대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 1, 45-61. Feb 2009

영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결

이 경 화*

유추적 사고는 수학적 발견의 주요 도구로 강조되어 왔다. 그러나 영재아들을 대상으로 한 교육 자료에서 유추적 사고를 활용한 예는 현재까지 많지 않은 편이다. 이 연구에서는 영재아들을 대상으로 한 수업에서 유추적 사고를 적극적으로 강조하였을 때, 학생들이 어떤 반응을 보이며, 실제로 유추적 사고가 이들의 수학적 발견을 어떤 방식으로 돕는지 알아보았다. 고전적인 유추 문제는 유사한 두 대상과 각각의 대상에 대해 성립하는 성질을 비례식과 같은 형태로 제시하고, 네 항목 중 주어진 세 항목을 토대로 한 항목을 찾아내는 것이었다. 이 연구에서는 이를 변형하여, 세 가지 형태의 유추 과제를 제시하였으며, 각각의 유형에 대한 학생들의 반응을 분석하였다. 학생들은 비교적 유연하고 유창하게 유추적 사고를 사용하였으며, 유추적 사고 능력에 따라 수학적 발견에 차이를 보였다. 유추적 사고는 이미 알고 있던 개념을 재해석하고, 새로운 관점으로 변형하게 하는 역할을 하였으며, 새로운 지식의 발견에 도움을 주는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서 론

유추적 사고의 유용성은 많은 수학자들과 수학교육자들에 의해 강조되어왔다 (English, 2004; Polya, 1954, 1962, 1973). 예를 들어, Rota는 수학자들이 마치 모래 위의 발자국을 지우듯이 유추적 사고의 연쇄를 체계적으로 지워나가면서 수학적 발견을 이루어낸다고 보았다 (Kac et al., 1986: ⅸ에서 재인용). Corfield(2003)는 유추가 단지 수학을 발견하는 과정에 사용될 뿐 아니라 발견한 수학적 내용을 정당화하는 데에도 사용될 수 있다고 보았다.

유추에 대한 심리학적 연구에서는 유추적 사고의 메카니즘, 유추적 사고의 선결 요건, 그리고 유추적 사고의 교육 방법 등을 다루었다 (Piaget, 1952; Inhelder & Piaget, 1964; Sternberg, 1977; Gentner, 1989; Goswami, 1989 등). Polya (1954, 1962), Alexander et al. (1997), 그리고 English(2004) 등은 수학교육에서 유추를 어떻게 고려해야 할 것인가를 다루었다. 그러나 수학적 발견 경험을 중시하는 영재교육에서는 아직 유추적 사고의 의미와 역할에 대한 실증적인 자료를 바탕으로 한 연구가 매우 부족하다.

수학 영재교육을 위한 자료가 어떤 조건을 갖추어야 하며, 실제로 다양한 시도에 대한 결과가 어떤 것인가는 최근 이루어진 일련의 연구에서 확인할 수 있다(송상헌, 장혜원, 정영옥, 2006; Lee et al., 2007; Na et al., 2007 등). 이들 연구에서는 영재아들에게 도전적인 문제를 제

* 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

공하여 수학적 사고력을 향상시키는 과정을 확인하고, 특징을 도출하여 교육에 활용하는 것이 중요함을 주장하였다. 일반적으로 영재교육에서 강조해야 할 세 가지 유형의 기회는 다음과 같다: 첫째, 상위 지식을 학습할 기회(Johnson & Sher, 1997); 둘째, 도전적인 수학문제에 접할 기회(Johnson, 1993); 창의적 사고를 발전시키는 기회(Sheffield, 1999). 유추적 사고는 패턴을 발견하여 문제를 해결하게 할 뿐 아니라, 새로운 영역으로 이미 알고 있던 지식을 확장하여 보다 발전시키는 기능을 하므로 이 세 가지 기회를 제공하는 데 적합한 사고 유형으로 추측된다. 이 연구에서는 유추적 사고를 통해 학생들이 이 세 가지 기회를 어떤 방식으로 경험하는지, 유추적 사고를 활용하여 어떤 수학적 발견을 하는지 알아볼 것이다. 이를 통해 영재교육에서 유추적 사고를 활용하는 방안에 대한 시사점을 도출할 것이다.

II. 유추적 사고의 의미와 역할

수학적 사고의 의미와 그 기초에 대한 합의는 이루어지지 않았지만, 수학적 사고 능력의 가장 중요한 요소 중의 하나가 유추라는 것에는 대부분 동의한다(Dreyfus & Eisenberg, 1996). 예를 들어, 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 대수적 구조를 확장하는 형식불역의 원리도 관계구조의 전이인 유추를 바탕으로 한다(이승우 & 우정호, 2002: 525).

Peirce는 유추를 특수한 것(개별자)에서 특수한 것(개별자)으로의 추론으로 설명하고 있으며, 귀납과 가설 또는 연역과 귀납 또는 연역과 가설에 의해 분석할 수 있다고 보았다(Hoopes, 2008: 118). 일반성을 주장하는 명제를 증명할 때, 특정한 대상이 일반적 대상을 대표하고, 특정한 성질이 일반화가능하다는 것을 전제한다. 그러므로 특수한 것에서 특수한 것으로 나아가는 유추는 수학적 사고, 특히 수학적 논증의 기본이 된다고 할 수 있다.

Piaget(1952)는 스키마의 자발적인 작용을 가능하게 하는 것이 유추라고 보았다. 유추에 의해 새로운 스키마 구성이 촉발되며, 스키마를 조절(assimilation)에 의해 변형하는 주된 도구가 곧 유추이다. Inhelder and Piaget(1964)에 의하면, 유추적 사고 또는 유추적 추론을 하는 데에는 두 가지 수준의 관계가 사용된다. 저차적 관계는 서로 매우 가까운 또는 밀접하게 연결되는, 상대적으로 간단한 개념을 의미한다. 고차적 관계는 상대적으로 멀리 떨어져있는 또는 고립된 개념을 의미한다(English, 2004에서 재인용).

Polya(1954)는 유추가 일종의 유사성이라고 보고, 유추와 단순한 유사성 사이의 차이를 사고하는 사람의 의도가 무엇인가 하는 것에서 찾았다. 유사하다고 생각하는 대상이 공통으로 만족하는 명확한 개념을 찾으려는 의도를 가지고 있으면 유추를 하게 된다는 것이다.[1] 그에 따르면, 개념을 명확히 함으로써 유사성을 입증하게 되면 유추를 완성하게 된다. 유추가 완성되면 문제해결의 단서를 찾게 되며, 수학적 발견도 가능해진다.

Erdiniev와 한인기(2005)에 의하면, 유추적 사고는 두 대상이 어떤 공통의 속성을 가질 때, 이 중 한 대상에 대해서만 속성 x를 가지고 있음이 확인되면, 나머지 대상 또한 속성 x를 가질 것이라는 생각에 기초한다. 그러므로 유추

1) 片桐重南(1988)은 유추와 유추적 생각을 구분하고, 유추적 생각에 유추를 의도적으로 이용하려는 경향이 포함되는 것으로 설명하였다. 그러나 이 글에서는 Piaget나 Polya가 이미 의도적인 사고의 경향으로 유추를 설명하였기 때문에 굳이 이 둘을 구분할 필요가 없다고 보고 맥락에 따라 혼용하였다.

적 사고는 확률적인 추리에 해당하며, 유추에 의해 얻은 결론의 진위는 결론에 대한 추가적인 탐구에 의해 밝혀질 수 있다. 이러한 점 때문에 유추는 탐구를 유발하는 것일 뿐, 증명으로 인정받을 수는 없다.

유추적 사고의 의미는 일반적인 수학적 추론의 의미와 관련지어 설명된다. 수학적 추론은 본질적으로 수학적인 일반화를 발전시키고, 정당화하고, 사용하는 것이다. 그런데 일반화는 특수한 예로부터 출발하기 때문에 귀납 추론이 필수적이고, 귀납 추론은 탐구하고, 표현하고, 추측하고, 설명하고, 정당화하는 활동에 의해 그 필요성이 제기된다. 이러한 활동이 가능한 것은 기본적으로 여러 대상과 그 대상에 부여한 생각들 사이의 개념적인 연결이 가능하기 때문이다. 그리고 이 개념적인 연결은 서로 달라 보이는 두 대상 사이의 유사성을 찾아내고, 그것을 설명하기 위해 노력하는 과정에서 이루어진다. 그러므로 유추적 사고는 수학적 추론을 가능하게 하는 역할을 한다(English, 2004).

지금까지 살펴본 여러 학자들의 논의를 <표 Ⅱ-1>과 같이 정리할 수 있다. 이로부터 유추적 사고의 의미와 역할에 대한 각 학자의 설명 사이에 어떤 차이가 있는지 파악할 수 있으며, 학생들에게서 관찰되는 여러 현상의 분석틀로도 활용할 수 있다. 예를 들어, 귀납과 가설에 의해 개별자와 개별자 사이의 연결을 시도하는 것을 유추적 사고의 의미로 본 Peirce의 관점에 기초하여 학생들의 사고과정을 분석할 수 있다. 또, 유사성을 발견하기 위한 의도를 분명하게 하여 특정한 개념과 성질에 주목하는 현상을 Polya의 설명에 기초하여 파악할 수 있다. 이외에도 English의 설명에 기초하여 두 대상의 개념적 연결이 어떤 메카니즘에 의해 이루어지는가 등을 주목하여 살펴보는 것도 유추적 사고과정을 이해하는 중요한 관점이 될 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 유추적 사고의 의미와 역할에 대한 다양한 관점

주요 개념 / 학자	유추적 사고	
	의미	역할
Peirce	개별자 사이의 연결	수학적 논증의 시작
Piaget	개념적 관계에 의한 연결	스키마 활용과 재구성
Polya	의도적인 유사성 발견	문제해결과 수학적 발견
Erdiniev와 한인기	공통의 속성 확인	수학적 탐구 유발
English	두 대상의 개념적 연결	수학적 추론의 핵심적인 동인

Ⅲ. 유추적 사고의 발달과 과제 개발

유추적 사고의 발달에 대해서는 Piaget, Sternberg, Gentner, Goswami의 연구가 주고 거론된다.

Piaget는 구체적 조작기에 대상 사이의 관계(일차적 관계)를, 형식적 조작기에 대상에 대한 관계 사이의 관계(이차적 관계)를 추론할 수 있다고 보았다(Inhelder and Piaget, 1964). Sternberg (1981)는 부호화, 추리, 사상, 적용, 비교, 정당화, 반응이라는 7개의 요소를 적절히 수행함으로써 유추적 사고를 할 수 있다고 보았다(Alexander et al, 1997). Gentner(1989)는 기저 영역에서 표적 영역으로 기저 대상 사이의 관계 체계를 표적 대상 사이의 관계 체계로 전달하는 지식의 사상을 통해 유추가 가능하다고 설명하였다. 이 때 대상의 속성보다는 대상 사이의 관계가 기저에서 표적으로 사상되며 체계성도 사상되어 특정한 관계를 형성한다고 보았다(이승우 & 우정호, 2002에서 재인용). Goswami (1989)는 관련 지식을 획득하여 특정 개념에 대한 고차적인 관계를 파악함으로써 유추가 일어

난다고 보았다.

위의 선행연구에 기초하여 유추적 사고의 교육을 위해 필요한 조건을 도출하면 다음과 같다: 첫째, 대상 사이의 관계와 대상에 대한 관계 사이의 관계를 구분하여 학습 활동에 반영할 필요가 있다; 둘째, 부호화, 추리, 사상, 적용, 비교, 정당화, 반응의 7개 요소가 적절하게 학습 활동에 반영되도록 한다; 대상 자체의 속성보다는 대상 사이의 관계에 주목하도록 할 필요가 있다; 적절한 지식 체계가 갖추어진 가운데 유추적 사고를 시도하도록 학습 환경을 구성할 필요가 있다. 이러한 조건들이 실제로 영재교육 과정에서 얼마나 실효성을 발휘할지 이 연구결과를 토대로 알아보고자 한다. 이로부터 영재아들에게 유추적 사고력을 함양하도록 돕는다는 것이 어떤 의미인지, 어떤 점에 유의해야하는지에 대한 구체적인 시사점을 얻는 것이 이 연구의 궁극적인 목표이다.

수학의 내용 영역과 수학적 활동 요소(우정호, 1998)를 고려할 때, 유추적 사고를 위한 과제를 다양한 관점에서 구성할 수 있다. 예를 들어, 첫째, 3+5=8을 이용하여 13+5=18을 이해하도록 하는 것처럼 연산의 원리를 발견하게 하는 과제가 있다. 둘째, 원의 정의와 유사하게 구를 정의하는 것처럼 용어나 개념을 유추에 의해 확장하게 하는 과제를 구성할 수도 있다. 셋째, 유사한 성질을 파악하여 유사한 정리를 발견하게 하는 과제도 가능하다. 넷째, 문제를 이미 알고 있는 방법과 유사한 것을 이용하여 해결하거나, 정리를 이미 경험한 아이디어와 유사한 것을 이용하여 증명하게 할 수 있다.

고전적인 유추 문제는 'A:B::C:D'의 형태에서 A, B, C를 제시하고 D를 발견하도록 하는 것이다. Polya(1954)는 '삼각형: 사각형:: 사면체: ?'와 같이 고전적 유추 문제에 의한 수학적 발견 상황을 제시하였다. 이 경우에 삼각형을 한 선분의 모든 점과 그 선분 위에 있지 않은 한 점과 연결하여 만들어진 도형으로 보면, 직육면체를 D로 파악할 수 있다. 만약 A와 B를 평면 도형 중 변의 개수가 최소인 도형, 변의 개수가 하나 더 많은 도형으로 보면, D는 면의 개수가 하나 더 많은 사각뿔로 파악할 수도 있다. Polya는 이와 같이 같은 대상을 살펴보더라도 어떤 유사성에 주목하는가에 따라 다른 유추적 사고를 할 수 있다고 보았다.

수학의 내용 영역과 수학적 활동 요소(우정호, 1998), 고전적 유추 과제의 형태(Polya, 1954)를 고려하여, 유추 과제의 형태를 도출할 수 있다. 다음 <표 Ⅲ-1>와 같이 의도적으로 주목해야 하는 내용이 무엇인가에 따라 그리고 제시하는 조건이 어떤 것인가에 따라 결정할 수 있다. 지속적인 교수실험과 연구를 통해 유추적 사고를 위한 과제 유형은 변화될 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 유추적 사고를 위한 과제 유형

	A	B	C	D	과제
연산	○				A:?::?:?
		○			A:B::?:?
			○		A:?::C:?
		○	○		A:B::C:?
개념	○				A:?::?:?
		○			A:B::?:?
			○		A:?::C:?
		○	○		A:B::C:?
성질	○				A:?::?:?
		○			A:B::?:?
			○		A:?::C:?
		○	○		A:B::C:?
해결 과정	○				A:?::?:?
		○			A:B::?:?
			○		A:?::C:?
		○	○		A:B::C:?
증명	○				A:?::?:?
		○			A:B::?:?
			○		A:?::C:?
		○	○		A:B::C:?

Ⅳ. 연구 대상과 과제

이 연구는 두 대학의 부설 영재교육원에 재학 중인 중학교 1학년 학생들 31명(각각 15명과 16명), 중학교 2학년 학생들 26명(각각 12명과 14명)을 대상으로 하였다. 중학교 1학년 학생들은 이미 중학교 2학년 내용을 모두 학습한 상태였으며, 그러므로 명제, 증명, 가정, 결론 등의 용어를 이해하고 적절히 사용할 수 있었다. 중학교 2학년 학생들도 중 3 과정을 포함하여 상당 범위의 선행학습을 마친 상태였다. Goswami(1989)가 설명한 유추적 사고의 선결 요건인 관련 지식을 모든 학생들이 획득하고 있는 것으로 판단할 수 있다.

학생들에게 다음 <표 Ⅲ-1>와 같이 5개의 과제를 제시하여 해결하도록 하였다. Polya (1954), Inhelder & Piaget(1964)의 제안에 따라 피상적이거나 낮은 수준의 유추보다는 관계적이고 구조적인 유추를 유도하기 위해, 개념, 성질, 증명을 유추의 주된 대상으로 설정하였다.[2)]

수업을 진행하는 과정에서 가능한 한 학생들 스스로 과제를 해결하도록 하였으며, 교사의 중재를 최소화하였다. 한 과제가 해결될 때마다, 각각의 과제를 해결한 과정과 결과를 공유하고, 비평할 기회를 허용하였다. 학생들 사이에서 어떤 유추적 사고가 더 유용해 보인다는 판단이 제기되면, 그 이유를 설명하도록 하였다. 또, 유추적 사고의 7개 요소인 부호화, 추리, 사상, 적용, 비교, 정당화, 반응이 각각의 학생들에게 자연스럽게 일어나도록 기회를 제공하는 방식으로 수업을 진행하였다.

<표 Ⅳ-1> 유추 과제의 내용과 유형

	과제 내용	유형
과제 1	삼각형과 유사한 도형을 3개 제시하고, 그 이유를 각각 제시하시오.	개념, 성질 A:?::?:?
과제 2	평행사변형과 유사한 도형을 3개 제시하고, 그 이유를 각각 제시하시오.	개념, 성질 A:?::?:?
과제 3	삼각형과 사면체가 유사하다고 할 때, 그 이유로 가능한 것을 3가지 제시하시오.	개념, 성질 A:?::C:?
과제 4	모든 삼각형에 외심이 존재한다는 명제는 참인가? 자신의 주장에 대한 이유를 제시하시오. 사면체에 대해 이와 유사한 성질을 구성하고, 유사한 이유를 제시하시오.	성질, 증명 A:B::C:?

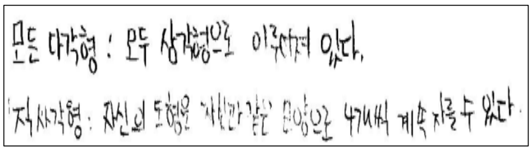
Ⅴ. 개념과 성질 유추

1. 삼각형과 유사한 도형

삼각형과 유사한 도형을 찾는 첫 번째 과제는 하나의 대상을 제시하고, 그 대상의 속성이나 성질을 파악하여 연결한 후, 다른 대상으로 확장하여 유추를 완성하는 것이었다. 학생들은 유사하다는 의미가 무엇인지 질문하면서 탐구하여 다양한 답을 제시하였다. 가장 많은 학생들(57명 중 41명)이 우선 주목한 도형은 삼각기둥, 삼각뿔, 사면체였다. 그러나 이들 도형에 주목한 이유로 처음에 제시한 것은 단지 삼각형을 찾을 수 있다거나 하는 피상적인 것이었다.

2) 이 연구에서는 <표 Ⅲ-1>에 제시한 여러 형태의 과제 중 세 형태만 적용하였다. 고전적 유추 과제를 변형한 형태 중 “A:B::?:?”는 “A:?::C:?”와 마찬가지로 해결하는 데 시간을 많이 요구하므로 이번 연구에서는 제외하였다. 후속연구를 통해 시도할 계획이다.

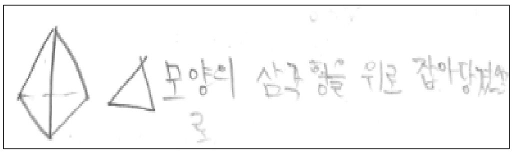
다음으로 많은 영재아들이 제시한 도형은 임의의 다각형이었다. 1학년 영재아들 31명 중 12명이 다각형이라고 응답하였다. 2학년 영재아들 26명 중 9명도 다각형이라고 하였다. 그 이유 역시 다양하였다. 첫째, 영재아들은 꼭지점, 선, 면 등 삼각형의 요소에 대한 이해에 기초하여 설명하였다. 예를 들어, 삼각형과 다각형은 꼭지점, 선, 면으로 이루어졌기 때문 또는 꼭지점과 선의 개수가 같기 때문 또는 모두 선으로 둘러싸였기 때문 등의 이유를 제시하였다. 둘째, 영재아들은 삼각형의 성질에 기초하여 그 유사성을 설명하였다. 예를 들어, 삼각형과 다각형은 공통적으로 외각의 합이 360°이기 때문에 또는 v-e+f=1이 성립하기 때문에 한붓그리기가 가능하므로 유사하다고 하였다. 셋째, 삼각형의 개념이나 성질보다는 단지 삼각형이 포함되는지 여부를 고려하여 설명한 경우도 있었다. 예를 들어, 다각형은 삼각형으로 이루어지기 때문에 또는 삼각형으로 다각형을 만들 수 있기 때문에 두 도형이 유사하다고 보았다.



[그림 Ⅴ-1] 다각형과 직사각형이 삼각형과 유사한 이유

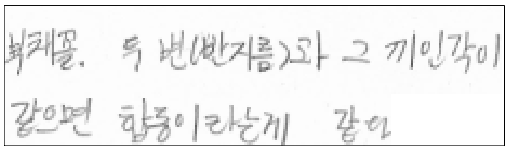
[그림 Ⅴ-1]과 같이 직사각형을 비롯한 사각형이 삼각형과 유사하다고 본 학생들도 많았다. 그 이유 역시 다각형과 유사하였다. 첫째, 삼각형의 요소에 주목하여 사각형을 다시 설명한 경우가 있다. 예를 들어, 사각형은 삼각형과 마찬가지로 점, 선, 면으로 이루어졌으며, 면이 하나라는 것을 유사성의 근거로 제시한 경우가 있었다. 둘째, 삼각형의 성질에 주목하여 설명하였다. 예를 들어, 외각의 합이 360°이므로 삼각형과 사각형은 유사하다고 본 경우가 있었다. 평면도형에 해당하기 때문 또는 한붓그리기가 가능하다는 이유도 역시 제시되었다. 셋째, 삼각형의 존재성에 기초하여 설명한 경우도 있었다. 대각선을 그으면 삼각형이 만들어지기 때문 또는 삼각형을 이용하여 사각형을 만들 수 있기 때문이라는 설명이 여기에 해당한다.

사면체에 주목한 학생들도 많았다. 삼각형의 요소에 주목하거나, 삼각형이 존재한다는 이유가 역시 많이 제시되었다. 다각형 중 대각선이 존재하지 않는 도형이 삼각형이며, 다면체 중 대각선이 존재하지 않는 도형이 사면체라고 설명한 학생들도 1학년 5명, 2학년 4명이 있었다.

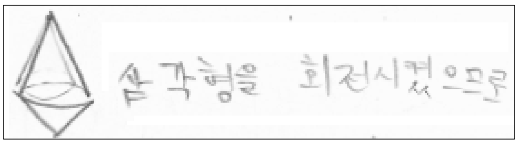


[그림 Ⅴ-2] 사면체가 삼각형과 유사한 이유

이외에 [그림 Ⅴ-3]과 같이 삼각형의 합동조건을 이용하여 부채꼴이 유사하다고 주장한 사례도 있었다. [그림 Ⅴ-4]와 같이 삼각형을 이용하여 만든 도형은 모두 유사하다고 본 경우도 있었다.



[그림 Ⅴ-3] 부채꼴이 삼각형과 유사한 이유

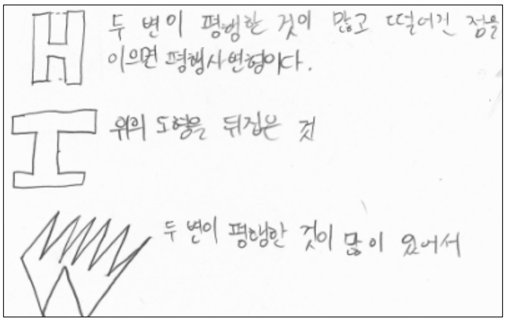


[그림 Ⅴ-4] 회전시킨 도형이 삼각형과 유사한 이유

삼각형과 유사한 도형을 찾는 과제에 대해서는 삼각형의 요소를 이용한 개념적 명확화, 삼각형의 성질을 이용한 관계성 파악을 시도한 학생들이 많았다. 그러나 삼각형과 유사한 도형을 3개 찾으라고 해서인지 피상적인 속성을 이용하여 해결한 경우도 많았다. 예를 들어, 단지 삼각형을 이용하여 만든 도형은 모두 삼각형과 유사하다고 보거나, 입체도형을 위에서 또는 옆에서 보면 삼각형이 보이기 때문에 유사하다고 보는 경우가 있었다(1학년 11명, 2학년 8명).

2. 평행사변형과 유사한 도형

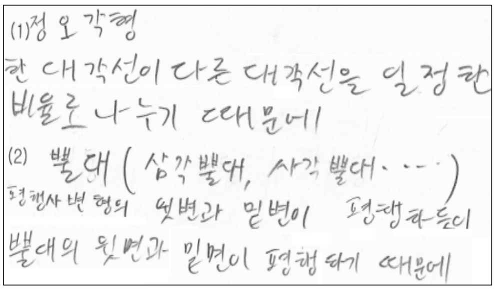
역시 'A:?::?:?' 형태인 두 번째 과제에 대해서 학생들은 다양한 반응을 보였다. 삼각형의 피상적인 속성에 기초한 학생들은 평행사변형과 유사한 도형을 찾는 과제를 해결하는 데 어려움을 호소하였다.



[그림 Ⅴ-5] 평행이라는 특징을 이용하여 유사한 도형을 찾은 사례

[그림 Ⅴ-5]와 같이 평행사변형의 개념, 곧 두 쌍의 대변이 서로 평행하다는 것을 피상적으로만 해석하여 유사한 도형을 찾았고, 왜 유사한 도형을 찾는지 이해하지 못하는 경우가 발견되었다. 1학년 학생 3명, 2학년 학생 2명이 이와 같은 어려움을 보였다. 전체적으로는 피상적인 속성에 주목하여 유사한 도형을 찾는 학생들이 현저하게 줄었다. 이는 학생들 스스로 유사한 도형들 중에서도 수학적인 의미를 갖는 것과 그렇지 못한 것, 계속적인 탐구를 유발하는 것과 그렇지 못한 것을 인식하기 때문으로 보인다. "도형이 너무 지저분하다.", "그래서 뭘 알 수 있는데?", "별로 새롭지가 않다." 등의 평가를 내리면서 탐구하는 모습에서 이를 알 수 있었다.

<과제 1>에 대해 삼각형의 성질에 주목하여 해결한 대부분의 학생들은 유사한 방식을 고수하는 것으로 나타났다. 예를 들어, 대변의 길이가 서로 같다 또는 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다와 같은 성질을 이용하여 유사한 도형을 찾았다. [그림 Ⅴ-6]과 같이 평행사변형에서 두 쌍의 대변이 평행한 것을, 입체도형에서는 두 쌍의 마주보는 면이 평행하다고 해석하여 유사한 도형을 찾는 경우도 있었다.



[그림 Ⅴ-6] 평행사변형의 성질을 이용하여 유사한 도형을 찾은 사례

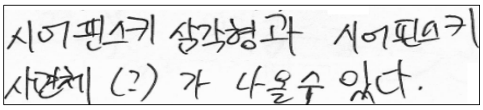
3. 삼각형과 사면체 사이의 유사성

<과제 3>은 삼각형과 사면체가 유사하다고 할 때 가능한 이유가 무엇이겠는지 설명하라는 것이었다. <과제 1>과 <과제 2>가 'A:?::?:?' 유형의 유추를 요구하는 것과 달리, 이 과제는 'A:?::C:?' 유형의 유추를 하도록 하는 것이었다. 단지 삼각형이 보이는가 또는 삼각형을 이용하여 만든 도형인가 여부에 따라 유사성을 설명하던 학생들도 두 도형의 성질에 주목하였다.

<표 V-1> 삼각형과 사면체의 유사성에 대한 설명 (복수 응답)

설명 내용	유형	백분율(%)
대각선이 존재하지 않는다.	A:B::C:B	42.1
각 변의 중점을 연결하거나 일정하게 변의 길이를 확장하면 삼각형의 경우 다시 삼각형이 사면체의 경우 다시 사면체가 만들어진다(자기 자신과 닮은 도형이 만들어진다).	A:B::C:D	24.6
평행한 변이 존재하지 않는다.	A:B::C:B	19.3
각 차원에서 만들어질 수 있는 최소한의 도형이다.	A:B::C:D	12.3
삼각형(원)은 원(삼각형)에 내접하고, 사면체(구)는 구(사면체)에 내접한다.	A:B::C:D	10.5

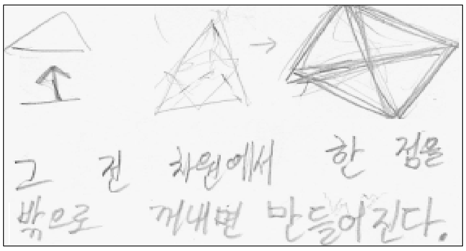
<표 V-1>에서 알 수 있듯이, 1학년 31명과 2학년 26명의 학생들 중 42.1%의 영재아가 대각선의 존재 여부에 주목하였다.3) 이는 앞서 평행사변형과 유사한 도형을 찾아본 경험 때문으로 추측된다. 각 변의 중점을 연결하거나 일정한 비율로 각 변의 길이를 연장하면 자기 자신과 닮은 도형이 나온다는 것에도 많은 학생들이 주목하였다. 직접적으로 시어핀스키 삼각형 또는 프랙탈 도형이라는 용어를 언급한 경우도 있는 것으로 보아([그림 V-7} 참조), 학생들이 이에 대해 가지고 있는 지식이 유추에 영향을 미쳤음을 알 수 있다.



[그림 V-7] 닮은 도형 구성 가능성을 유사성의 근거로 제시한 사례

<표 V-1>에 제시하지 않은 설명 중에는 대각선이나 평행한 변이 존재하지 않는다는 설명과 마찬가지로 동일한 성질로 유사성을 입증한 경우가 많았다. 이는 학생들이 "A:B::C:B"의 구조로 유추를 완성하려는 성향이 있음을 뜻한다. 이 성향은 기저가 되는 개념과 성질 사이의 관계를 목표가 되는 개념과 성질 사이의 관계로 전이하는 데 장애로 작용하였다.

일부 학생들은 삼각형의 외심과 내심에 대한 성질을 사면체에 대한 성질로 확장하려고 시도하였다. 마찬가지로 수심, 무게중심의 확장도 시도하였다. 이들은 원과 구가 공유하는 성질이 비슷하므로 확장이 가능하다고 믿었으며, 증명 방법을 찾는 데 많은 시간을 보냈다. [그림 V-8]과 같이 삼각형은 한 변과 그 위에 있지 않은 한 점을 이용하여 만들고, 사면체는 한 면과 그 위에 있지 않은 한 점을 이용하여 만들 수 있어서 유사하다고 증명한 학생들도(3명) 있었다.



[그림 V-8] 도형 구성 방법을 유사성의 근거로 제시한 사례

4. 삼각형의 외심에 대한 유추

<과제 4>에서는 삼각형의 외심이 항상 존재하는지 설명하고, 사면체에 대해 유추하도록 하였다. 이는 "삼각형: 외심:: 사면체: ?" 형태의 유추적 사고를 요구하여 개념 확장과 성질 확

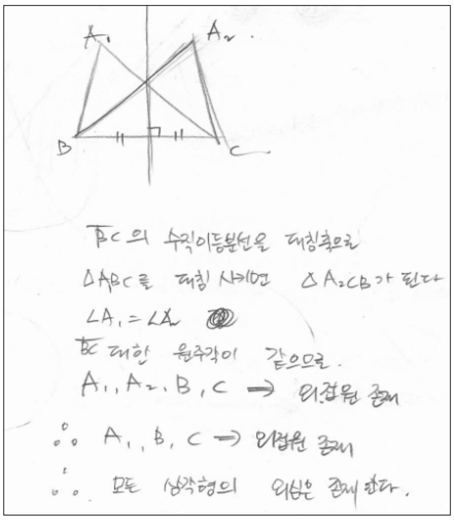
3) 1학년과 2학년 학생들의 응답 수준이 다르지 않았기 때문에, 전체 학생 중 몇 퍼센트의 학생들이 특정한 방식으로 설명하였는지 <표 4>에 나타내고 이를 분석하였다.

장을 동시에 시도하도록 하는 것이었다.

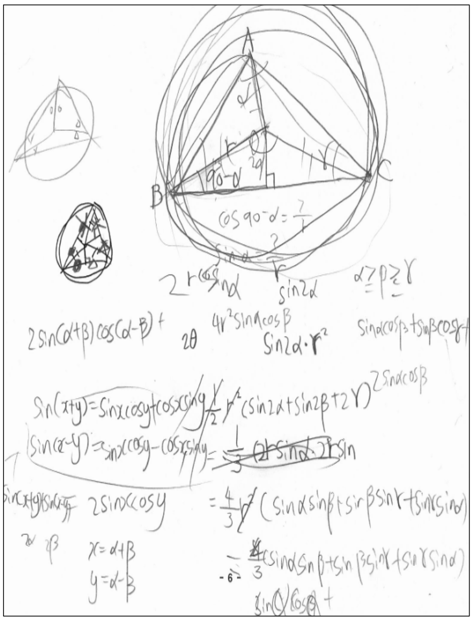
삼각형의 외심이 항상 존재하는가에 대한 증명은 중학교 2학년 학생들의 경우 이미 학교에서 배운 내용이고, 1학년 학생들의 경우 대부분이 선행학습을 완료하여 역시 모두 배운 내용이었다.

그러나 57명의 학생들 중 5명만이 학교수학에서 다룬 증명을 기억하고 있었으며, 대부분의 경우 다른 방식으로 증명하였다. 이는 이 연구의 주된 내용과 무관한 것이었지만 연구자를 당황하게 한 매우 인상적인 장면이었다. 영재아들에게조차 증명은 발견을 위한 도구나 사고양식으로 다루어지기보다 기억해야 할 내용이지만 실제로는 주목받지 않는 내용이라 간과되는 부분이었다.

대부분의 학생들(46명/57명)이 택한 설명은 “세 점에 의해 하나의 원이 결정된다.”는 것이었다. [그림 Ⅴ-9]와 같이 중학교 3학년에서 다루는 원주각의 성질 또는 [그림 Ⅴ-10]과 같이 그 이후 학년의 내용을 이용하여 증명한 경우도 있었다.



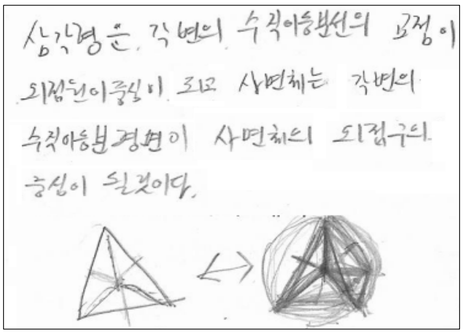
[그림 Ⅴ-9] 원주각을 이용하여 외심의 존재성을 증명한 사례



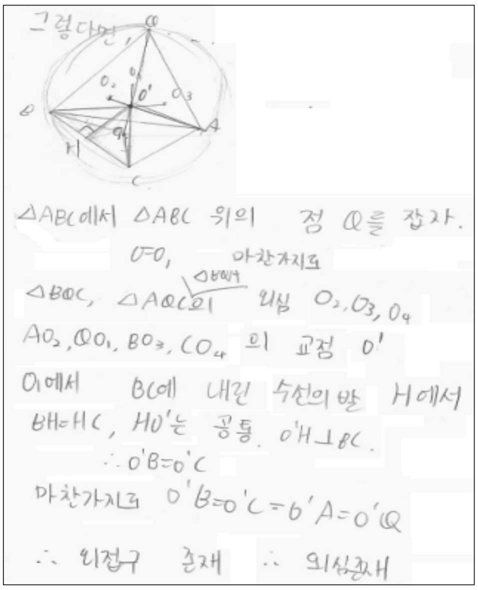
[그림 Ⅴ-10] 삼각함수를 이용하여 외심의 존재성에 대한 증명을 시도한 사례

삼각형과 외심 사이의 관계를 사면체에 대해 확장하는 과정에서 학생들은 다음 두 가지 접근방법을 택하였다: 첫째, 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이라는 정의와 동일하게 사면체의 외심을 정의하고([그림 Ⅴ-11] 참조) 그 존재성을 입증하려고 시도하였다; 둘째, 삼각형의 외심에서 각 꼭지점에 이르는 거리가 같다는 성질을 만족하는 점을 사면체의 외심으로 정의하여 찾으려고 시도하였다. 첫 번째 방법을 택한 학생들은(7명) 사면체의 모서리에서 수직이등분선을 그린 후 한 점에서 만나는지 여부를 확인하는 그림을 그리면서 혼란에 빠졌다. 두 번째 방법에 따라 진행한 학생들 중 일부는(11명) 사면체의 각 면에 있는 삼각형의 외심을 지나는 직선을 그리고 그것이 한 점에서 만나는지 생각하였다([그림 Ⅴ-12] 참조]. 나머지 학생들은 평면 위에서 세 점이 주어지면 원을 그릴 수 있듯이, 공간에서 네 점이 주어지

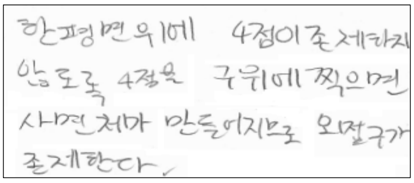
면 구를 그릴 수 있다고 주장하였다. 그러므로 사면체의 네 꼭지점을 지나는 구가 존재한다고 증명하였다([그림 V-13] 참조).



[그림 V-11] 삼각형의 외심과 동일한 정의를 이용하여 증명을 시도한 사례



[그림 V-12] 각 면의 외심을 이용하여 증명을 시도한 사례



[그림 V-13] 구를 그릴 수 있는 조건에 비추어 증명을 시도한 사례

Ⅵ. 논의: 유추적 사고의 역할

이 연구에 참여한 영재아들은 공통적으로 기하 문제해결에 자신이 없다고 하였다. 그 이유로는 다음과 같이 세 가지를 제시하였다. 첫째, 아이디어를 바로 생각해내지 못하면 문제를 해결할 수 없고; 둘째, 아이디어를 생각해내기가 어려운 경우가 많으며; 셋째, 답을 찾더라도 그 정당성을 설명하기 어렵다. 이는 Koichu & Berman(2005)의 연구에서 지적한 바와 마찬가지로 우리나라의 영재아들도 짧은 시간에 많은 문제를 해결하면서 경시대회 등을 대비하는 동안 키워진 성향일 가능성이 높다. 영재아들은 일정한 형태의 문제가 주로 경시대회용으로 출제되는 것을 알고 있으며, 이를 집중적으로 연습하는 것이 필요하다고 말함으로써 이 추측을 뒷받침하였다.

이번 연구에서 제시한 과제들은 기하 문제의 외양을 띠고 문제 형식도 생소한 것이어서 당황스러웠으며, 주어진 것에 비해 새로이 창조해야 하는 것이 너무 많아 부담스러웠다고 말하는 학생들이 많았다. 그러나 과제를 해결해 나가면서 피상적인 속성에 주목하는 것이 무의미함을 파악하고, 점차 개념과 성질을 이용하여 유추적 사고를 발전시키는 모습이었다. 이는 Inhelder와 Piaget(1964), Alexander et al. (1997), 그리고 English(2004)에서 나타나는 바와 같이, 유추적 사고에 적응하여 그 수준을 높이는 일련의 과정이 있으며, 이를 통해 유용한 수학적 발견을 경험할 수 있다는 주장과 일치한다. 영재아들도 유추적 사고에 적응하는 데 일정한 시간이 필요하며, 각 과제의 유형에 따라 다른 방식으로 유추적 사고를 경험한 것으로 나타났다. 그 밖에 여러 가지 논점을 도출하여 후속 연구과제를 파악하고자 한다.

유추적 사고의 역할에 대한 수학자들, 수학

교육자들의 관심이 높은 것을 감안할 때, 이 연구에서 얻은 결과를 시발점으로 하여 영재교육을 위한 다양한 접근 방안을 모색할 필요가 있다. 특히 학생들에게 기존에 알고 있던 것을 되돌아보고 재조직하거나 유사한 형태의 지식으로 재조직하는 경험을 제공하는 효율적인 방안을 마련하기 위해 유추적 사고를 활용하는 것이 중요하고 가능하다고 생각한다.

1. ‘A:?::?:?’ 형태의 유추 과제

유추에 관한 기존 연구에서 전통적으로 ‘A:B::C:?’와 같은 형태의 문제를 활용하였으나 (Alexander et al. 1997; English, 2004), 수학자들이 새로운 내용을 발견할 때에는 이와 같이 명확하게 구조가 정립된 형태 이전에 새로운 대상으로 주의를 옮기는 과정이 필요할 것으로 추측되어 ‘A:?::?:?’ 형태의 과제를 제시하였다. 수학적 능력이 뛰어남에도 불구하고 초반에는 상당수 학생들이 삼각형의 개념과 성질을 도외시하고 피상적인 속성에 주목하여 유추를 완성하려고 했던 것이 이번 연구에서 확인되었다. 이는 영재아들이 주어진 조건을 해석하여 문제를 이해하고 해결하는 것에만 익숙하다는 것을 시사한다. 어느 정도의 시간이 흐른 후 학생들은 삼각형의 요소와 성질, 특징 등을 분석하여 유용한 관계를 형성하고, 이를 토대로 여러 도형을 유추에 의해 재분류하였다.

일부 학생들이 삼각형과 유사한 도형으로 사면체를 제시하면서, “대각선이 존재하지 않는다.”는 성질을 이용한 것은 매우 발전적이라고 할 수 있다. 삼각형에 대해 다룰 때 대각선 개념과 연결시키는 기회는 전혀 없기 때문이다. 이는 기존 개념을 새로운 맥락에서 재조명하는 기회를 제공하며, 이를 통해 기존 개념을 보다 분명하게 정립할 수 있게 하는 역할을 한 것으로 볼 수 있다. 모서리와 꼭지점의 수가 같다는 성질을 이용하여 유추를 완성한 경우도 수학적으로 의미 있는 활동으로 볼 수 있다. 이 성질은 평면도형에 대한 오일러의 정리로 확장될 수 있기 때문이다. 실제로 일부 학생들은 모든 다각형을 삼각형으로 분해하여 꼭지점과 모서리, 면 사이의 관계를 알아보고 오일러 정리를 이용하여 유추를 완성하였다.

첫 번째 과제로 제시한 ‘A:?::?:?’ 형태의 유추 과제는 학생들에게 기저가 되는 대상을 충분하게 분석하고 조명할 기회를 제공한 것으로 보인다. 이는 Dubinsky et al.(2005)이 제시한 대상화 단계를 경험시킨 것으로 볼 수 있다. 삼각형 또는 평행사변형 개념은 상대적으로 단순하고 고립되어 있어서 대상화하기 어렵다. 그러나 유추를 완성하기 위해 각 도형의 성질들의 집합을 다른 도형의 성질들의 집합과 비교하여 논리적으로 정돈하면서 대상화 경험을 제공하는 것이 가능해졌다. 이와 같은 형태의 유추적 사고를 경험시킬 수 있는 다양한 과제를 개발할 필요가 있다.

Peirce는 유추적 사고를 개별자와 개별자 사이의 연결로 설명하고, 이 연결을 가능하게 하는 것은 귀납과 가설에 의한 과감한 추론이라고 보았다. 수학적 추론은 연역만으로 이루어지지 않으며, 서로 멀리 떨어져있는 개별자 사이의 연결성을 파악하여 유추하는 창조적 접근을 필요로 한다(Hoopes, 2008: 117-120). 이 연구에 참여한 학생들도 삼각형이라는 기본 도형으로부터 출발하여 다양한 도형을 상상하고, 그 연결성을 확립하는 명확한 수학적 개념과 성질을 찾아 독창적인 유추를 완성하였다. 다양한 유추가 완성될 때마다 스스로 성취감을 표현하거나 서로 공유하면서 감탄하는 모습도 확인할 수 있었다. 이러한 점에서 ‘A:?::?:?’ 유형의 유추 과제는 수학적 발견 경험의 기회를

제공하는 것으로 보인다.

2. 'A:?::C:?' 형태의 유추 과제

'A:?::C:?' 형태의 유추 과제는 학생들이 두 대상을 각각의 대상이 속한 체계의 논의에 비추어 분석하도록 하기 위한 것이었다. 삼각형과 유사한 도형을 찾아야 하는 첫 번째 과제를 해결할 때 이미 사면체에 주목한 학생들도 있었다. 그러나 이 때에는 사면체가 삼각형으로 만들어졌다거나 사면체의 한 꼭지점에서 내려다보면 삼각형 모양이 된다는 등 피상적인 속성에 의존하여 유추를 완성한 경우가 많았다. 이제 앞의 두 과제를 통해 어떤 방식으로 유추를 완성하는 것이 유용한지 파악한 학생들은 삼각형의 개념 또는 성질에 주목하여 사면체와의 유사성을 추론하고자 하였다.

일부 학생들은 각각의 차원에서 대각선 또는 평행선이 존재하지 않는다는 성질에 주목하였고, 일부 학생들은 각각의 차원에서 최소한의 선으로 만들어진 도형이라고 설명하였다. 이외에도 삼각형 자체 또는 사면체 자체만을 대상으로 탐구했을 때 부각되기 어려운 측면들이 두 대상 사이의 유사성을 규명하는 가운데 다루어졌다. 삼각형의 외심, 내심, 무게중심 등은 사면체의 맥락에서 공간적 의미를 갖는 새로운 개념으로 확장되었다. 사면체의 성질에 관한 활발한 추측이 이루어졌고, 정당화를 필요로 하는 다양한 맥락에 놓였다.

특이할 만한 점은 'A:?::C:?'에서 두 대상에 공통적으로 적용할 수 있는 성질, 예를 들어, 대각선이나 평행선의 존재성과 같은 성질을 이용하여 유추하려는 경향이 발견되었다는 것이다(<표 4> 참조). 두 대상 A와 C의 개념이나 성질을 각각 이용하여 'A:B::C:D' 형태로 유추를 완성하기보다는 'A:B::C:B'와 같이 공통의 성질을 이용하였다. 이는 Erdiniev와 한인기(2005)가 제시한 유추적 사고의 의미, 곧 한 대상에 대하여 속성 x를 발견하면 다른 대상도 그 속성을 지닐 것이라고 가정하는 것이 유추적 사고의 출발점이라는 추측을 가능하게 한다. 이러한 특성을 반영하여 유추적 사고를 함양하는 영재교육 자료를 개발하는 것이 필요하다.

학교수학에서는 사면체에 대해 겉넓이와 부피를 다룬다. 이번 연구에서 영재아들이 추측한 사면체의 성질은 하나의 구에 내접할 것이고, 외접할 것이며, 무게중심이 존재할 것이라는 등 다양한 것이었다. 스스로 만든 추측을 증명하기 위해 정사면체와 같은 특수한 사면체에 대해 확인해보고, 일반화하려고 노력하는 모습이 관찰되었다. 그러므로 'A:?::C:?' 형태의 유추 과제는 추측을 제기하고 스스로 정당화하는 탐구 학습을 자극한 것으로 볼 수 있다. 하나의 대상만 탐구하는 것이 아니라 비교하고 확장하는 가운데 두 대상을 탐구하는 경험은 영재아들에게 필요한 독창성과 논리성을 키우는 기회를 제공하였다고 할 수 있다. 특히 많은 학생들이 정사영, 삼수선, 등의 개념을 만들어낸 점은 수학적 발견에 참여한 근거로 볼 수 있을 것이다.

3. 'A:B::C:?' 형태의 유추 과제

고전적인 유추 문제 구조인 'A:B::C:?' 형태의 과제를 제시했을 때, 영재아들은 쉽게 유추를 완성하였다. 모든 삼각형의 외심을 찾을 수 있듯이 임의의 사면체에서 동일한 역할을 하는 점을 찾아야 한다는 것을 쉽게 생각해내었다. 다만 삼각형의 외심의 정의에 주목하는가 또는 성질에 주목하는가에 따라 접근 방법에는 차이가 있었다.

일부 학생들은 세 변의 수직이등분선의 교점을 삼각형의 외심으로 정의하듯이, 여섯 개 모서리의 수직이등분선을 그려서 그 교점의 존재 여부를 확인하려고 하였다. 일부 학생들은 각 면에 있는 외심을 지나는 직선이 한 점에서 만나는지 알아보고자 하였다. 일부 학생들은 한 원 위에서 임의의 세 점을 택해서 임의의 삼각형을 표현하듯이, 한 구 위에서 임의의 네 점을 택해서 임의의 사면체를 표현할 수 있다고 주장하였다. 다양한 시도만큼 다양한 탐구 결과가 공유되고 논쟁의 대상이 되었다.

다양한 논의 과정에서 학생들은 "한 직선 위에 있지 않은"이라는 조건을 추가하여 원의 결정조건을 찾아냈고 이를 확장하려고 노력하였다. 결국 한 평면 위에 있지 않은 네 점으로 하나의 구를 결정할 수 있다고 추측하고 이에 대해 탐구하게 되었다. 삼각형과 사면체를 매개로 평면도형과 공간도형에 대한 일반적인 추측이 제기되고 그 정당성에 대한 논의가 활발하게 이루어졌다.

'A:B::C:?' 형태의 유추 과제는 이미 대상 A에 대한 성질 B의 관계가 주어져있으므로, 대상 C에 대해 그 관계를 사상하면 유추를 완성할 수 있다. 그러므로 학생들이 어떤 방향으로 사고를 진행해야 하는지 분명한 반면, 대상 A와 대상 C를 왜 연결해서 생각해야 하는지, 대상 A의 여러 성질 중 왜 B를 택해 그 관계를 파악해야 하는지 설명하기 어렵다. 그러므로 자발적인 수학적 발견을 자극하는 측면에서는 제한이 많음을 알 수 있다. 또, Goswami(1989)가 지적한 바와 같이 A, B, C를 둘러싼 충분한 지식이 갖추어져 있지 않으면 유추를 완성하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 이 연구에 참여한 학생들은 A, B, C에 대한 지식이 충분하다고 판단하여 이 과제를 제시하였으며, 위에서 논의한 바와 같은 다양한 접근을 시도하여 의미있는 유추를 완성할 수 있었다.

Ⅶ. 요약 및 결론

이 연구에서는 수학적 발견의 주요 도구로 강조되어 온 유추적 사고를 영재아들을 대상으로 한 교육에서 시도하고 그 결과를 분석하였다. 고전적인 유추 문제는 유사한 두 대상과 각각의 대상에 대해 성립하는 성질을 비례식과 같은 형태로 제시하고, 네 항목 중 주어진 세 항목을 토대로 한 항목을 찾아내는 것이었다. 이 연구에서는 이를 변형하여, 세 가지 형태의 유추 과제를 제시하였으며, 각각의 유형에 대한 학생들의 반응을 분석하였다.

이 연구에서 얻은 첫 번째 결과는 영재아들이 'A:?::?:?' 형태의 유추를 완성하면서 이미 알고 있던 도형을 재개념화하고, 그 성질에 대해서도 다른 각도에서 분석하는 등 대상화 단계의 사고를 하였다는 것이다. 영재아들임에도 불구하고 초반에는 피상적인 속성에 의존하여 유추하려는 성향을 보임으로써, 유추적 사고의 발달 과정에 대한 연구가 필요하다는 시사점도 얻을 수 있었다. 이 연구에 참여한 학생들은 <과제 1>과 <과제 2>를 해결하면서 단순 속성이 아니라 개념과 성질에 깊이 의존하여 유추를 완성하게 되었으며, 도형과 그 성질의 집합에 대한 다양한 탐구를 보여주었다.

다음으로, 'A:?::C:?' 형태의 과제 역시 영재아들의 사고를 자극하고 수학적인 발견을 경험하게 한 것으로 나타났다. 영재아들은 유추적 사고를 통해 평면도형과 공간도형의 비교, 개념과 성질의 확장 등을 시도하였다. 학생들은 서로 다른 성질인 B와 D에 의하여 유추를 완성하기보다, 동일한 속성인 B를 찾아 해결하려는 경향을 보였다. 그러므로 이 형태의 과제를

대상 하나에 대한 자유로운 사고를 자극하는 과제(<과제 1>, <과제 2>)와 고전적인 유추 과제(<과제 4>) 사이에 넣어 구조의 유사성을 파악하게 하는 기회로 활용하는 것이 적절하다고 할 수 있다.

마지막으로, 학생들은 'A:B::C:?' 형태의 과제를 해결하면서 정사영, 삼수선 등 새로운 개념의 필요성을 깨닫고 스스로 제기한 추측에 대해 정당화의 필요성을 깨달아 완성하려고 노력하였다. Corfield(2003)의 지적과 마찬가지로 학생들은 새로운 개념이나 성질을 발견하는 경우뿐 아니라 정당화 과정에서도 유추적 사고를 활용하는 것이 유용하다는 것을 파악하였다.

영재아들에게 상위 지식을 학습할 기회(Johnson & Sher, 1997), 도전적인 수학 문제에 접할 기회(Johnson, 1993), 창의적 사고를 발전시키는 기회(Sheffield, 1999)가 필요하다는 것은 선행연구로부터 이미 알려진 바이다. 이 연구에서 사용한 세 유형의 유추 과제는 공간도형에 대한 탐구를 유발하고(<과제 3>), 기존에 알고 있던 개념을 재구조화하여 새로운 이해를 추구하게 하며(<과제 1>, <과제 2>), 명확하면서도 간결한 성질을 찾아 독창적인 유추를 완성하게 함으로써(<과제 1>부터 <과제 4>까지), 이러한 기회를 제공한 것으로 볼 수 있다.

결론적으로, 영재아들이 짧은 시간에 유추적 사고의 유용성을 깨달아 적극적으로 활용하였고, 그 결과 간단한 개념에 대해서도 대상화 단계의 사고를 하였으며, 수학적 발견을 경험하게 되었다는 점이 이 연구에서 얻은 가장 중요한 결과이다. 물론 유추적 사고 능력에 따라 수학적 발견에 차이가 있었으며, 수학적 발견의 의미를 파악하는 양상이 달랐다. 이는 영재아들이라고 해도 유추적 사고의 수준과 양상이 다르므로 다른 교육적 요구를 가지고 있음을 의미한다. 그러므로 유추적 사고를 활용할 수 있는 다양한 과제를 개발하여 적용하는 후속 연구가 필요하다. 특히 어떤 형태의 유추 과제를 어떤 비중으로 포함시키고, 과제에 반영할 내용 요소에 따라 과제의 형태를 어떻게 달리할 것인지의 문제를 연구할 필요가 있다.

참고문헌

송상헌·장혜원·정영옥(2006a). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. **수학교육학연구**, 16(4), 327-344.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

이승우·우정호(2002). 학교수학에서의 유추와 은유. **수학교육학연구**, 12(4), 523-542.

片桐重南(1988). **수학적인 생각의 구체화**. (이용률, 성현경, 정동권, 박영배 역). 서울: 경문사.

Alexander, P. A., White, G. S., & Daugherty, M. (1997). Analogical reasoning and early mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 117-147). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Ed.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253-284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS *Analysis. Educational Studies in Mathematics, Vol. 60*(2). 253-266.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (2004) (ED.). *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Erdniev, P. M. & 한인기(2005). **유추를 통한 수학탐구.** 서울: 승산.

Gentner, D. (1989). The mechanism of analogical learning. In S. Vosniadou & A. Ortony(Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). NY: Cambridge University Press.

Goswami, U. (1989). Relational complexity and the development of analogical reasoning. *Cognitive Development, 4,* 251-268.

Hoopes, J. (2008). (Ed.). **퍼스의 기호학.** (김동식, 이유선 역). 서울: 나남. (영어 원작은 1992년 출판).

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child. Classification and seriation* (E. A. Lunzer & D. P. Papert, Trans.). New York: Harper & Row. (Original work published 1959)

Johnson, D. T. (1993). *Mathematical Curriculum for the Gifted. In J. VanTassel-Bæka (Ed.), Comprehensive Curriculum for Gifted Learners.* (pp. 231-261). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Johnson, D. T., & Sher, B. T. (1997). *Resource Guide to Mathematics Curriculum Materials for High-ability Learners in Grades K-8.* Williamsburg, VA: Centre for Gifted Education, College of William and Mary.

Kac, M., Rota, G., & Schwartz, J. T. (1986). *Discrete Thoughts: Essays on Mathematics, Science, and Philosophy.* Boston: Birkhauser.

Koichu, B., & Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *Journal of Secondary Gifted Education. Vol. 16.* 168-179.

Lee, K., Kim, M., Na, G., Han, D., & Song, S. (2007). Induction, analogy, and imagery in geometric reasoning. *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* 145-152. Seoul, Korea.

Na, G., Han, D., Lee, K., & Song, S. (2007). Mathematically gifted students' problem solving approaches on conditional probability. *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4,* 1-8. Seoul, Korea.

Piaget, J. (1952). *The Origins of Intelligence in Children.* New York: Norton.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning I: Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton, NJ: Princeton

University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery.* New York: JOHN WILEY & SONS, Inc.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. J. (1977). *Intelligence, information processing, and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Solving Three Types of Analogy Tasks by the Mathematically Gifted

Lee, Kyung Hwa (Seoul National University)

The powerful role of analogical reasoning in discovering mathematics is well substantiated in the history of mathematics. Mathematically gifted students, thus, are encouraged to learn via in-depth exploration on their own based on analogical reasoning. In this study, 57 gifted students (31in the 7th and 26 8th grade) were asked to formulate or clarify analogy. Students produced fruitful constructs led by analogical reasoning.

Participants in this study appeared to experience the deep thinking that is necessary to solve problems made with analogies, a process equivalent to the one that mathematicians undertake. The subjects had to reflect on prior knowledge and develop new concepts such as an orthogonal projection and a point of intersection of perpendicular lines based on analogical reasoning. All subjects were found adept at making meaningful analogues of a triangle since they all made use of meta-cognition when searching relations for analogies. In the future, methodologies including the development of tasks and teaching settings, measures to evaluate the depth of mathematic exploration through analogy, and research on how to promote education related to analogy for gifted students will enhance gifted student mathematics education.

* **Key words** : Gifted students(영재아), Three types of analogy tasks(세 유형의 유추 과제), Analogical Reasoning(유추적 사고)

논문접수: 2009. 2. 3.
논문수정: 2009. 2. 13.
심사완료: 2009. 2. 23.