생은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 수직선을 표현하면서, 설명하였다. A학생이 표현한 수직선은 ’동생 나이‘의 5배가 ’동생과 아빠 나이‘의 차인 30이 된다는 것을 직관적으로 보여주고 있다. 학생의 양 사이의 관계에 대한 설명은 ’30÷5‘라는 산술적 계산이 왜 가능한지에 대한 정당화를 제공하고 있다.

‘동생과 아빠 나이’의 차가 ‘동생 나이’의 5배라는 새로운 곱의 관계의 추론은 ‘동생 나이’를 단위로 한 곱셈적 사고를 바탕으로 하고 있다. ‘동생 나이’를 단위로 ‘아빠 나이’를 나타내고, 이를 통해 ‘동생 나이’를 단위로 ‘아빠와 동생 나이’의 차를 나타내고 있다. 문제에서 제시되지 않은 양인 ‘동생 나이’를 단위로 새로운 관계를 파악하고 있는 것은 미지의 값을 아는 값으로 다루는 대수적 사고의 특성과 유사하다.

A학생의 문제 해결 과정에 따라 단계로 나누어 분석하고 이를 대수적인 방법으로 표현하면 <표 Ⅳ-2>와 같다. 표에서 볼 수 있듯이, A학생의 사고와 문제 해결 과정은 대수적인 방법으로 표현이 가능하다. 이것은 A학생의 양적 추론을 포함한 해결전략이 대수적 해결 전략이 갖는 수준의 일반성을 가질 수 있음을 보여준다. 그리고 양 사이의 관계에 대한 추론을 바

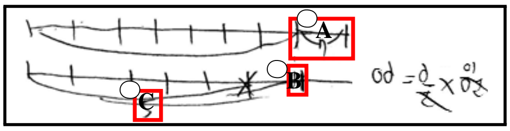
<표 Ⅳ-2> A학생의 양적 추론과 대수적 절차

단 계	양적 추론	대수적 절차
새로운 관계 파악 1	‘동생과 아빠 나이의 차’는 30살 (새로운 차이 관계)	동생 나이 x, 아빠 나이 y라 하면, y-x=30
새로운 관계 파악 2	‘아빠 나이’는 ‘동생 나이’의 6배이므로, ‘아빠와 동생 나이의 차’는 ‘동생 나이’의 5배(새로운 곱 관계)	y-x = 6x-x = 5x
파악된 관계 연결	‘동생 나이’의 5배는 30살	5x = 30
새로운 양 만들기	동생의 나이는 6살	x = 6

탕으로 한 해결과정과 그에 대한 설명은 대수적 절차의 내용이 되고 있다.

지금까지 세 학생의 해결과정에서 나타나는 양적 추론의 유형과 학생들이 사용하고 있는 전략과 관련지어 분석해 보았다. B와 C학생의 사례를 통해, 같은 전략이라도 양적 추론의 과정이 다를 수 있으며, 그로 인해 해결전략의 효율성에 미치는 영향을 분석하였다. 전략이 무엇인가보다 양 사이의 어떠한 관계에 주목하며, 어떠한 새로운 관계를 추론하고 있느냐가 중요하다는 것을 알 수 있다.

A학생의 사례는 문제에 제시된 양 사이의 관계를 바탕으로 새로운 관계를 추론하는 것이 문제 해결에서 중요한 역할을 한다는 것을 보여준다. 양 사이의 새로운 관계 추론을 중심으로 세 학생을 비교하면, B학생은 어떠한 새로운 관계도 추론하지 못하였고, C학생은 하나의 새로운 차이 관계를 추론하였다. 이에 비해 A학생은 새로운 차이 관계와 곱의 관계를 추론하였고, 이러한 추론은 예상하는 과정 없이 직접 값을 구하는 식을 세우게 하는 역할을 하였다.



[그림 Ⅳ-5] A학생의 검사지

양적 추론은 해결 전략이 무엇이건 간에 문제 상황에 포함된 양과 그 관계를 파악하고, 이를 통해 새로운 관계를 추론하여 문제를 해결하는 과정의 바탕이 된다. 문제 상황에 포함된 양과 그 관계에 대해 추론해내는 것이 많을수록 문제를 더욱 효율적으로 해결할 수 있으며, 다양한 해결 방법을 찾아낼 수 있다는 것을 알 수 있다. 그리고 양 사이의 관계에 대한 추론과 설명은 산술적 계산 절차를 정당화하며, 대수적 절차가 갖는 일반성을 경험하게 하는 역할을 하였다.

나. 몸무게 문제에서의 양적 추론

몸무게 문제를 해결하는 학생들의 절차는 모두 같으나, 문제를 해결하기 위해 사용한 시각적 표현에서는 차이를 보였다. A와 B학생은 수직선을 사용하였고, C학생은 넓이 모델을 사용하여 해결하였다. 양적 추론 과정에서 나타난 표현 분석의 결과는 다음 절에 제시하였으며, 본 절에서는 해결 과정에서 사용한 양적 추론의 유형의 특징을 분석하였다. 세 명의 학생이 모두 같으므로, A학생의 사례를 중심으로 분석 결과를 정리하였다.

A학생은 [그림 Ⅳ-5]와 같이 수직선으로 표현하여 문제를 해결하였다. 수직선은 A학생이 문제를 해결하기 위해 양 사이의 관계를 추론하는 과정에서 중요한 역할을 한 것으로 보인다. 양 사이의 관계에 대한 추론의 과정을 설명하면 다음과 같다.

먼저, A학생은 ‘태환이가 다이어트 한 몸무게’는 7kg이고, 그것이 전 몸무게의 1/8임을 인식하였다. 1/8이 7kg을 의미하는 것을 [그림 Ⅳ-5]와 같이 표현하고 수직선의 나머지 부분, 7/8이 ‘태환의 다이어트 후의 몸무게’를 표현한다. 이를 바탕으로 ‘태환의 다이어트 후의 몸무게’는 7kg의 7배라는 새로운 곱의 관계를 파악하였다.

‘태환의 다이어트 후의 몸무게’는 ‘미란의 다이어트 후의 몸무게’보다 ‘1kg 적다’라는 차이 관계를 통해, 쉽게 ‘미란이의 다이어트 후의 몸무게’가 50kg임을 알게 된다. ‘미란이의 다이어트 후의 몸무게’를 구하는 과정에서는 새로운 양 사이의 관계를 파악하는 과정이 필요하지 않다. 그런데 많은 학생들이 ‘적다’라는 양의 비교 표현을 잘못 이해하거나 주의하지 않아

덧셈이 아니라 뺄셈을 한다.

다음 단계는 ‘미란이의 다이어트 한 몸무게’가 ‘다이어트 전 몸무게’의 1/6이라는 관계를 파악하여 ’미란이의 다이어트 후 몸무게’와 ‘다이어트 전 몸무게’와의 새로운 곱의 관계를 파악하는 것이다. A학생은 ‘다이어트 전 몸무게’의 5/6가 ‘다이어트 후의 몸무게’라는 새로운 관계를 파악하여 문제를 해결한다.

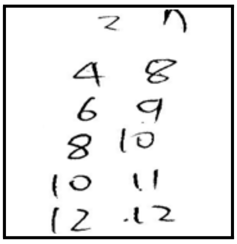
이 문제는 몸무게(kg)와 몸무게 사이의 비로 전체와 부분의 관계를 나타내는 양이 포함되어 있다. 그러므로 단위에 대한 사고가 부족한 학생들에게는 꽤 도전적이다. 양 사이의 관계가 매우 명료한 구조로 제시되어 있지만, 학생들이 그 관계에서 새로운 관계를 파악하는 데 많은 인지적 어려움을 겪는다. 그러나 세 학생 모두 효과적인 시각적 표현을 사용하여 문제해결에 필요한 양 사이의 새로운 관계를 정확하게 추론하였다.

다. 속력 문제에서의 양적 추론

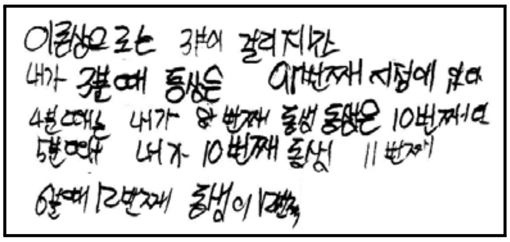
A학생과 B학생은 문제를 해결하는 과정에서 전략의 변화를 보여주었다. 처음에 예상과 확인하기 전략을 사용하여 문제를 해결하였고, 문제해결을 설명하는 과정에서는 시간, 거리, 속력 사이의 관계를 통해 대안적인 전략을 사용하여 해결하였다. 그리고 C학생은 문제 상황의 맥락에서 벗어나 수치적으로 계산하는데 그쳐 문제해결에 실패하였다. 먼저 예상하고 확인하기 전략으로 해결하는 과정에서 A와 B학생의 양적 추론의 특징을 분석한 다음, 대안적인 해결과정에서의 양적 추론의 특징을 분석하였다.

1) 새로운 관계 파악에서의 곱 추론

A학생은 검사지에 [그림 Ⅳ-6]와 같이 기록하고 6분이라는 답을 얻는다. 그리고 B학생도 [그림 Ⅳ-7]과 같이 말로 설명하는 형태이지만 예상하고 확인하기 절차로 해결한다. A학생과 B학생의 기록 형태는 매우 다르지만 같은 절차를 따르고 있다.



[그림 Ⅳ-6]



[그림 Ⅳ-7] B학생의 검사지

특이한 점은 A와 B학생은 동생이 1분 동안 가는 거리를 ‘1’이라고 지정하였다는 점이다. 임시값을 ‘1’로 하여 해결하는 것은 바빌로니아 대수의 해결 과정에서 찾아 볼 수 있다. ‘나의 속력’은 ‘동생의 속력’의 2배이므로 1분 동안 ‘나’가 가는 거리는 2가 된다. 학생들은 문제에 제시된 나와 동생이 같은 거리를 가는 데 걸리는 시간의 관계 파악을 통해, ‘나의 속력’이 ‘동생의 속력’의 2배라는 새로운 관계를 추론하였다. 학생들의 이러한 추론은 학생들이 같은 거리를 움직이는 데 걸리는 시간과 속력의 관계를 이해하고 있다는 것을 보여준다.

2) 속력의 차이 추론과 곱 추론

A학생은 문제 해결 과정을 다음과 같이 설명한다.

A학생 : 나는 집에서 학교까지 30분이 걸려요. 동생은 60분이 걸리잖아요. 그러니까 내 속력은 1분에 30분의 1을 가고 동생은 60분의 1이잖아요. 그러니까 동생은 나보다 6분 빨리 갔으니까 60분의 6이잖아요. 그리고 나는 그 때서야 출발하니까 1분 후에는 나는 60분의 2를 가고 동생은 60분의 7을 가잖아요. 계속가다 보면 둘의 차는요. 원래 둘의 차는요. 6빼기 0이니까 6이잖아요. 그리고 둘의 차는 1이니까, 나누면 6분이에요.

학생의 설명은 검사지에 기록한 것과 다른 점이 있다. 먼저 1분 동안 가는 거리를 '나'는 1/30, '동생'은 1/60이라고 설명한다. 집에서 학교까지의 거리를 '1'로 정한 것이다. A학생은 공통으로 들어가는 분모 60을 생략하여 기록하였다.

A학생은 설명의 마지막에 '차'를 언급하였다. "동생과 나의 차가 6이고 1이므로, 6을 1로 나누면 6이 된다"고 설명하였다. 면담자는 학생이 의미하는 '차'가 무엇인지 명확히 하도록 설명을 요구하였다. 다음의 발췌문은 학생이 '차'가 의미하는 것을 설명한 것이다.

면담자 : 둘의 차라는 게 무슨 말이지?

A학생 : 동생이 가고 6분후에 출발하는 나는 60분의 0밖에 못가고요. 동생은 6을 갔으니까 6빼기 0은 그니까 둘의 차는 6이잖아요. 속력의 차는 60분의 2 빼기 60분의 1로 1이잖아요. 나누니까 6분이에요.

면담자 : 만약에 내가 학교까지 가는데 20분이 걸린다고 수정하면 어떻게 될까?

A학생 : 20분이라고 수정해도요 그러면요 나는 속력이 20분의 1로 변하겠죠. 60분의 3이니까 이거 차는 얘는 먼저 6이 가고 다만 둘의 속력의 차는 2잖아요 그니까 3분만에 따르겠죠.

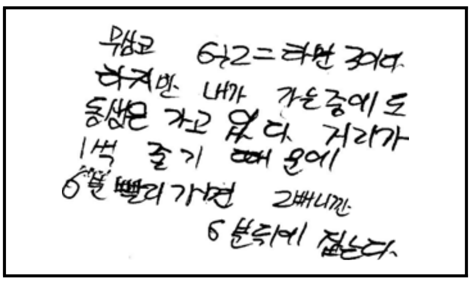
면담자 : 이런 규칙은 모든 속력 문제에서 사용할 수 있나?

A학생 : 네, 모든 속력 문제에서 길이(거리)의 차와 속력의 차를 알면 풀 수 있어요. 거리의 차를 속력의 차로 나누면 금방 알 수 있어요.

A학생은 차의 의미를 '동생과 나 사이의 거리의 차'와 '동생과 나 사이의 속력의 차'로 설명하였다. 설명하는 과정에서 분모 60을 계속 생략한 것은, 거리의 차와 속력의 차에서 분모가 공통이라는 것을 인식했기 때문으로 보인다. A학생의 대안적인 해결과정에서 주목할 점은 A학생이 '동생과 나 사이의 거리'의 차와 '속력'의 차에 주목하고 있다는 것이다. 처음 예상하고 확인하기 과정으로 해결할 때와 양 사이의 관계를 바라보는 관점이 달라진 것이다.

면담자는 학생이 문제의 조건이 달라졌을 때에도 그 방법을 사용할 수 있는지를 알아보기 위해, '나'의 속력을 다르게 제시하여 보았다. 학생은 '나'와 '동생' 사이의 거리는 같고, 속력의 차가 2/60로 달라졌으므로 3분이면 만날 수 있다고 설명하였다. 그리고 학생은 "모든 속력 문제에서 거리의 차와 속력의 차를 알면 풀 수 있어요"라고 설명하였다.

B학생도 풀이 과정에 대해 [그림 Ⅳ-8]과 같이 덧붙여 설명하였다. 문제 상황을 실제 움직이고 있는 것처럼 설명하고 있다. 학생은 '나'의 속력이 '동생'의 속력의 2배이지만 둘 사이의 거리는 1씩 줄어든다고 설명하였다.



[그림 Ⅳ-8] B학생의 검사지

B학생은 앞의 해결 과정에서 지정한 1분 동안 동생이 간 거리 ‘1’을 사용하여, 1분 동안 동생과 ‘나’ 사이의 거리가 1씩 줄어든다고 추론하였다. A학생처럼 거리의 변화에 주목할 때, 동시에 움직이는 거리에서, 동생과 ‘나’ 사이 거리의 변화로 관심을 바꾸었다. 그러나 B학생은 A학생처럼 속력과 거리, 시간의 관계에 대한 명확한 설명을 하지는 못하였다.

A와 B학생의 대안적인 해결과정에서의 양적 추론의 특징은, 먼저 양 사이의 관계를 바라보는 관점이 바뀌었다는 것이다. A학생의 ‘속력의 차’에 대한 언급은 A학생이 속력이 뺄셈과 덧셈이 가능한 양이라는 것을 인식하고 있다는 것을 알 수 있다. 그리고 문제에서 제시되지 않은 ‘학교에서 집까지의 거리’를 ‘1’로 생각하여 해결하고 있는 것은 미지의 값을 임시값 ‘1’로 정하는 대수적 사고의 특성을 보여준다.

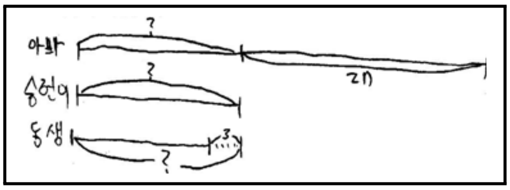
A학생의 추론 과정은 꽤 정교하다. 시간, 속도 그리고 거리가 어떻게 관련되어있는지를 알고 있으며, 그 관계가 문제를 해결하기위해 어떻게 사용될 수 있는지를 이해하고 있다. 학생의 이러한 추론은 다른 속력 상황의 문제에도 적용될 수 있는 일반성을 갖고 있다. 하지만 B학생은 동생과 ‘나’사이의 거리가 줄어드는 속도에 관심을 가졌지만, 동생과 ‘나’ 사이의 거리와의 관계를 추론하지는 못하였다. 위 학생의 사례들은 문제 상황에 포함된 양 사이의 관계를 다양한 관점에서 바라보고 추론하도록 자극하는 것이 문제 해결력을 키우는데 도움이 됨을 보여준다.

2. 양적 추론 표현의 분석

가. 시각적 표현 : 새로운 관계 파악의 도구

학생들은 문장제를 해결하는 과정에서 문제에서 제시된 양과 그 양사이의 관계를 파악하고 새로운 관계를 추론할 때, 시각적 표현을 사용하였다. A와 B학생은 시각적 표현 중 수직선을 사용하였으며, C학생은 넓이 모델을 사용하였다.

A학생은 문제에 제시된 관계를 그대로 수직선으로 표현하였다. A학생의 수직선 표현의 특징은 ‘모르는 값을 표현하고 있다는 것이다. 수직선의 눈금에 수 값을 지정하지 않았기 때문에 가능한 것이다. 구체적인 수 값을 표현한 것이 아닌 양 사이의 관계를 표현하기 위해 수직선을 사용하였다.

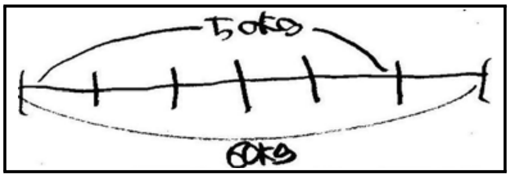


[그림 Ⅳ-9] A학생의 시각적 표현

B학생은 [그림 Ⅳ-10]과 같이 ‘미란이의 다이어트 후 몸무게’ 50kg을 수직선으로 나타내었다. 학생은 ‘미란이의 다이어트 한 몸무게’와 ‘다이어트 전 몸무게’의 1/6이라는 관계를 바탕으로, ‘미란이의 다이어트 후 몸무게’를 수직선에 표현하기 위해 전체 ‘다이어트 전 몸무게’를 6등분하고 그 중 5등분이 ‘다이어트 후의 몸무게’인 50kg임을 표시하였다. ‘다이어트 후의 몸무게’가 ‘다이어트 한 몸무게’의 5배라는 새로운 관계를 파악한 것이다.

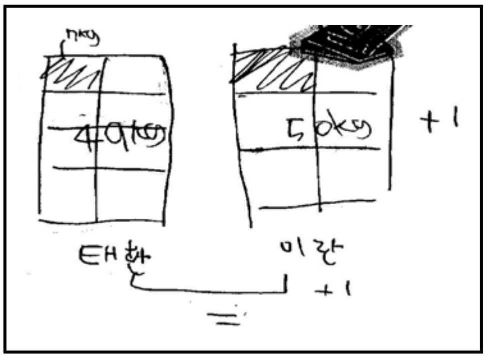
새로운 관계 파악을 바탕으로 B학생은 ‘다이어트 한 몸무게’의 5배가 50kg이므로, ‘다이어트 한 몸무게’는 10kg이며, ‘다이어트 전의 몸무게’는 60kg이라고 계산한다. 이 계산 과정에서 수직선 표현은 새로운 양을 쉽게 만들 수 있는 바탕이 되었다. 학생들은 분수의 나눗셈

을 어려워하여 이 문제를 해결하는데 실패하는 경우가 많다. B학생은 양 사이의 관계를 사용하여 문제를 해결하고 있어, 분수의 나눗셈을 계산하는 과정 없이 이 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-10] B학생의 시각적 표현

C학생은 [그림 Ⅳ-11]과 같이 수직선이 아닌 넓이 모델을 사용하였다. '태환의 다이어트 한 몸무게'가 '다이어트 전 몸무게'의 1/8이라는 관계를 표현하기 위해, 직사각형을 8등분하고 그 중 한 칸을 색칠하여 7kg임을 표시하였다. 이 표현은 문제에 기술된 양 사이의 관계를 표현한 것이다. 이 표현을 바탕으로 '다이어트 한 몸무게'의 7배가 다이어트 후의 몸무게라는 새로운 관계를 파악하였다. 이 관계를 사용하여 7kg에 7을 곱하여 새로운 양을 만들어냈다.



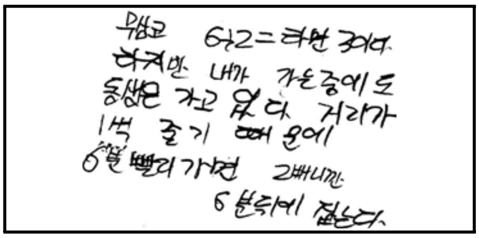
[그림 Ⅳ-11] C학생의 시각적 표현

문제 해결 과정에서 학생의 시각적 표현은 문제에 제시된 관계를 표현하고, 그 표현을 바탕으로 새로운 관계를 추론하는데 유용하게 사용하였다. 학생들이 사용한 시각적 표현은 수직선 표현과 넓이 모델 표현이었다. 특히 수직선 표현은 전체와 부분의 비 관계와 차이 관계를 표현하는 데 유용하였다. 게다가 시각적 표현은 새로운 양을 만들어내는 계산절차에 대한 직관적인 통찰의 근원이 된다.

나. 언어적 표현 : 상황 파악의 도구

학생들은 일상용어를 사용하여 문제를 해결하고 이해하기도 하는데, 이를 언어적 표현으로 보고 분석하였다. 일상용어의 사용은 문제 상황과 경험한 것을 연결 짓고, 맥락을 더욱 분명히 파악하게 하여 문제 상황에서 양들 사이의 관계를 대해 더욱 정교하게 파악할 수 있게 한다.

B학생은 '동생과 나의 속력의 비'가 2배이지만, 동생과 나 사이의 거리는 2배의 속도로 줄어들지 않음을 추론하였다([그림 Ⅳ-12]). 내 속도가 동생의 속도보다 2배 빠르지만 "내가 가는 동안 동생도 가고 있기 때문에, 동생과 나 사이의 거리는 1씩 줄어든다."고 설명하였다. 일어나고 있는 문제 상황을 자신의 일상용어로 설명하면서 문제 상황 맥락을 더욱 정확히 인식하고 있다. 이는 양들 사이의 관계를 정확하게 파악하는 데 바탕이 된다.



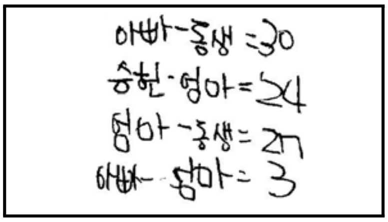
[그림 Ⅳ-12] B학생의 언어적 표현

다. 기호적 표현 : 일반화의 도구

학생들은 계산식을 세우기 위해 기호적인 표

현을 사용하며, 또 일반적인 관계를 표현할 때 에도 사용한다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-13]에서 볼 수 있는 것처럼, C학생은 동생과 아빠, 엄마와 승헌의 나이 사이의 관계를 수식 형태로 표현하고 있다. 양 사이의 관계를 기술할 때 문제 상황에 포함된 양을 대표하는 이름을 학생 임의로 정하여 사용하고 있다.

관례적인 문자 기호를 사용하지 않았지만, 학생의 기호적 표현에서 중요한 점은 각 가족의 나이가 변하더라도 그 차는 일정하다는 관계를 기호로 표현하였다는 점이다. 학생들은 구체적인 각 사람의 나이가 변한다는 것을 알고 있으므로 학생들이 사용한 사람의 이름을 변수로 인식하고 있다고 볼 수 있다. 하나의 문자가 다양한 값을 취할 수 있다는 것을 인식하는 것은 대수에서 중요한 사고측면이다.



[그림 Ⅳ-13] C학생의 기호적 표현

학생들의 기호적 표현은 대수 문자 기호를 사용하고 있지 않다. 하지만 여기서 중요한 것은 학생이 일반화한 관계를, 합의한 바는 아니지만, 나름의 기호를 사용하여 표현하고 있다는 것이다. 이러한 활동은 초기 대수에서 초점으로 다루어지고 있는 활동이다. 비록 처음에 조잡하고, 다른 사람들과 관례적으로 합의되지 않은, 나름대로 발명한 기호를 가지고 관계를 표현하였지만, 학급 전체의 논의와 조정을 거치면서 점차 정교한 기호를 사용할 수 있게 될 것이다. 초기 대수에서는 일반적인 관계를 어떻게든 표현하는 것을 중시한다.

문제 해결 과정에서 학생들이 가장 많이 사용한 표현은 시각적 표현이다. 그리고 시각적 표현은 문제에서 기술된 양들 사이의 관계를 표현하고, 그 표현된 것을 바탕으로 다시 새로운 관계를 파악할 수 있게 하는 역할을 한다. 더욱이 직관적으로 수치적 계산이 왜 가능한지를 인식하게 한다. 학생들은 언어적인 표현을 문제 상황의 맥락을 더욱 정확하게 이해하기위해 사용하고, 기호적 표현은 일반화 한 관계를 표현할 때 사용한다. 기호적 표현은 완벽한 기호화는 아니지만 학생들이 일반화 한 관계를 표현하고 있다는 것 자체로 대수적 추론의 시작으로 볼 수 있다.

Ⅴ. 논 의

본 연구의 목적은 문제 해결 과정에서 나타나는 6학년 학생들의 양적 추론의 특징을 파악하는 것으로, 학생들이 문제 해결 과정에서 사용하는 양적 추론의 유형은 어떠한지, 양적 추론의 표현은 어떠한지를 분석하였다. 다음과 같은 결과를 바탕으로 초등 수학 학습에 주는 시사점을 논의하고자 한다.

첫째, 학생들의 문제 해결과정에서 나타난 양적 추론의 유형은 양 사이의 차이 관계와 곱의 관계를 파악하는 추론이다. 학생들은 차의 관계에 대한 추론은 쉽게 하는 반면에 곱의 관계를 추론하는 데에는 한계를 보였다. 곱의 관계를 추론하는 데는 단위를 자유롭게 구성하는 능력이 요구된다. A학생이 문제 상황에 따라 적절한 단위를 매우 유연하게 구성하는데 반해, B와 C학생은 단위를 유연하게 구성하는데 한계를 나타내고 있다.

Dougherty(2008)는 측정활동으로 양을 비교하

는 활동은 하나의 양을 단위로 다른 양을 비교하는 활동까지 확대해 갈 수 있으며 이것은 자유롭게 단위를 구성하는 활동의 기회를 제공함을 보여주었다. 더 나아가 초기 학년에 측정 활동을 통한 양의 비교에 초점을 두는 것이 후속의 산술과 대수의 학습에 도움이 됨을 주장하였다. 어린 학년에서 점차적으로 양들 사이의 차이 관계와 곱의 관계를 추론하는 기회를 갖도록 지원하는 것이 필요하다.

둘째, 차이 추론과 곱 추론은 문제 해결 과정에서 학생들에 따라 다른 양상으로 나타났다. 나이 문제에서 B학생이 문제에 제시된 차와 곱의 관계만을 사용하고 있는 반면에, C학생은 차이 추론을 통해 양 사이의 새로운 관계를 파악하였고, A학생은 차이 추론과 곱 추론을 사용하여 새로운 관계 파악하고 새로운 양을 만들어 더욱 효율적인 문제 해결 과정을 보여주었다. 문제 해결 방법을 찾기 위해서는 문제에 제시된 양과 그 사이의 관계를 파악하는 활동이 중요하다는 것을 알 수 있다. 그러나 학습 지도 현장에서는 문제에 제시된 양과 양들 사이의 관계를 파악하는 데 초점을 두기 보다는 전략의 사용에 초점을 두어 지도 되고 있는 실정이다.

문제 해결력 신장을 위해서는 “학생 스스로의 다양한 사고 활동이나 사고 실험을 요구하는 것으로 단편적인 전략의 사용만이 아닌 이미 학습된 내용을 종합적으로 활용하여 주어진 문제 상황을 해결하기 위하여 자신만의 독창적 사고를 구성하고 훈련할 수 있는 기회를 제공” 하는 것이 중요하다(교육부, 1998, p.83). 문제 해결 전략의 지도에 앞서 양과 양들 사이의 관계에 초점을 두고 다양한 양들 사이의 관계에 대해 추론하는 활동은 문제 해결력 시장에 도움이 될 것이다.

셋째, 면담 대상자인 3명의 학생은 모두 면담에 참여하지 않은 학생들과 달리 수직선과 같은 시각적 표현을 적극적으로 사용하였다. 학생들의 시각적 표현은 학생들이 양적 추론하는 과정에 많은 도움을 주고 있는 것으로 분석되었다. 문제 상황에 제시된 양 사이의 관계를 표현하고, 그것을 바탕으로 새로운 양 사이의 관계를 찾고, 그 관계를 통해 새로운 양을 만드는 적절한 연산을 수행하는데 수직선을 사용하였다. 시각적 표현은 양들 사이의 관계를 표현하고 추론하는 데 직관적이면서도, 개념적 이해에 도움이 되고 있다.

Carraher와 Schlimann(2007)은 양적인 사고와 수직선 표상의 사용과 관련된 연구에 주목하였다. 특히 RME의 연구에서 “비어있는 수직선”과 관련된 연구에 주목하였는데, 이 연구는 양을 나타내는 표시를 직접 수행하도록 선분과 점에 값을 정하지 않는다는 것이 유익하다고 제안하였다. 김성준(2003)은 초등학교 교과서의 문제 해결 전략 중 ‘그림 그리기’전략은 수를 하나의 양으로 표현하면서 대상으로 파악하고 이해하는데 도움이 된다고 설명하였다. 이렇듯 산술을 양의 산술로 이해하고 양을 개념적으로 파악하여 양을 가지고 관계를 추론하는데 도움이 될 수 있는 효과적인 시각적 표현들을 지도하는 방안에 대한 논의가 필요하다.

넷째, 양적 추론을 포함한 해결과정을 해결 전략 측면에서 분석한 결과, A학생은 B와 C학생의 해결 전략과 다른 대안적인 전략의 특성을 보여주었다. B와 C학생은 교육과정에서 지도되는 ‘예상하고 확인하기’전략을 사용한 반면, A학생은 지도되지 않은 학생 스스로 창안한 대안적인 전략으로 문제를 해결하였다. 그 전략은 ‘예상하고 확인하기’전략이 갖지 않고 있는 대수적 절차와 같은 수준의 일반성을 포함하고 있다는 것이 중요하다.

김성준(2003)은 초등학교 교과서에 제시된

다양한 문제 해결 전략에서 산술과 대수 사이에 간격을 볼 수 있다고 하였다. 또, 산술의 비형식적 추론과 대수의 형식적 추론 사이에는 일반화 측면에서 많은 차이를 보인다고 보았다. 그러므로 산술과 대수 사이의 간격을 줄이기 위해서는, 예상과 확인 전략으로 문제를 해결한 후, 일련의 양적 추론으로 해결하는 기회를 갖게 해야 한다고 주장하였다. '초기 대수'는 이러한 양적 추론을 강조함으로써 산술과 대수 간에 존재하는 간격을 연결하는 것을 목적으로 한다. 본 연구의 학생이 보여준 양적 추론을 포함한 해결 방법이 산술적 추론과 대수적 추론의 간극을 메워줄 수 있는 모습이라고 생각한다. 학생들의 양적 추론을 강화하기 위한 지도 방안에 대한 논의가 앞으로도 계속 이루어져야 한다.

본 연구는 초등학교 6학년 학생 3명을 대상으로 수행되었기에, 일반화하는 데 한계가 있다. 그러나 문제 해결 과정에서 양적 추론의 특성을 세세하게 관찰하고 분석하였기 때문에 양적 추론에 관한 후속 연구에 기초가 되는 경험적 근거자료가 될 수 있다. 무엇보다 문제 해결 과정에서 양적 추론의 유형과 표현이 어떠한지, 양적 추론이 어떠한 역할을 하는지에 대한 세부 자료를 제공하였다는 점에서 의의가 있다. 본 연구를 확장하여 어린 학생의 양적 추론의 특성과 양적 추론의 교수 학습 지도 방안, 교육과정과 관련한 측면에 대한 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

교육부(1998). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과.** 서울: 대한교과서 주식회사.

김성준(2003). '초기 대수'를 중심으로 한 초등 대수 고찰. **수학교육학연구, 13**(3), 309-327.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 박사학위논문.

Boester, T. & Leher, R.(2008). Visualizing Algebraic Reasoning. In Kaput, J., Carraher, D. W. & Blanton, M.(Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.211-234). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W., & Schlimann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.669-706). Charlotte, NC: Information Age.

Dougherty, B.(2008). Measure up: A quantitative view. In Kaput, Carraher & Blanton(Eds.), Algebra in the early grades (pp.389-412). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Gavemeijer, K.(1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177

Kaput, J.(2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. In Kaput, J., Carraher, D. W. & Blanton, M. (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp.5-18). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 443-464.

Lobato, J., & Siebert, D.(2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Mason, J.(2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In Kaput, J., Carraher, D. W. & Blanton, M.(Eds.), Algebra in the Early Grades (pp.57-94). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM(2007). **학교 수학을 위한 원리와 규준.** (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판).

Smith, J. P., & Thompson, P. W.(2008). *Quantative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning.* In Kaput, J., Carraher, D. W. & Blanton, M.(Eds.), Algebra in the early grades (pp.95-132). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Case Study of the Sixth Grade Students' Quantitative Reasoning

Jeon, Hyung Og (Graduate School of KNUE)
Lee, Kyung Hwa (Seoul National University)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

This study analyzed the types of quantitative reasoning and the characteristics of representation in order to figure out the characteristics of quantitative reasoning of the sixth graders. Three students who used quantitative reasoning in solving problems were interviewed in depth. Results showed that the three students used two types of quantitative reasoning, that is difference reasoning and multiplicative reasoning. They used qualitatively different quantitative reasoning, which had a great impact on their problem-solving strategy. Students used symbolic, linguistic and visual representations. Particularly, they used visual representations to represent quantities and relations between quantities included in the problem situation, and to deduce a new relation between quantities. This result implies that visual representation plays a prominent role in quantitative reasoning. This paper included several implications on quantitative reasoning and quantitative approach related to early algebra education.

* Key words : quantitative reasoning(양적 추론), algebraic reasoning(대수적 추론), difference reasoning(차이 추론), multiplicative reasoning(곱 추론)

논문접수: 2009. 1. 12.
논문수정: 2009. 2. 16.
심사완료: 2009. 2. 23.