대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 1, 1-24. Feb 2009

초・중등학교 수학에서 다루는 비와 닮음에 대한 고찰[1)]

김 흥 기[*]

비와 닮음의 활용은 고대로부터 일상생활에서 필요한 것들이었고, 유클리드 원론에서도 제 5권에서는 비를 제6권에서는 닮음을 다루고 있다. 본 연구에서는 우리나라 교과서에서 취급하고 있는 비와 닮음의 내용을 유클리드 원론, 일본, 미국의 교과서에서 취급하고 있는 내용들과 비교 분석하였는데, 도입 방법과 내용 전개 방법에 서로 차이가 있음을 알 수 있다. 우리나라의 교과서에서는 비를 도입하면서 미국 일본과 달리 비에 대한 정의 없이 보기 문제를 통해 비를 나타냈으며, 닮음에서는 우리나라와 일본의 교과서가 미국의 교과서와 달리 삼각형의 닮음조건과 삼각형의 변과 한 변에 평행인 선분에 의한 비의 관계를 다루는 순서가 다르며 삼각형의 닮음조건을 직관적으로 증명 없이 공준처럼 사용하고 있다. 이와 같은 도입 방법과 내용 전개 그리고 내용 전개 순서의 차이에 따른 학습지도는 학생들의 수준에 의해 학습내용 이해와 활용에 많은 영향을 줄 수 있다. 보다 바람직한 수학 교육을 위해 현행 모든 교과서와 같이 학습 내용을 일률적인 방법으로 취급하는 것 보다 학생들의 수준을 생각한 다양한 방법으로 취급한 교과서를 제공하는 것이 필요하다.

Ⅰ. 서 언

일상생활에서 우리들은 어떤 양들의 비교와 닮은 도형들을 늘 접하게 된다. 수학사적으로 보면 비례에 관한 내용은 측정, 건축, 농업, 천문 등 인류의 삶에서 필요에 의하여 고대로부터 있었고, 수학에서 수들에 관해 같이 잴 수 있는 정수들을 대상으로 비례 이론을 만들어 낸 것은 피타고라스학파라고 알려져 있다. 한편 닮은꼴의 원리는 디자인 예술의 가장 기본이 되는 이론으로, 고대 이집트 사람들과 피타고라스와 그의 제자들도 이것을 잘 알고 있었던 게 확실하다. 그들은 같이 잴 수 있는 양들에 대해서만 비례이론을 기하학에 사용하였는데, 같이 잴 수 없는 양들의 존재를 발견함으로서 비례 이론에 바탕을 둔 명제의 증명에 대하여 의심을 하게 되었다. 같이 잴 수 없는 양들의 발견에 따른 기하학에서의 논리적 추문을 피하기 위하여 그들은 될 수 있는 한 닮은꼴의 원리를 쓰지 않게 되었으며, 같이 잴 수 있는지 여부와 관계없는 비례 이론을 바탕으로 닮은꼴의 원리가 정립되기를 바랐다. 그 후 유클리드 원론 제 5 권에 담고 있는 에우독소스가 발견한 일반적인 비례 이론에 의해 이러한 문제점들이 제거되었으며, 비와 그에 바탕을 둔 닮음과 수학 전반의 내용이 오늘날 까지 사용되고 있다.

이러한 비(비율)와 닮음에 대하여 우리나라에서는 초등학교 6학년에서 처음으로 어떤 양

* 단국대학교, hkkim@dankook.ac.kr
1) 이 연구는 2008학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

들의 비교로 비(비율)를 다루고 있고, 닮은 도형에 대해서는 주로 다각형(삼각형)에 대하여 중학교 2학년에서 다루고 있다. 그런데 초등학교 6학년에서 처음으로 다루고 있는 비(비율)의 내용 도입과 그 전개가 어떻게 이루어졌는지를 살펴보니 미국 일본의 경우와 다름을 알 수 있었다. 이를테면 비의 도입에서 우리나라의 교과서에서는 용어 "비"에 대한 별도의 설명(정의)없이 구체적인 문제의 해설 과정에서 "비"라는 용어를 사용하고 있다.

그러나 미국과 일본의 교과서에서는 이와 달리 용어 "비"에 대한 별도의 설명(정의)을 제시하면서 사용하고 있다. 또 도형의 닮음에서도 정의에 약간의 차이가 있으며, 삼각형의 닮음에 대한 내용전개 과정도 우리나라와 일본의 경우는 우선 삼각형의 닮음 조건을 직관적으로 제시한 후 삼각형의 변을 자르는 평행선과 잘린 선분의 길이의 비에 대한 내용들을 다루고 있지만, 미국의 경우에는 역으로 삼각형의 변을 자르는 평행선과 잘린 선분의 길이의 비의 관계를 공준(또는 정리)로 도입한 후에 삼각형의 닮음 조건을 정리로 증명하고 있어 서로 다르게 되어 있다.

따라서 여기서는 우선 수학에서 가장 고전적이면서 기본적인 도서로 되어 있는 유클리드 원론(제 Ⅴ권, 제 Ⅵ권)에서는 비와 닮음의 도입과 그 내용 전개를 어떻게 하고 있는가를 분석하여 우리나라의 교과서와 비교 고찰하여보고, 다음에 우리나라의 교과서와 외국의 교과서로 미국과 일본의 교과서 내용을 비교 분석하여 각 교과서마다의 장단점을 알아본다. 특히 여기서 장점을 활용하여 비와 닮음에 대한 바람직한 학습지도 내용을 제시하여 수학교육의 발전에 도움이 될 수 있게 하려는 것이 이 논문의 목적이다.

Ⅱ. 유클리드 원론(제 Ⅴ권, 제 Ⅵ권)에서의 비와 닮음

성경을 제외하고는 유클리드 원론보다 더 널리 연구되고 더 많이 편집된 책은 없다. 2000년 이상 동안 유클리드 원론은 모든 기하학 교육을 좌우했으며, 1482년에 처음으로 인쇄된 이래 1000번 이상 재판되었다. 현재 미국의 교과서에서 기하학에 관한 내용은 대부분 유클리드 원론에서 찾아볼 수 있다.[H Eves(1990)]

따라서 비와 비례에 관한 교과용 도서를 살펴보는데 우선 그 부분에 대한 유클리드 원론을 살펴보는 것은 의의 있는 일이다. 여기서는 유클리드 원론 제 Ⅴ권에서의 비에 관한 내용과 제 Ⅵ 권에서의 닮음에 관한 내용을 간단히 살펴본다.

1. 유클리드 원론 제 Ⅴ권의 고찰

가. 제 Ⅴ권 비율의 정의에 대한 고찰

유클리드 원론의 제 Ⅴ권은 비에 대한 내용을 다루고 있는데 18 개의 정의로 시작하고 있다. 여기서 주목해야할 몇몇 정의를 살펴보면 다음과 같다. 우선 정의 1, 2에서는 두 양의 비교에서 몫(part)과 곱(multiple)에 대하여 논하였다. 곧

* 정의 1. : 어떤 작은 양으로 큰 양을 잴 때, 그 작은 양은 큰 양의 몫(약수)이라 한다.
* 정의 2 : 어떤 큰 양이 작은 양으로 재어질 때, 그 큰 양은 작은 양의 곱(배수)이라고 한다.

원론의 정의에는 '몫'에 해당되는 용어로 'part'을 사용하였는데, T. L. Heath(1956)는 이곳

에서 사용한 'part'는 '전체는 부분보다 크다.(the whole is greater than the part)'에서의 'part'와는 다른 것으로 '약수(submultiple 또는 aliquot part)'인 의미로 사용된 것이라고 해설하였다.

위의 정의 1, 2의 몫, 곱은 학교에서는 비의 부분 이전에 취급하고 있지만 유클리드 원론에서는 비에서 도입하고 있는 것을 알 수 있다.

다음에 정의 3, 4 에서는 '비(ratio)'와 '비를 갖는다(have a ratio)' 를 정의하고 있다.

* 정의 3 : 비란 같은 종류인 두 양 사이의 크기에 관한 한 관계를 말한다.

T. L. Heath(1956)는 이 정의에 나오는 "비(ratio)" 를 "상대적 양(relative magnitude)"으로 본 드모건의 해석을 제시하였다. 이곳에서의 정의를 살펴보면 우선 비의 정의가 같은 종류의 두 양에 한해서 단순히 대소 관계만을 말하는 것이고, 그 표현이라든가 두 수의 위치관계 등에 대한 언급이 없다. 비를 처음 도입하고 있는 초등학교 교과용 도서를 간단히 살펴보면, 비(ratio)에 대해서 우리나라의 6학년 교과서에서는 "두 수의 비를 알아보자"라는 제목 아래 비에 대한 학습을 하고 있지만 용어 비에 대한 설명은 없다. 그러나 미국의 5학년 교과서[R I. Charles et al.(1998)] 에서는 "양들을 비교하기 위해 사용된 수들의 한 쌍"이라고 하였고, 5학년 교과서[R I. Champagne(1992]에서는 "두 양의 비교"라고 하였다. 교과서[R E. Eicholz et al.(1998)]에서는 비를 처음 도입하는 5학년 과정에서 비(비율)을 세 가지 방법으로 표현하고 있다. 곧, "a to b, $a:b$, $\frac{a}{b}$ "와 같이 말로 표현, 콜론(colon)표현, 분수 표현을 함께 제시하고 있다. 일본의 5학년 교과서[杉山吉茂 외 34인(2001)]에서는 "비교되는 양을 원래의 양으로 나누어 나타낸 수"를 비율(割合)이라 하였다.

* 정의 4 : 곱(배수)을 하였을 때 서로 다른 것 보다 커지게 할 수 있는 양들은 비(비율)를 갖는다고 한다.

이 정의 4는 두 양이 대소 관계에서 서로 변할 수 있는 경우에 비율을 가진다는 것으로 그 범위를 한정한 것이며, 이를 테면 양이 0 이거나 ∞ 에 대해서는 비율을 생각하지 않는 다는 것을 말하고 있다. 이 정의의 내용은 초등학교 교과서에서 비율을 도입하면서 아무런 제시 없이 당연한 것으로 그냥 사용하고 있다. 다음 정의 5에서 '같은 비(in the same ratio)'에 대하여 논하였는데, 이 정의에 의하여 같은 단위로 측정할 수 있는 크기뿐만 아니라 같은 단위로 측정할 수 없는 크기에도 적용이 가능하게 된 의의 있는 정의이다.

* 정의 5 : 네 개의 양이 있는데, 첫째와 셋째에 어떤 등배수를 하고 둘째와 넷째에 어떤 등배수를 했을 때, 전자(첫째와 셋째)의 등배수들이 후자(둘째와 넷째)의 등배수 보다 각각 같이 더 크거나, 전자들이 후자들과 각각 같이 같거나, 전자들이 후자들보다 각각 같이 더 작게 될 때, 첫째와 둘째의 비가 셋째와 넷째의 비와 같다고 한다.

곧, 임의의 수 m, n 에 대하여 $\begin{cases} na > mb \\ na = mb \\ na < mb \end{cases}$ 이면 같은 순서대로 $\begin{cases} nc > md \\ nc = md \\ nc < md \end{cases}$ 일때, $a:b=c:d$ 이다.

이 정의에 의하여 피타고라스학파에 의한 무리수의 발견으로 야기된 논리적 추문이 해결되

었는데[H. Eves(1990)], 이 정의도 초등학교 교과서에서 비를 도입하면서 아무런 언급이 없이 사용하고 있다. 정의 6에서는 '비례한다(proportional)'를 정의 하였는데 다음과 같다.

* 정의 6 : 같은 비를 갖는 양들을 비례한다고 한다.

이를테면 a, b가 c, d와 비가 같을 때, 이들 네 양은 비례한다(proportional, or in proportion)고 한다. 곧 $a:b$가 $c:d$와 같을 때 그 양들이 비례한다고 한다. 이 정의는 초등학교 교과서에서 비를 도입하면서 사용하고 있다.

미국의 교과서[R E. Eicholz et al.(1991)]에서는 비율 5 : 9, 10 : 18, 15 : 27, 20 : 36 같은 비(equal ratios)라고 하여 비가 같은 경우를 알아보고 있고 , 일본의 교과서[杉山吉茂 외 34인(2001)]에서도 이를테면 $2:3$과 $10:15$의 관계를 조사하여 비가 같은 경우를 알아보고 있는데, 우리나라의 교과서에서는 이 에 대한 언급이 없다. 그리고 비의 값 곧 비의 분수 표현으로 $2:3 \Rightarrow \frac{2}{3}$ 과 $4:6 \Rightarrow \frac{4}{6}$ 에서 "$2:3 = 4:6$과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라고 한다."와 같이 비례식의 정의에서 "비의 값이 같은 두 비"를 서술하고 있다. 정의 7에서는 비에서의 대소 관계 곧 '더 큰 비(greater ratio)'를 언급하고 있다.

정의 7. 등배수에서 첫 번째 양의 배수가 두 번째 양의 배수 보다 크고, 세 번째 양의 배수가 네 번째 양의 배수보다 크지 않을 때, 첫 번째 양의 두 번째 양에 대한 비가 세 번째 양의 네 번째 양에 대한 비보다 크다.

이 정의는 정의 5에서 생각하면, 어떤 수 m, n이 존재하여 $na > mb$이지만 nc는 md 보다 크지 않을 때, $a:b > c:d$ 라고 하는 것이다. $c:d$는 더 작은 비라고 한다.

이 정의에서 비의 대소관 계를 정의하고 있는데, 초등학교 교과서에서는 비에서의 대소 관계를 특별히 정의하지 않고 있다. 정의 8은 '비례식(proportion)'을 이룰 조건을 언급하고 있다.

* 정의 8 : 비례식은 적어도 세 개의 항으로 가능하다.

이 내용을 문자를 사용하여 나타내면, 비례한다는 것에는 적어도 세 개의 양 a, b, c가 있어야 한다. 이 정의는 비례식이 존재하기 위한 조건을 언급한 것인데, 물론 초등학교에서는 이와 같은 조건은 제시하지 않고 당연한 경우에 한해서 학습한다. 정의 9, 10은 비의 '제곱비(duplicate ratio)', '세제곱비(triplicate ratio)'에 대하여 언급하고 있다.

* 정의 9 : 세 개의 양이 비례할 때, 첫째와 셋째의 비는 첫째와 둘째의 제곱비이다. 곧, 세 양 a, b, c에서 $a:b = b:c$이면, $a:c = a^2:b^2\ (=(a:b)^2)$이다.
* 정의 10 : 네 개의 양이 연달아 서로 비례할 때, 첫째와 넷째의 비는 첫째와 둘째의 세제곱비이다. 비례식에서 이런 식으로 계속된다. 곧, 네 양 a, b, c, d에서 $a:b = b:c = c:d$ 이면, $a:d = a^3:b^3 (=(a:b)^3)$이다.

정의 11은 비례식에서 항의 '대응(correspond)'에 대하여 언급하고 있다.

* 정의 11 : 용어 대응하는 양은 비에서 전자는 전자(첫째에 대해서는 셋째, 셋째에 대해서는 첫째)에,

후자는 후자(둘째에 대해서는 넷째, 넷째에 대해서는 둘째)에 사용한다.

곧, 비례식 $a : b = c : d$에서 a와 c는 전자 이므로 a와 c는 대응하는 항이고, b와 d는 후자이므로 b와 d는 대응하는 항이다. 초등학교 교과서에서는 특별히 이 부분을 따로 정의 하고 있지 않다. 그리고 다음의 정의 12부터 정의 18까지의 정의도 초·중등학교 교과서에서 특별히 정의로 내세워 사용하고 있지 않으므로 이 이상은 이곳에서 논의하지 않는다.

나. 제 V권의 명제에 대한 고찰

제 V권에서는 25개의 명제를 제시하였는데, 그 중 앞의 몇 개만 현대적인 입장에서 기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

명제 1, 다른 어떤 양들 a, b, c에 대하여 $A = Ma$, $B = Mb$, $C = Mc$ 라고 하면, $A + B + C = M(a + b + c)$ 이다.

명제 2, 여섯 개의 양 a, b, c, d, e, f에 대하여 $c = Md$, $a = Mb$이고, $f = Nd$, $e = Nb$ 라고 하면, $c + f = Md + Nd = (M + N)d$,

$a + e = Mb + Nb = (M + N)b$ 이다.

명제3, 어떤 양 a, b, c, d에 대하여 $a = Mb$, $c = Md$ 라고 하면

$Na = N(Mb) = (NM)b$,

$Nc = N(Md) = (NM)d$ 이다.

명제 4, $a : b = c : d$ 라고 하면, $Ma : Nb = Mc : Nd$ 이다.

명제 5, $a = Mb$이고, $a - c = e$, $b - d = f$에 대하여 $c = Md$라 하면, $e = Mf$이다. 이 법칙은 결국 $Mb - Md = M(b - d)$ 이다.

이곳에서 다룬 명제 25개를 살펴보면 그들 일부의 증명은 너무나 나름대로 엄밀하고 복잡하다. 그러나 비의 도입에서 비의 표현으로 분수를 사용을 함께한다면 초등 또는 중등학교 과정의 수체계의 성질에서 그 활용을 쉽게 할 수 있을 것이다.

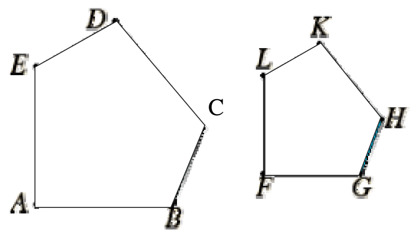
따라서 이곳에서 다루고 있는 명제들의 일부라도 초등학교 과정에서 취급할 수 있도록 연구하고 그 결과를 널리 활용할 수 있도록 하는 것은 의의 있는 일이다. 왜냐하면 학생들로 하여금 이와 같은 폭넓은 비의 성질을 활용할 수 있도록 하는 것은 비가 연관된 학습내용에로의 학습 진전에 많은 효과가 있을 것이다.

2. 유클리드 원론 제 Ⅵ권의 고찰

가. 제 Ⅵ권의 정의에 대한 고찰

제 Ⅵ 권에는 5개의 정의로 시작하여 33개의 명제가 있다. 우선 5개의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

정의1. 닮은꼴 다각형이란 두 다각형이 각들이 각각 크기가 같고, 같은 각에 대한 변들이 같은 비를 갖는 것을 말한다.



이를테면, 다음의 두 오각형 $ABCDE$와 오각형 $FGHKL$이 서로 닮은 도형이기 위하여는 순서대로 잡은 대응각들이 같고, 곧

$\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle G$, $\angle C = \angle H$,

$\angle D = \angle K$, $\angle E = \angle L$

이고, 이들 같은 각들에 대한 변들이 차례로

같은 비를 갖는 것이다 곧,

$EA:AB = LF:FG$, $AB:BC = FG:GH$,

$BC:CD = GH:HK$, $CD:EF = HK:KL$,

$EA:AB = KL:LF$ 이아야 한다.

도형의 닮음에 관한 정의로 우리나라와 일본의 교과용 도서는 위의 정의 1과 달리 “ 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 다른 도형과 합동이 되게 할 수 있을 때, 이 두 도형은 서로 닮은 도형이다.” 또는 “어떤 도형을 모양을 바꾸지 않고 확대 또는 축소하여 얻은 도형은 본래의 도형과 닮았다.”고 하고 있다. 그러나 미국의 교과용 도서들에서는 위의 정의를 그대로 사용하고 있다.

나머지 3개의 정의는 직접 닮음을 언급한 것은 아닌데 다음과 같다.

정의 2. 두 도형이 상반으로 관계된다는 것은 대응각들에 대한 변들이 상반으로 같은 비를 갖는 것을 말한다.

정의 3. 한 직선이 황금비(黃金比 또는 외중비(外中比))로 잘렸다는 것은 전체 직선에 대한 긴 선분의 비가 긴 선분에 대한 작은 선분의 비와 같음을 말한다.

위 그림에서

$AB:AC = AC:CB$

이면 직선 AB는 점 C 에서 황금비로 잘린 것이다.

정의 4. 어떤 도형의 높이는 꼭짓점으로부터 밑변에 그은 수선이다.
유클리드 원론에 높이가 사용된 평면 도형은 삼각형과 평행사변형뿐이다.

정의 5. 함께 곱하여진 비의 크기가 어떤 비(또는 크기)를 만들 때의 비를 비의 복합이라고 한다.

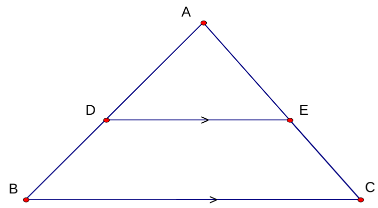
나. 제 Ⅵ권의 명제에 대한 고찰

제 VI 권에서의 명제들 중에서 삼각형의 닮음에 관한 것들을 취급하기 전까지 6개의 명제를 제시하였는데 그들을 살펴보면 다음과 같다.

명제 1 : 삼각형들이나 평행사변형들이 높이가 같으면 그들의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다.

유클리드 원론에서의 증명은 실험이나 관찰의 결과로 얻은 것이 아니라 몇 개의 공준과 공리로부터 연역적인 추론에 의하여 논리적이며 필연적인 결론에 이르도록 한 것으로 그 증명 과정을 살펴보는 것은 의의 있는 일이다. 다음 명제는 삼각형의 닮음에 관한 명제들의 증명에 기본이 되는 명제로 이 명제의 증명도 앞의 내용만을 사용하여 증명하였으므로 그 증명 과정을 부록에 제시하였다.

명제 2 : 한 직선을 삼각형의 한 변에 평행하게 그으면, 그것은 삼각형의 변을 같은비를 갖도록 자른다. 그리고, 삼각형의 변들이 같은 비를 갖도록 잘리면 절단 점을 잇는 직선은 삼각형의 나머지 변과 평행이다. 곧 오른쪽 그림에서



$BD:AD = CE:AE \quad \Leftrightarrow \quad DE \,//\, BC$

유클리드 원론과 미국의 교과용 도서에서와 달리, 위의 명제 2를 우리나라와 일본의 교과용 도서에서 살펴보면, 그 순서가 삼각형의 닮음조건을 다룬 후인 평행선과 선분의 비 부분에서 다루고 있다. 우리나라와 일본의 교과용 도서에서는 삼각형의 닮음조건을 증명없이 직관적으로 도입하고 있는데, 유클리드 원론과 미국의 교과용 도서에서는 위의 내용들과 다음 명제 2를 사용하여 우리나라와 달리 삼각형의 닮음 조건을 증명하고 있다.

명제 3 : 삼각형의 한 각을 이등분하는 직선이 밑변을 자르면, 이 때 생긴 밑변의 두 선분의 길이의 비는 삼각형의 다른 두 변의 길이의 비와 같다. 역으로 밑변을 그 삼각형의 다른 두변의 길이의 비로 나눈 점을 꼭짓점과 잇는 직선은 그 각을 이등분한다.

명제 4 : 등각 삼각형들에서 같은 각에 대한 변들은 같은 비를 갖는다. 여기서 대응변은 같은 각들이 마주 보는 변들이다.

명제 5 : 두 삼각형이 변의 비가 같으면, 두 삼각형은 대응변에 마주보는 각이 같은 등각삼각형들이다.

명제 6 : 두 삼각형이 한 각이 서로 같고, 같은 각에 대한 변의 비가 같으면 그 삼각형들은 대응변에 마주보는 각들이 같은 등각삼각형이다.

III. 교과용 도서에서의 비와 닮음의 취급에 대한 고찰

1. 비에 대한 고찰

비에 대한 고찰로 제 7차 교육과정 수학교과중에 처음으로 제시된 초등학교 6-가의 비와 비율 단원과 비례식 단원을 같은 내용을 다룬 유클리드 원론과 외국의 교과서로 미국과 일본의 교과서에 대해 비교 고찰한다.

가. 비의 정의에 대한 고찰

우리나라의 수학교육에서 비는 초등학교 교과서 6-가 6단원에 처음으로 제시되고 있다. 학습 목표는 '두 수의 비를 알아보자', '비율과 비의 값을 알아보자', '백분율에 대하여 알아보자', '할 푼 리에 대하여 알아보자', '문제를 해결하여 보자', '실생활에 적용하여 보자' 이렇게 6개의 학습목표로 이루어져 있고, 비와 비율의 정의는 '약속'을 통하여 다음과 같이 표현을 하고 있다. 우선 비에 대한 표현을 제시하면 다음과 같다.

" 남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 " : " 를 사용한다.

남학생 수 여학생 수 5 명을 비교하는 것을 3 : 5 로 나타내고, 3 대 5 라고 읽는다.

이것을 5 에 대한 3 의 비 또는 3 의 5 에 대한 비라 하고 간단히 3 과 5의 비라고 한다."

위에 제시한 것과 같이 초등학교 교과서에서는 <6-가 비와 비례식>에서 우선 비를 나타낼 때 사용하는 표현 방법과 비를 읽는 방법, 그리고 비를 표현하는 방법을 기술하고 있지만 용어 "비"에 대한 부가적 설명은 없이 내용을 도입 전개하고 있다. 그러나 유클리드 원론에서는 정의 3에서 「비란 같은 종류인 두 양 사이의 크기 관계를 말한다.」라고 하고 있다. 그리고 초등학교 교과서 6-가 6단원의 비율과 비의 값을 알아보자 에서 비율의 정의를 다음과 같이 하고 있다.

"자원 봉사자 8 명을 기준으로 하여 여자 5 명을 비교할 때, 8 명을 기준량, 5 명을 비교하는 양이라고 한다. 기준량에 대한 비교하는 양

의 크기를 비율이라고 한다. 기준량을 1로 볼 때의 비율을 비의 값이라고 한다. 자원 봉사자 8명을 1로 볼 때, 8에 대한 5의 비의 값은 $\frac{5}{8}$ 이다. (비율) = $\frac{(비교하는\ 양)}{(기준량)}$ ”

여기서 살펴 볼 것은 비율이 바로 비의 값이 되는데, 내용의 주제에서는 서로 다른 것처럼 제시하고 있어 혼란을 일으킬 수 도 있다. 특히 기준량을 1로 본다는 것을 구하기 위하여는 조금은 복잡한 계산을 하여야 하는데 비, 비의 값을 함께 사용한다면 이러한 어려운 점들이 해소 될 것이다. 미국의 교과서에서는 물론 일본의 교과서에서도 비의 값이라는 용어를 새롭게 사용하고 있지 않다.

그리고 유클리드 원론에서는 원론답게 정의로 “정의 4 : 두 양이 서로 어떤 비를 가진다(비가 있다)는 말은, 어느 것이든 곱을 하면 다른 것보다 더 커지게 할 수 있다는 뜻이다.” 라고 하여 두 양이 대소 관계에서 서로 변 할 수 있는 경우에 한하여 비를 가진다는 것으로 그 범위를 한정한 것이며, 이를 테면 양이 0 이거나 ∞에 대해서는 비를 생각하지 않는 다는 것을 말하고 있다. 우선 이곳의 정의를 살펴보면, 언어의 사용관계에 따른 나라의 차이에서 오는 것인지 모르겠지만, 이곳에서는 우리나라의 경우와 달리 용어 “비” 와 “비율”에 대한 구분이 없이 같이 사용하고 있다. 이러한 상황은 현행 미국의 교과서에서도 마찬가지이다. 그 장단점은 연구 해볼 한 과제가 될 수도 있다. 왜냐하면, “비” 와 “비율”을 우리나라와 달리 구분이 없이 같이 사용하는 경우에 편리한 점이 많이 있기 때문이다.

다음에 원론의 정의에 나오는 두 양 사이의 크기 관계란, 한 양이 다른 양에 들어 있는 개수를 의미한다고 드모건은 말했다. 어떤 양들의 크기 관계를 말로써 표현하려면, 그것들이 상대방 속에 얼마나 들어 있는지 말하지 않으면 안 되기 때문이다. 유클리드의 정의가 전달하려는 것은, 양을 가지고 양을 표현하는 방법은 그것이 얼마나 있느냐를 이용하는 방법뿐임을 말하고 있다고 드모건은 해석하였다.[T. L. Heath(1956)]

일본의 경우는 우선 5학년 교과서(하)(杉山吉茂 외 34인, 2001)에서 “비교되는 양을 원래의 양으로 나누어 나타낸 수”를 비율(割合)이라 하였고 이어서 비율로 나타낸 0.01을 1 퍼센트라하고, 1% 로 나타내고, 퍼센트로 나타낸 비율(割合)을 백분율이라고 하여 다루고 있다. 그리고 6학년 교과서(상)의 비율의 표현 방법에서 “2와 3의 비율(割合)을 기호 「:」을 사용하여 2:3으로 나타내고 이것을 「이 대 삼」이라고 읽는다고 하였으며 비율(割合)을 이와 같이 나타낸 것을 “비”라고 한다고 하였다.

미국의 경우에 비의 도입과정을 살펴보면 다음과 같다. 우선 비의 정의는 초등학교 5학년 과정의 교과서[C S. Barnett et al. (1998)] 에서 “비(ratio)는 양을 비교할 때 사용하는 수의 쌍 (A pair of numbers used to compare quantities)” 이 라고 처음 나온다. 또 6, 7학년 교과서[R I. Charls et al.(1998)]에서 ‘비는 두 양들의 비교 (A comparison of two quantities.)’ 라고 하였고, 그 표현 방법으로 이를테면, ‘$\frac{8}{14}$, 8 : 14, 8 to 14’과 같이 세 가지 방법이 있으며 이들은 모두 ‘8 to 14’ 와 같이 읽는다고 하였다. 8학년 과정에서는 “비를 나눗셈에 의한 두 양의 비교 (A comparison of two quantities by division.)”라고 하였다.

미국의 경우 비를 처음 도입하는 5학년에서 비를 세 가지 방법으로 표현하고 있다. 곧, “ a to b, $a:b$, $\frac{a}{b}$ ”와 같이 말로 표현, 콜론(colon) 표현, 분수 표현을 함께 제시하고 있다. 그리고

읽을 때는 "a 대 b(a to b)"라고 한다고 하였다. 이와 같은 표현은 "to"를 사용한 언어 표현과 ,기호 ":"을 사용한 비의 표현과 분수로의 표현을 처음 도입부터 함께 혼용하기 때문에 서로 다른 것으로 생각하지 않게 되어 그 사용에서 편리한 점이 많이 있다. 실제로 유럽의 프랑스 교과서[J Malaval et al.(1995)], 이탈리아 교과서[E. BOVIO-L.MANZONE BERTONE (1992)]를 살펴보면 나눗셈에서 나눗셈기호 "÷"를 사용하지 않고 비에서의 표현방법인 기호 ":" 또는 "분수 표현"을 사용하고 있다.

그리고 6, 7 학년 교과서[R I. Charls et al. (1998)]에서 "측정 단위가 다른 두 양의 비교를 Rate 라고 한다.(A rate is a comparison of two quantities with different units of measure.)", 곧, '양의 측정 단위가 다를 때의 비를 Rate 라고 한다.' 고 하여 Rate를 비(ratio)의 특수한 경우로 구분하여 사용하고 있으며, 다음과 같은 보기를 들어 그 구분을 할 수 있도록 하였다.

$\frac{6\ miles}{5\ miles}$ Both measured in miles

→ Not a rate

$\frac{6\ miles}{5\ hours}$ One measured in miles,

one measured in hours → rate

그리고 비교가 한 단위에 대한 것, 곧 rate 에서 두 번째 양의 측도가 한 단위이면 그것을 단위 rate 라고 한다고 하며 다음과 같은 보기를 제시하였다.

rate	Unit rate
$\frac{40\ points}{5\ games}$	$\frac{8\ points}{1\ games}$

그리고 '한 품목에 대한 값을 제시하는 단위 rate 를 단가(unit price)라고 한다.' 고 하였다.

위의 교과서들을 고찰해보면, 우리나라와 달리 초등학교 5학년과정에서 처음 비를 도입하면서도 비의 정의를 하고 있다는 것이고, 계속 다음 단계에서도 그 단계에 맞게 정의에 대한 재 언급을 하고 있다. 그리고 우리나라와 달리 측정단위가 서로 다른 경우의 비를 특히 rate 라고 하여 구분을 하였다. 여기서 측정단위가 다른 경우로 유리수와 무리수의 경우를 생각해 본다면 비(ratio)와 비율(rate)의 구별을 학습한다는 것은 많은 교육적인 의미를 내포하고 있는 것으로 볼 수 있다. 용어 "rate"의 사용을 사전[Jame/Jame(1992), 日本數學敎育學會(2002)]에서 살펴보면, "변화율(rate of change),이율(the rate of interest), 성장률(a rate of growt)h, 사망률(rate of mortality), 예금이율(a deposit rate), 담보율(bond rate)"
와 같이 사용하므로 그 번역을 "율(또는 비율)"이라고 하면 어떨까 한다.

그리고 이 교과서들에서는 같은 비에 대하여도 5학년에서는 "같은 비(Equal ratios)란 같은 비교를 제시한 비를 말한다.", 7학년에서는 "동치인 비(Equivalent ratios)와 동치인 비율(equivalent rates)이란 역시 같은 수를 말한다. 이를테면, $\frac{3\ bones}{1\ ear}$ is equivalent to $\frac{6\ bones}{2\ ears}$", 8학년에서는 "같은 비란 같은 양을 일컫는다. 그들은 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어서 구할 수 있다."와 같이 계속하여 제시하고 있다.

또 미국의 9학년 교고서[Dressler & E P Keenan(1998)]에서는 비에 대하여 다음과 같이 도입전개하고 있다.

"비는 나눗셈으로 두 양을 비교하는 것을 뜻한다. 나눗셈에 의한 두수의 비교인 비는 첫 번째 수가 0이 아닌 두 번째 수로 나누어질 때 얻어진 몫이다. 비는 수의 순서쌍으로 생각할 수도 있고, 두 수의 비를 구하는 것은 한 이항 연산이다. 일반으로 b에 대한 a의 비는 $\frac{a}{b}$, 또는 $a \div b$, 또는 $a : b$로 나타낼 수 있다." 또 같

은 교과서 10학년용에서 “수 a 와 b를 이 비의 항이라고 하고, . 비 $\frac{a}{b}$는 “ a 대 b” 로 읽는다.”고 하고 있다.

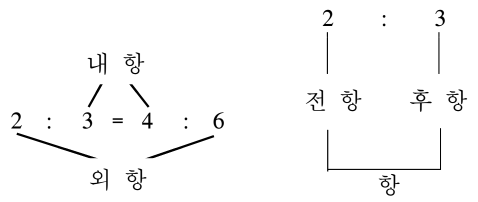
연비는 정해진 순으로 셋 또는 그 이상의 양의 비교이다. 일반으로 수 a , b , c(b, $c \neq 0$) 의 비는 $a:b:c$ 이다.

비와 같이 비율은 두 양의 비교인데, 이들 양들은 다른 측정 단위를 가질 수 있다.“

10학년 교과서[I Dressler & E P Keenan (1998)]에서는 “정의 : 두 수 a 와 b (단, b는 0 이 아님)의 비는 수 $\frac{a}{b}$ 이다. 비 $\frac{a}{b}$ 는 $a:b$ 로도 쓸 수 있으며, 수 a 와 b를 이 비의 항이라고 한다. 비 $\frac{a}{b}$는 “ a 대 b” 로 읽는다. ” 고 하였다.

나. 비례식에 대한 고찰

다음에 비례식에 대하여 우리나라의 6학년 교과서에서는 다음과 같이 정의 하고 있다.



″ $2:3=4:6$ 과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 **비례식**이라고 한다. 비 $2:3$ 에서 2 와 3 을 비의 항이라 하고, 앞에 있는 2 를 **전항** 뒤에 있는 3 을 **후항**이라고 한다. 비례식 $2:3=4:6$ 에서 바깥쪽에 있는 두 항 2 와 6 을 외항이라 하고, 안쪽에 있는 두 항 3 과 4 를 내항이라고 한다.″

여기서 살펴볼 것은 우선 우리나라의 교과서에서는 외국의 초등학교 교과서들에서는 하고 있지 않는 비례식에서의 용어 정의를 너무나 세밀할 정도로 하고 있으면서도, 외국의 모든 교과서들에서 언급하고 있는 같은 비에 대해서는 따로 언급하지 않고 있다. 그리고 비의 값 곧 비의 분수 표현으로 $2:3 \Rightarrow \frac{2}{3}$ 과 $4:6 \Rightarrow \frac{4}{6}$ 에서 “ $2:3=4:6$ 과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라고 한다.”와 같이 비례식의 정의에서 “비의 값이 같은 두 비”를 서술하고 있다. 여기서 사용하는 용어를 살펴보면, 미국, 일본의 경우에는 전항, 후항, 외항, 내항, 비의 값과 같은 용어들은 초등학교 과정에서 사용하지 않고 있다.

유클리드 원론에서는 정의로 “정의 6 : 어떤 양들이 비율 같으면 서로 비례한다고 말한다.” 고 하였다.

일본의 6학년 교과서(상)[杉山吉茂 외 34인 (2001)]에서는 이를테면 $2:3$ 과 $10:15$ 의 관계를 조사하여 비율이 같은 경우를 알아보고, 「■ : ● 의 ■ 과 ● 에 같은 수를 곱하거나 같은 수로 나누어 생긴 비를 “같은 비”라고 하고, 다음과 같이 등호를 사용하여 나타낸다. $2:3=10:15$ 」 로 제시하고 있다. 일본의 경우 초등학교 과정에서는 비례식이라는 용어를 정의하여 사용하고 있지 않다.

비례식에 대한 취급을 미국의 교과서에서 살펴보면, 5학년 교과서[C S. Barnett et al.(1998)]에서는 “비례식(proportion)이란 두 비가 같은 명제이다.”, 6학년교과서[R I. Charls et al.(1998)]에서는 “비례식(proportion)이란 한 쌍의 같은 비이다. 비례식에서 두 비의 교차(십자)곱은 같다. 곧 $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$, $5 \times 6=30$ $2 \times 15=30$

비례식에는 서로 다른 측정 단위를 포함하는 경우가 있다. 단위는 가로로 위와 아래가 같거나 또는 좌 우변 아래로 같아야만 한다. 만일 단위가 대각선으로 같으면 그 비는 비례식을

이루지 않는다."고 하였고, 7학년에서는 "비례식은 두 비가 같든가 또는 비례하는 것을 보이는 명제이다. 비례식은 수 또는 말(단어)로 나타낼 수 있다. 곧 「$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, 일대 이는 삼대 육과 같다.」"고 하였고, 8학년에서는 "비례식은 두 비가 같음을 말하는 식이다."라고 하였다.

9학년 교과서[I Dressler & E P Keenan(1998)]에서 살펴보면, "비례식은 두 비가 같음을 말하는 식(equation)이다. 비례식의 일반형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq0,\ c\neq0)$ 또는 $a:b=c:d$. 이들 비례식은 각각 "a 대 b는 c 대 d와 같다"고 읽는다. 여기서, 첫째항과 넷째 항을 이 비례식의 외항(extremes)이라 하고, 둘째 항과 셋째 항을 중(내)항(means)이라고 한다. 비례식에서 중항의 곱은 외항의 곱과 같다."고 하였고, 10학년 교과서에서는 "비례식은 두 비가 같음을 언급하는 식이다. 비례식 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$는 $a:b=c:d$로도 쓸 수 있다. 네 수 a, b, c, d는 이 비례식의 항들이고, 첫째와 넷째 항 a, d는 이 비례식의 외항이고, 둘째와 셋째 항 b, c는 비례중항이다." 라고 하고 있다.

이상을 살펴보면 우리나라와 일본의 교과서들과 달리 미국의 교과서에서는 비에 관한 내용을 여러 학년에 걸쳐 점차적으로 깊게 다루어 가고 있다.

다. 비와 비례식에 연계된 학습내용으로의 활용에 대한 고찰

유클리드 원론 제 5 권에서 다루는 비의 이론은 다음의 제 6권 닮은꼴에서 그 활용이 이루어지고 있으며, 제7권에서 다루는 약수, 배수, 서로남남, 홑수 그리고 제 10권 무리수에서 다시 일부 같은 이론을 제시하면서 활용을 하고 있다. 연역적 추론에 따른 체계적인 수학 내용의 전개 과정에 이들의 활용은 반드시 필요할 수밖에 없다. 우리나라의 경우에는 6-가에서 비율의 활용으로 백분율을 다루고 그들을 실생활 문제의 해결에 적용해본다. 그리고 계속 잇대어 비율그래프를 지도한다. 그 후 6-나에서는 연비를 다루는데 그 내용이 교과서의 끝부분에 있어, 활용은 그에 관련된 실생활 문제의 해결에 적용해보는 정도이다. 그리고 제 7차 교육과정에서는 함수도입 이전에 정비례, 반비례에 관하여 다루고 있다.(제7차 개정안에서는 이 부분이 초등학교 과정으로 이동되었다.)

미국의 교과서에서 살펴보면, 5학년 교과서[R I. Charles et al.(1998)]에서는 비율의 활용으로 백분율을 다루고 다음으로 잇대어 확률을 다루고 있다. 또 6학년 교과서에서는 닮은도형, 백분율을 다루고 있다. 그리고 5학년 교과서[R I. Champagne(1992)]에서도 비율의 활용으로 축척 제도와 백분율을 다루고 다음으로 잇대어 확률을 다루고 있고 .6학년 교과서에서는 단리 이자 계산, 백분율 그리고 잇대어 확률을 다루고 있다.

일본의 5학년 교과서(하)[杉山吉茂 외 34인(2001)]에서는 우리나라와 같이 비율을 나타내는 그래프를 지도하고 있다. 그리고 6학년 교과서(상)에서는 비를 다루는 부분이 맨 끝이고, 다음의 교과서(하)에서 비를 사용하여 정비례인 변화 관계를 알아보고, 그 그래프도 지도한다,

이상으로부터 알 수 있는 것은 우리나라의 경우 비의 활용이 비의 내용에 대한 것 자체에서의 활용을 빼고는 비에 연계되는 학습 내용에 바로 잇대어 활용되는 부분이 미약함을 알 수 있다.

라. 학습지도 내용을 위한 제안

이제 앞의 내용을 참고로 하여 비에 대한 보

다 바람직한 학습 지도내용의 구성을 간단하게 제시한다. 우선 현행 교과서에서와 같이 비와 비율, 비의 값을 구분할 필요가 없다.

비는 두 양을 비교하는 한 방법(또는 두 양의 비교, 두 양을 비교하기 위하여 사용된 수들의 쌍, 분수로 표현된 두 수의 비교, 나눗셈에 의한 두 양의 비교)을 말하며, 이를테면 4명의 여학생의 수와 5명의 남학생의 수를 비로 나타내면 다음과 같다.

4 대 5, 4 : 5, $\frac{4}{5}$

이 정의를 이해하기 위한 예제와 문제들을 충분히 제시한다. 이곳에서는 특히 비를 분수 표현 쪽으로 이해하여 활용할 수 있도록 내용을 구성한다.

같은 비란 같은 비교를 보이는(제시하는)비들로 이를테면, 9/27과 1/3은 같은 비이다. 같은 비를 이해하기 위한 예제와 문제들을 충분히 제시한다. 여기서는 같은 비를 나타내는 표를 만들어 활용할 수 있도록 구성한다.

비례식이란 같은 비를 등호를 사용하여 나타낸 등식을 말한다. 여기서는 비례식의 도입 과정에서만 콜론(:)을 사용한 비례식을 이해하게 하고, 바로 분수를 사용하여 활용하게 한다.

그리고 비례식에서 사용하는 용어들은 가능한 한 줄여서 학생들로 하여금 용어에서 오는 어려움을 피하도록 한다. 특히 이곳에서는 유클리드 원론(V권)의 법칙들을 적당 한 수들을 사용하여 익힐 수 있도록 한다.

이를테면, “법칙4. $a:b=c:d$ 라고 하면, $Ma:Nb=Mc:Nd$이다.” 에서 각각의 문자에 적당한 수를 사용하여 이 법칙을 이해하여 활용할 수 있도록 한다. 곧, a = 2, b = 3, c = 4, d = 6이라 하고, M = 5, N = 7이라 하여 이 법칙을 이해하고 활용할 수 있게 한다. 여기서 물론 이들 법칙들에 대한 증명을 다루는 것은 아니고, 또 이들의 이해를 쉽게 하기 위하여는 비례식을 콜론(:)을 사용하여 나타내기 보다는 분수를 사용하여 나타내면 좋다. 유클리드 원론(Ⅴ권)의 다음 법칙들은 문자 대신에 적당한 수자를 사용하고, 콜론을 사용한 비례를 분수로 바꾸어서 이해하게 한다면 계속 연계될 학습에 큰 도움이 될 수 있을 것이다.

2. 닮음에 대한 고찰

우리나라의 중학교 교과용도서부터는 초등학교와 달리 검인정으로 그 종류가 많다. 따라서 각 교과서마다의 학습내용 도입 방법에 대하여 알아보고, 다시 일본, 미국의 교과서와 비교 분석하여 보면 다음과 같다.

가. 닮음의 정의에 대한 고찰

우선 우리나라의 교과서 별로 <닮음>의 정의를 살펴보면 교과서[강옥기 외(2004), 조태근 외(2004)]에서는“이와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 다른 도형과 합동이 되게 할 수 있을 때, 이 두 도형은 서로 닮은 도형이다 또는 닮음인 관계에 있다고 한다.”로 교과서[고성은 외(2003)]에서는 “한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 닮음인 관계에 있다고 하고, 닮음인 관계에 있는 두 도형을 닮은도형 또는 닮은꼴이라고 한다.”로 교과서[배종수 외(2004), 이영하 외(2004)]에서는 “두 도형이 서로 합동이거나 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 서로 닮았다 또는 닮음인 관계가 있다고 한다.”로, 교과서[신항균(2004)]에서는 “한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하거나 그대로 다른 도형에 포갤 수 있을 때, 이들 두 도형은 서로 닮았다 또는 닮음인 관계에 있다고 하고, 닮은 두 도형을 닮은 도

형 또는 닮은꼴이라고 한다."로 교과서[양승갑 외(2004)]에서는 "이와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소한 것이 다른 도형과 합동이 될 때, 이들 두 도형은 서로 닮음인 관계가 있다 또는 서로 닮았다고 한다."로 교과서[이준열 외(2004)]에서는, "두 도형이 서로 합동이거나 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 만든 도형이 다른 한 도형과 합동일 때, 이들 두 도형을 서로 닮음이라고 한다."로, 교과서[전평국 외(2004)]에서는 "두 도형이 서로 합동이거나 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소할 때, 이들 두 도형은 서로 닮았다 또는 닮음인 관계가 있다고 하며"라고 정의하였으며, 다른 경우는 한 도형을 확대 축소한 경우를 생각한 것으로 일정한 비율을 사용한 "한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 도형을 얻었을 때, 이들 두 도형을 처음 도형과 서로 닮음인 관계에 있다고 한다. 또 서로 닮음인 관계에 있는 두 도형을 닮은도형이라고 한다."[강행고 외(2004), 금종해 외(2004), 박규홍 외(2004), 박윤범 외(2004), 황석근 외(2004)]와 모양의 불변을 사용한 "어떤 도형을 모양을 바꾸지 않고 확대 또는 축소하여 얻은 도형은 본래의 도형과 닮았다 또는 닮음인 관계에 있다고 한다."[최용준(2004)]가 있다.

위의 정의들을 살펴보면 조금씩 차이가 있는데 이들 중 어느 것이 학생들의 이해를 쉽게 할 수 있는 것인가를 연구 논의해보고 보다 타당한 표현들을 제시하는 것이 바람직 할 것이다. 물론 표현 방법을 다양화 하는 것도 의의 있는 일이지만, 근본적으로 전하는 내용의 의미에 차이가 나면 혼란을 유래할 수 있다.

일본의 교과서[藤 田 宏 외33인(1998)]에서는 "한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 얻은 도형을 처음 도형과 닮았다(相似)고 한다."고 하였고, 교과서 [澤田利夫 외21인 (1998)]에서는 "어떤 도형을 확대 또는 축소한 도형이 있을 때 그 도형과 처음 도형은 닮았다(相似)고 한다."고 하였다. 교과서[福森信夫 외 27인(1998)]서는 "일반으로 두 개의 도형이 있어 한 쪽이 다른 쪽을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것과 합동이 될 때 그 두 도형은 닮았다고 한다."고 하였다. 교과서 [赤攝也외20인(1998)]에서는 교과서[福森信夫외 27인(1998)]에서와 같이 "어떤 도형을 확대 또는 축소한 도형과 합동인 도형을 처음 도형과 닮았다고 한다."고 하여 우리나라의 교과서들과 도입 방법이 같다.

미국은 6학년 교과서에서부터 닮음에 대하여 간단히 취급하기 시작하는데 6학년 교과서 [R I. Charls et al.(1998)]에서는 "같은 모양이지만 같은 크기일 필요는 없는 도형들이 닮은 도형들이다. 기호 「~」 은 「닮았다」를 뜻하는 기호이다. 한 도형이 다른 도형의 축척 모델이이면 그 도형들은 닮은 도형들이다."고 하였고, 중학교 1학년 과정에서는 닮음의 정의로 "대응각이 같고, 대응변의 길이의 비가 같은 도형들은 닮은 도형들이다. 대응변들의 길이의 비가 축척율(scale factor)이다."라고 하였으며, 중학교 2학년 과정에서는 "닮은 다각형은 모양은 같지만 크기는 같지 않아도 된다. 대응변들이 같은 비를 갖는다. 두 도형이 크기가 같을 필요는 없지만 같은 모양을 가지면 두 도형은 닮음이다. 닮은 도형에서 대응변의 쌍은 같은 길이 비를 갖는다. 닮은도형의 대응변 길이 사이의 비가 닮음비이다."고하였다. 여기서 살펴보면 닮음의 정의로 중학교 1학년 과정에서 우리나라와 달리 "대응각이 같고, 대응변의 길이의 비가 같은"이라고 하여, 다각형 사이에서 "크기에 관계없이 모양이 같다"는 막연한 표현 대신 구체적 사항을 제시했고 또 닮음의 기호도 우리나라와 일본과는 조금 다르게 표현하고 있

다.

중학교 3학년 교과서[I Dressler & E P Keenan(1998)]에서는 닮음에 대하여 "같은 모양을 가졌지만 크기가 같지 않은 다각형을 닮은 다각형이라고 한다. '닮은(similar)' 또는 '에 닮았다(is similar to)'는 기호 '~'로 나타낸다." 고 한 후에 닮은 다각형의 각과 변의 길이를 비교하여 보고 다음과 같이 말 할 수 있고 하였다.

"대응각이 합동이고, 대응변들이 같은 비를 갖는 두 다각형은 닮음이고, 역으로 두 다각형이 닮음이면, 대응각이 합동이고, 대응변들이 같은 비를 갖는다. 거꾸로, 삼각형의 두 각이 다른 삼각형의 대응하는 두 각과 합동(크기가 같으면)이면, 두 삼각형은 닮음이다."고 하였고, 다음 학년에서는 정의를 사용하여 두 다각형의 꼭짓점 사이에 일대일 대응이 있어 대응하는 모든 각들이 각각 합동이고 모든 대응하는 변들의 길이의 비가 각각 같으면 두 다각형은 닮았다고 정의하였다. 그리고 닮음비와 닮음의 동치관계를 취급하였다.

그러나 위와 다르게 중학교 3학년 교과서[G R. Risisng et al.(1989)]에서는 닮은 두 다각형을 각과 변의 관계에 대하여 조사해 본 후에 처음부터 두 다각형의 잇대어진 꼭짓점을 짝을 이루어 대응각이 합동이고, 대응변의 길이가 비례할 때 두 다각형은 닮았다고 정의하여 용어 모양 크기를 사용하지 않았다. 그리고 다음 학년의 교과서에서도 같은 정의를 반복하여 제시하였으며, 이교과서에서는 닮음비란 용어는 다루지 않고 있고 닮음의 동치관계는 취급하고 있다.

미국교과서를 살펴보면 우리나라 보다 일찍 그리고 늦게까지 닮음을 다루고 있고 닮음의 정의의 도입도 우리와 다르게 도입하여 삼각형의 닮음조건을 증명하는데 논리적으로 활용할 수 있게 되어 있다.

나. 닮음의 위치에 대한 고찰

교과서[강옥기 외(2004)]에서는 "다음 그림과 같이 합동이 아닌 두 닮은 도형의 대응하는 점을 연결한 직선이 모두 한 점 O에서 만날 때 두 닮은 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다." 고 하였는데, 합동인 경우에는 한 점에서 만나게 되지 않으므로 "합동이 아닌"이라는 수식어 없이 "두 닮은 도형의 대응하는 점(또는 꼭지점)을 연결한 직선이 모두 한 점 O 에서 만날 때, 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다."[금종해 외(2004), 신항균(2004), 양승갑 외(2004),이준열 외(2004), 전평국 외(2004)]고 하는 것이 좀 더 간단한 표현이 아닌가 생각된다. 이 때 "대응하는 점"과 "대응하는 꼭지점"의 두 표현이 있는데, 어느 쪽이 더 좋은가는 알아보아야할 것이다. 교과서[고성은 외(2003), 박윤범 외(2004)]에서는 직접 삼각형, 사각형을 두 배로 확대한 그림을 사용하여 대응하는 점끼리 각각 이은 직선은 모두 한 점 O에서 만나는 것을 언급하면서 이때 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다고 하였다.

교과서[강행고 외(2004)]에서는 도입 문제로 점 O에서 대응하는 꼭지점 까지의 거리의 비가 1 : 2 인 삼각형을 조사해 본 후에, 다른 교과서와 달리 "닮은 두 도형"에 대하여가 아니라 그냥 "두 도형" 에 대하여 "이와 같이 두 도형에 대하여 대응점을 이은 직선이 모두 한 점 O에서 만나고, 점 O에서 대응하는 점까지의 거리의 비가 일정할 때, 이 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 하며" 라 하였다.

교과서[박규홍 외(2004), 배종수 외(2004), 최용준(2004)]에서는 "두 닮은 도형에 대하여, 두 도형의 대응점을 연결한 직선이 모두 한 점 O 에서 만나고, 점 O에서 대응하는 점(꼭지점)까지의 길이(또는 거리)의 비가 모두 같을 때, 이 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다." 고 하

여 “대응하는 점(꼭지점)까지의 길이(또는 거리)의 비가 모두 같을 때”를 사용하였고, 교과서[박두일 외(2004), 황석근 외(2004)]에서는 “닮은 도형의 두 대응점을 지나는 직선이 모두 한 점 O에서 만나고, 대응하는 선분(또는 변)이 각각 평행일 때, 이 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다.”고 하여 “대응하는 선분(또는 변)이 각각 평행일 때”를 사용하였는데, 이러한 정의는 교과서[이영하 외(2004), 조태근 외(2004)]에서와 같이 정의의 도입을 평행선과 선분의 길이의 비 다음에 취급하는 것이 순서상 좋지 않을까 생각된다.

교과서[이영하 외(2004)]에서는 닮음의 위치를 평행선과 선분의 길이의 비 다음에 도입하면서 “앞 쪽의 문제 8에서 합동이 아닌 두 닮은 삼각형의 대응하는 변이 평행이면 대응하는 점을 이은 직선은 한 점에서 만남을 알 수 있다. 이와 같이 두 닮은 도형의 대응하는 점을 이은 직선이 한 점 O에서 만날 때, 이 닮은 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 하고”라 하였고, 교과서[조태근 외(2004)]에서도 닮음의 위치를 평행선과 선분의 길이의 비 다음에 도입하면서 “이와 같이, 두 도형에 대하여 대응하는 점을 이은 직선이 모두 한 점 O에서 만나고 점 O에서 대응하는 점까지의 거리의비가 모두 같을 때, 이 두 도형은 점 O를 닮음의 중심으로 하여 닮음의 위치에 있다고 한다.”고 하였다.

위의 용어의 정의도 교과서마다 도입 방법과 학습내용의 순서에서 차이가 있는데 그 적합성에 대한 논의가 필요하다고 본다.

일본의 교과서[藤 田 宏 외33인(1998)]에서는 “두 도형의 대응하는 점을 이은 직선이 모두 한 점 O에서 만나고, 점 O에서 대응하는 점까지의 거리의 비가 모두 같을 때 그들 도형은 O를 닮음의 중심(相似の中心)으로 하여 닮음의 위치(相似の位置)에 있다고 한다”고 하였고, 교과서[澤田利夫 외21 인(1998)]에서는 점 O를 적당히 정하여 $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$, $OC' = 2OC$ 되게 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$을 그린 후에 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$는 닮음의 위치에 있다하고, 점 O를 닮음의 중심이라고 한다고 하였다. 그리고 “닮음의 위치에 있는 두 도형은 닮았다”고 하였다. 교과서[福森信夫외 27인(1998)]에서는 닮음 도입에서 닮음의 위치를 사용한 도형으로 닮음을 도입하였고 이 때 뿐만 아니라 이후에도 닮음의 중심과 닮음의 위치란 용어는 사용하지 않았다. 교과서[赤攝也외20인(1998)]에서는 “닮은 도형의 대응하는 점을 지나는 직선이 모두 한 점 O에서 만나고 대응하는 선분이 모두 평행할 때 각 도형은 닮음의 위치에 있다고 하고 O를 닮음의 중심이라고 한다”고 하였다.

이상에서 알아 본 것과 같이 일본의 교과서들은 우리나라의 교과서와 그 취급 방법이 거의 같다. 단 한 종의 교과서에서만 닮음의 위치, 닮음의 중심이란 용어를 취급하지 않고 있다.

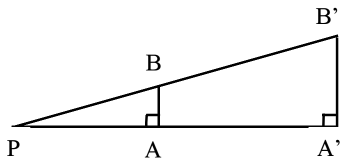
미국의 교과서들은 우리나라와 일본 교과서와 달리 닮음의 위치 및 중심에 대한 내용을 달음변환에서 변환으로 다루고 있다. 이를테면 중학교 3학년 교과서[I Dressler & E P Keenan (1998)]에서 취급하고 있는 방법을 간단히 살펴보면 다음과 같다. “각의크기는 변하지 않고, 길이는 바뀐 변환이 상사(닮음)변환(dilation)이다. 상사변환에서 그 상은 본래의 도형보다 크거나 작다. 곧 본래의 도형과 그 상은 서로 닮았다.

오른쪽 아래 그림(프로젝트 필름)에서 $\overline{AB}$는 필름을 나타내고, $\overline{A'B'}$ 은 스크린위의 상을 나타낸다.

$$\triangle PAB \sim \triangle PA'B'$$

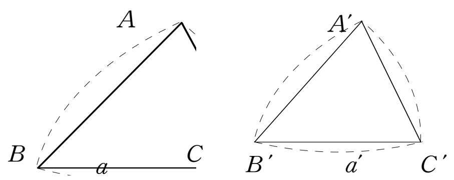
($\because$ $\angle P \cong \angle P'$, $\angle PAB \cong \angle PA'B'$)

점 P(고정점)를 상사변환의 중심이라고 한다."



다. 삼각형의 닮음조건 취급에 대한 고찰

삼각형의 닮음 조건에 대한 취급 방법을 알아보면 다음과 같다. 우선 우리나라의 교과서들은 두 닮은 삼각형을 각과 변의 길이에 대하여 비교하여 본 후 삼각형의 합동조건에서와 같이 삼각형의 닮음조건을 증명 없이 공준처럼 도입하여 사용하고 있다.



오른쪽 그림과 같은 두 삼각형은 다음 각 경우에 닮은꼴이다.

1 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때, 곧

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

2 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고,

$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, $\angle B = \angle B'$

3 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때, 곧

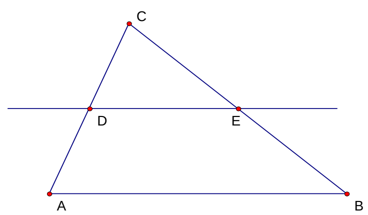
$\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

이와 같은 취급은 일본의 교과서[藤田宏외33인(1998), 澤田利夫 외21 인(1998), 福森信夫외 27인(1998), 赤攝也외20인(1998)]에서도 모두 같다.

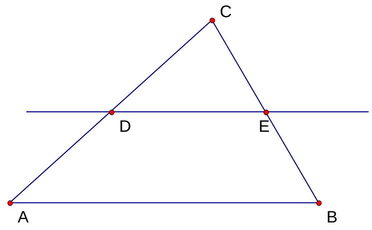
그리고 이 내용 다음으로 삼각형에서 평행선과 선분의 비를 다루고 있는데 이 방법은 미국의 교과서들과 순서가 반대인 경우이다.

미국의 중학교 3학년(9학년) 과정의 교과서[I Dressler & E P Keenan(1998), G R. Risisng 외 4인(1989)]에서는 모두 닮은 도형을 취급하기 전에 비를 함께 다루고 있으며, 삼각형의 닮음에 대하여 체계적인 증명 없이 간단히 언급하였다. 그러나 다음 단계의 교과서[I Dressler & E P Keenan(1998)]에서는 정리로 "삼각형의 두변의 중점을 잇는 선분은 제 삼의 변에 평행이고, 그 길이는 제 삼의 변의 길이의 반이다."를 증명한 후에 다음의 삼각형에서 평행선과 선분의 비에 대한 사항을 다음의 공준으로 도입하였고, 교과서[H. Pearson & J E. Lightner(1984)]에서는 비를 다루면서 다음 사항을 공준으로 도입하고 있다.

[공준]: 삼각형의 한 변과 평행한 직선이 다른 두 변과 만나면, 그것은 이들 변을 비가 같은 길이의 선분으로 나눈다.
곧, 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서
$\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{AB}$ 이면 $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ 이다.



[공준] : 한 직선이 삼각형의 두 변을 같은 비로 나누면, 그것은 제 삼의 변에 평행하다.
곧, 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서
$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ 이면 $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{AB}$ 이다.



그러나 교과서[G R. Risisng et al.(1989)]에서는 공준들 중 "$\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$ 이면 $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$"의 개략적인 증명을 비가 유리수인 경우로 한정하여 제시하고 있으며, 간접증명을 사용하여 "$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ 이면 $\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$"의 증명을 제시하고 있으며 교과서[H R. JACOBS(1990)]는 넓이를 사용한 다른 방법으로 증명을 했는데 이들은 부록에 제시한다. 그리고 교과서[J F.Ulrich(1987)]에서는 "$\triangle ABC$에서 $\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$ 이면 $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ 이다."의 증명은 그 단계를 넘기 때문에 증명 없이 사용한다고 하고 "$\triangle ABC$에서 $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ 이면 $\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$ 이다."의 증명은 간접증명법을 사용하여 증명하게 하였다.

유클리드 원론에서 삼각형의 닮음 조건을 증명하여 활용한 것처럼 미국의 교과서들 [I Dressler & E P Keenan(1998), K B. Henderson 외 2인(1962), R. JACOBS(1990), G R. Risisng 외 4인(1989), H. Pearson & J E. Lightner(1984), J F.Ulrich(1987)]에서는 위의 학습내용을 바탕으로 하여 모두 삼각형의 닮음 조건을 증명을 하고 있다. 특히 미국의 교과서[I Dressler & E P Keenan(1998), G R. Risisng et al.(1989), J F.Ulrich(1987)]에서는 작도에 관한 내용이 닮음을 다룬 후의 부분에서 취급하고 있다.

미국의 교과서는 삼각형의 닮음조건을 증명하기 위하여 삼각형의 변과 한 변에 평행인 선분의 관계를 공준으로 도입한 경우와 그들을 증명하여 사용한 두 경우가 있다. 어느 경우이건 우리나라와 일본의 교과서들과는 달리 삼각형의 닮음조건을 증명하고 있다.

어느 경우가 더 교육에 효과적인지는 나라와 그 나라의 문화에 따라 영향이 있을 수 있고, 또 학생 각 개인에 따라 다를 수 있을 것이다. 수학의 목표중 하나가 논리적 사고와 추론을 하도록 하게 하는 것임을 생각한다면 적당한 도입과정에 중간 이후의 내용 전개만 논리적 체계를 따라 엄밀하게 다루는 것이 마땅치 않은 수준의 학생들도 있을 것이다. 따라서 어느 특정한 한 경우만을 일률적으로 지도하는 것보다는 서로 다른 경우의 지도도 고려해보는 것이 좋을 것이다.

Ⅳ. 결 론

우리나라와 일본의 초등학교 교과서는 비의 취급에서 처음 도입과정을 상당히 비슷하게 도입하여 그것으로 끝을 맺고 있다. 미국의 교과서들은 그 도입과정이 유클리드 원론과 같게 하고 있으며 초등학교 과정뿐만 아니라 그 다음과정에서도 계속하여 다루고 있다. 수학에서 비는 여러 부분에서 활용되고 있으므로 우리나라에서도 그 취급을 초등학교 과정에서만으로 끝내지 말고 보다 많은 내용을 취급을 하는 것이 바람직하다고 생각된다. 그리고 우리나라의 경우 일본, 미국과 달리 비의 도입에서 비에 대한 정의도 없이 보기내용만으로 처리하는 것은 좋은 방법이라고 생각되지 않는다. 특히 우리나라의 경우 미국의 경우와 달리 비와 비의 값(비율)을 구별하여 지도하고 있는데 이것은 학습에 오히려 복잡함을 줄 수도 있다. 오히려

비(ratio)와 비율(rate)은 구분하여 지도하는 것이 바람직할 것이다. 그리고 비를 처음 도입하면서 관련 용어들을 한꺼번에 많이 사용하는 것은 학습내용을 어렵게 생각하게 할 수 있으므로 개선방법을 모색하는 것이 바람직하다. 수준을 생각하여 중학교 과정에서도 비에 관한 좀 더 심화된 학습내용을 다루는 것이 연계된 학습에 도움을 주는 효과가 있을 것이다.

닮음의 학습내용에서는 우리나라와 일본의 교과서가 미국의 교과서들과 그 도입과정으로 닮음의 정의부터 서로 다르게 시작하고 있는데 그 효율성에 대한 실험 연구가 이루어져 장단점을 알아보고 그 결과를 활용하는 것이 필요하다고 생각된다. 그리고 삼각형의 닮음조건에 대한 취급도 우리나라와 일본의 교과서들은 직관적인 방법을 통해 공준(공준이라는 용어도 사용 안함)처럼 받아드리고 있고, 미국의 교과서들은 증명을 하고 있는데 이 방법에 대하여도 그 장단점을 고려해보아야 할 것이다. 실제로 수준에 따라서는 논리적 증명에 의한 학습내용 전개가 효과적인 학생들도 있기 때문에 현재 우리나라와 같이 일률적인 학습내용 지도는 개선되어야만 올바른 수학교육이 이루어질 수 있을 것이다. 여기서도 닮음지도를 한 학년에서 끝내지 말고 수준을 생각하여 학년을 나누어 지도하는 것도 고려해 봐야할 것이다. 그리고 작도도 닮은 도형을 다룬 후에 좀 더 일반적으로 지도하는 것이 논리적 사고의 형성에 도움이 될 것이다.

참고문헌

강옥기 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)두산

강행고 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)중앙교육진흥연구소

고성은 외(2003). **중학교 수학 2.** (주)블랙박스

교육부 (1998). **제 7차 교육과정,** 교육부 고시 제 1997-15호 [별책8].

교육인적자원부(2002c). **수학 6-가.** 수학익힘책 6-가. (주)대한교과서.

금종해 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)고려출판

박규홍 외(2004). **중학교 수학 2.** 두레교육(주)

박두일 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)교학사

박윤범 외(2004). **중학교 수학 2.** 대한교과서(주)

배종수 외(2004). **중학교 수학 2.** 한성교육연구소

신항균 외(2004). **중학교 수학 2.** 형설출판사

양승갑 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)금성출판사

이영하 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)교문사

이준열 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)도서출판 디딤돌

전평국 외(2004). **중학교 수학 2.** 교학연구사

조태근 외(2004). **중학교 수학 2.** (주)금성출판사

최용준 (2004). **중학교 수학 2.** (주)천재교육

황석근 외(2004). **중학교 수학 2.** 한서출판사

杉山吉茂 외 34(인)(2001), 新しい算數 5上, 5下, 6上, 6下 東京書籍

藤 田 宏 외 33(인)(1998)·新しい 數學 2, 東京書籍

澤田利夫 외 21(인)(1998) ,中學數學 2, 教育出版株式會社

赤攝也 외 20(인)(1998), 中學校數學2, 大日本書籍

福森信夫 외 27(인)(1998), 數學2年, 啓林館

日本數學教育學會(2002), 算數·數學用語活用辭典, 東洋館出版社

C S. Barnett et al.(1998). Scott Foresman-Addison Wesley MATH 5, Scott Foresman

Addison Wesley

E. BOVIO˜L.MANZONE BERTONE(1992). ARITMETICA moderna, S. Lattes &C. -Torino

R I. Champagne(1992). Mathematics Grade 5,6, Silver Burdett Ginn

R I. Charles et al.(1998). MATH Grade 5, 6 Scott Foresman Addison Wesley

R I. Charls et al.(1998). Middle school Math Course 1, 2, 3 Scott Foresman Addison Wesley

I Dressler & E P Keenan(1998). Integrated Mathematics(Course1, 2), AMSCO School Publications, Inc.

R E. Eicholz et al.(1991). Addison-Wesley Mathematics, Addison -Wesley Publishing Company

Euclid, I Todhunter ed & R Simson ed(1967). The Elements of Euclid/ with an introduction by Sir Thomas L. Heath, London, Toronto: J. M. Dent; New York: E. P. Dutton

H Eves(1990). Foundations and Fundamental Concepts of mathematics 3rd ed, Dover Publications, Inc.

T. L. Heath(1956). The Thirteen Books of Euclid's Elements, 2nd ed, New York, Dover

K B. Henderson et al.(1962). Modern Geometry, McGRAW-HILL BOOK COMPANY

H R. JACOBS(1990). GEOMETRY, Freeman

Jame/Jame(1992), Mathematic Dictionary, Van Nostrand Reinhold,

J Malaval et al.(1995), MATHS 5^E, Nathan

H. Pearson & J E. Lightner(1984). GEOMETYRY, GINN AND COMPANY

G R. Risisng et al.(1989). Unified Mathematics book 1, 2, Houghton Mifflin Company/ Boston

J F. Ulrich(1987). HBJ GEOMETRY, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.

A Note on Ratio and Similarity in Elementary-Middle School Mathematics

Kim, Heung Ki (Dankook university)

The applications of ratio and similarity have been in need of everyday life from ancient times. Euclid's elements Ⅴand Ⅵ cover ratio and similarity respectively. In this note, we have done a comparative analysis to button down the contents of ratio and similarity covered by the math text books used in Korea, Euclid's elements and the math text books used in Japan and America.

As results, we can observe some differences between them. When math text books used in Korea introduce ratio, they presented it by showing examples unlike math text books used in America and Japan which present ratio by explaining the definition of it. In addition, in the text books used in Korea and Japan, the order of dealing with condition of similarity of triangles and the triangle proportionality is different from that of the text books used in America. Also, condition of similarity of triangles is used intuitively as postulate without any definition in text books used in Korea and Japan which is different from America's. The manner of teaching depending on the way of introducing learning contents and the order of presenting them can have great influence on student's understanding and application of the learning contents. For more desirable teaching in math it is better to provide text books dealing with various learning contents which consider student's diverse abilities rather than using current text books offering learning contents which are applied uniformly.

* Key words : ratio(비), rate(비유), proportion(비례식), triangle proportionality(삼각형의 닮음), similarity(닮음), condition of similarity of triangles(삼각형의 닮음 조건)

논문접수: 2009. 1. 28.
논문수정: 2009. 2. 17.
심사완료: 2009. 2. 23.

부록

명제 2 [Euclid, I Todhunter ed & R Simson ed(1967)]: 한 직선이 삼각형의 한 변에 평행하게 그으면, 그것은 삼각형의 변을 같은비를 갖도록 자른다. 그리고, 삼각형의 변들이 같은 비를 갖도록 잘리면 절단 점을 잇는 직선은 삼각형의 나머지 변과 평행이다. 곧 아래 그림에서

$BD:AD = CE:AE \quad \Leftrightarrow \quad DE \, // \, BC$

[증명]: $DE \, // \, BC$ 라고 하자.

명제 I.37에 의하여 $\triangle BDE = \triangle CDE$

V.7 에 의하여 $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$

VI.1 에 의하여 $\triangle BDE : \triangle ADE = BD : AD$

같은 방법으로 $\triangle CDE : \triangle ADE = CE : AE$

V.11에 의하여 $BD:AD = CE:AE$

역으로, $BD:AD = CE:AE$ 라 하자. $DE \, // \, BC$ 임을 보이자.

$BD:AD = CE:AE$ 에서

$BD : AD = \triangle BDE : \triangle ADE, \; CE : AE = \triangle CDE : \triangle ADE$ 이므로 VI.1과 V.11에 의하여

$\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$

따라서 V.9 에 의하여 $\triangle BDE = \triangle CDE$ 이고 이두 삼각형은 같은 밑변 DE 위에 있다.

I.39 에 의하면 같은 밑변 위에 같은 방향에 있는 같은 삼각형들은 같은 평행선에 있으므로 $DE \, // \, BC$ 이다. 앞의 명제 VI.1에 의하면

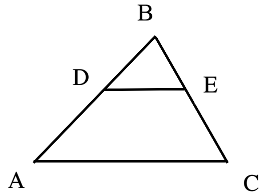
$BD : AD = \triangle BDE : \triangle ADE, \; CE : AE = \triangle CDE : \triangle ADE$ 이므로

$BD : AD = CE : AE$ 일 필요충분조건은 $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$ 이다. 여기서 명제 V.7와 V.9에 의하면 $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$ 는 $\triangle BDE = \triangle CDE$ 와 동치이고, 다시 이것은 명제 I.37 과 I.39 에 의하여 $DE \, // \, BC$ 와 동치이다.

[참고]① I.37 : 두 삼각형의 밑변이 같고 같은 평행선에 놓여있으면 이들은 넓이가 같다.
② I.39 : 두 삼각형의 넓이가 같고 밑변이 같다. 이들이 같은 방향에 놓여 있다면 이들은 같은 평행선에 놓여있다.
③ V.7 : 같은 크기의 양들은 어떤 양에 대해서든 같은 비율을 가진다. 또 어떤 양이든 같은 크기의 양들에 대해 같은 비율을 가진다.
④ V.9 : 두 개의 양들이 어떤 양에 대하여 비율이 같으면 두 개의 양들은 크기가 같다. 어떤 양이 두 개의 양들에 대하여 비율이 같으면 두 개의 양들은 크기가 같다.
⑤ V.11: 두 비율이 어떤 비율과 같으면 그 두 비율은 서로 같다.
⑥ VI.1 : 삼각형들이나 평행사변형들이 높이가 같으면 그들의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다.

정리8-2[G R. Risisng et al.(1989)]

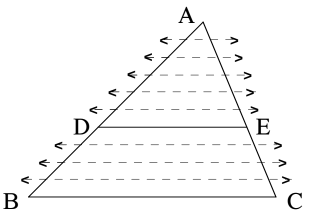
$\triangle ABC$ 에서 $\overline{DE} PVER \overline{BC}$ 이면 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ 이다.



[개략적 증명]:

$\frac{AD}{DB}$ 를 양의 유리수라고 하자.(양의 유리수가 아니

어도 정리는 성립하지만 그 증명은 이 교과서 과정을 넘는다.) 그러면 $\frac{AD}{DB}=\frac{x}{y}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 가 존재한다.



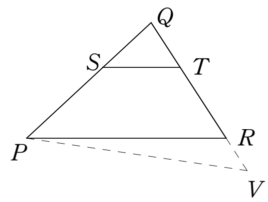
따라서 $\frac{1}{x}\cdot AD=\frac{1}{y}\cdot DB$ 이다. 선분 $\overline{AD}$을 길이가 $\frac{1}{x}\cdot AD$ 인 x개의 선분으로 나누고, 선분 $\overline{DB}$를 길이가 $\frac{1}{y}\cdot DB$ 인 y 개의 선분으로 나눈다면, 모든 선분들은 합동이된다.

이들 선분의 각 끝점에서 $\overline{BC}$에 평행인 선분을 그리면 변 $\overline{AC}$ 와 만나는데 이들은 $\overline{AE}$ 위에 x개, $\overline{EC}$ 위에 y 개의 모두 길이가 같은 합동인 선분으로 자른다.(정리 5-14활용) 그러므로 $\frac{AE}{EC}=\frac{x}{y}$ 이고, 따라서 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 이다.

$\overline{DE} PVER \overline{BC}$ 이면 이 정리를 사용하여 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$, $\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$, $\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$ 임을 알 수 있다.

정리8-4[G R. Risisng et al.(1989)]

오른쪽 그림의 $\triangle PQR$ 에서 $\frac{QS}{SP}=\frac{QT}{TR}$ 이면 $\overline{ST} PVER \overline{PR}$ 이다.

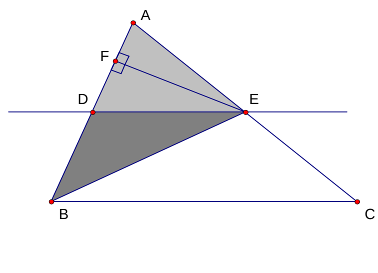


간접증명: $\overline{ST}$ 가 $\overline{PR}$에 평행하지 않다고 가정하자. 그러면 점 P를 지나며 $\overline{ST}$ 에 평행한 직선을 그을 수 있다.(정리 4-3) 점 V를 이 직선이 $\overrightarrow{QR}$ 과 만나는 점이라고 하자. 그러면

$\frac{QS}{SP}=\frac{QT}{TV}$ (정리8-2))

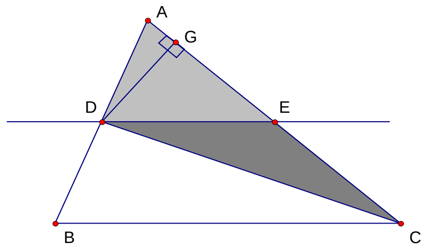
그런데 가정에서 $\frac{QS}{SP}=\frac{QT}{TR}$ (주어짐)이므로 $TV=TR$ 이다. 이것은 공준 2 에 모순이다. 사선의 끝점으로부터 주어진 거리에 있는 사선위의 점은 오직 한 점이다. 그러므로 가정 " $\overline{ST}$ 가 $\overline{PR}$ 에 평행하지 않다." 는 거짓이다. 따라서 $\overline{ST} PVER \overline{PR}$ 이다.

정리55[R. JACOBS(1990)]에서는 $\triangle ABC$ 에서 $\overleftrightarrow{DE}//\overline{BC}$ 이면, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 이다[증명]: 밑변이 네 개의 선분인 삼각형을 만들기 위하여 그림에 두 직선 선분을 그려 넣는다. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$ 를 그리고 $\overline{EF}$ 를 $\overline{EF}\perp\overline{AB}$ 되게 그리자. $\overline{EF}$ 는 $\triangle AED$, $\triangle DEB$ 의 높이이므로 $\alpha\triangle AED=\frac{1}{2}AD\cdot EF$, $\alpha\triangle DEB=\frac{1}{2}DB\cdot EF$ 변끼리 나누면,



$$\alpha\frac{\triangle AED}{\triangle DEB}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot EF}{\frac{1}{2}DB\cdot EF}=\frac{AD}{DB} \qquad \cdots (1)$$

다시 오른쪽 두 번째 그림과 같이 선분 $\overline{DC}$ 와 또 $\overline{DG}$를 $\overline{DG}\perp\overline{AC}$ 되게 그리자.



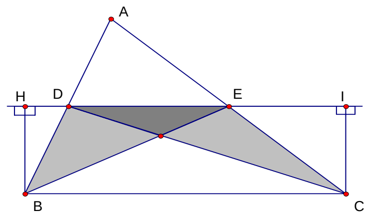
$\overline{DG}$ 는 $\triangle AED$ 와 $\triangle DEC$ 의 높이이므로

$\alpha\triangle AED = \frac{1}{2}AE \cdot DG$, $\alpha\triangle DEC = \frac{1}{2}EC \cdot DG$

따라서,

$$\frac{\alpha\triangle AED}{\alpha\triangle DEC} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot DG}{\frac{1}{2}EC \cdot DG} = \frac{AE}{EC} \quad \cdots (2)$$

아래 그림과 같이 $\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overline{CI} \perp \overleftrightarrow{DE}$ 되게 선분 $BH = CI$ 를 그으면, $\overleftrightarrow{DE} \perp \overline{BC}$ 이고 평행선의 수직인 선분들의 길이는 모두 같으므로 $BH = CI$ 이다.



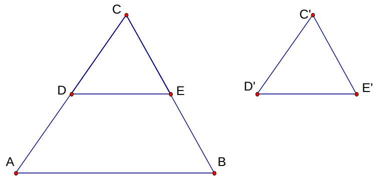
$\triangle DEB$ 와 $\triangle DEC$ 가 같은 밑변 ($DE = DE$)과 같은 높이 ($BH = CI$) 를 가지므로 $\alpha\triangle DEB = \alpha\triangle DEC$ 이것을 (2)에 적용하면

$$\frac{\alpha\triangle AED}{\alpha\triangle DEB} = \frac{AE}{EC} \quad \cdots (3)$$

따라서 (1), (3)으로부터 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

정리11-6 (AA similarity theorem)[H. Pearson & J E. Lightner(1984)]

두 각이 각각 같은 두 삼각형은 서로 닮았다.



곧, 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$, $\triangle D'E'C'$에서 $\angle A \cong \angle D'$, $\angle B = \angle E'$이면 $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C'$이다.

[증명]: 우선 $\angle A \cong \angle D'$, $\angle B = \angle E'$ 에서 $\angle C = \angle C'$

변 $\overline{CA}$ 위에 $CD = C'D'$ 되게 점 D를, 변 $\overline{CB}$ 위에 $CE = C'E'$ 되게 점 E를 잡는다. $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$에서 $\triangle DEC \cong \triangle D'E'C'$ 이다.

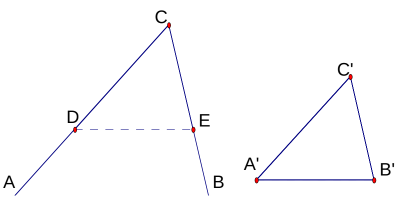
여기서 $\angle CDE \cong \angle D'$ 이므로 $\angle CDE \cong \angle A$. 따라서 $DE // AB$ 이고, 공준에 의하여 $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$ 이다. 한편 $CD = C'D'$, $CE = C'E'$에서 $\frac{CA}{C'D'} = \frac{CB}{C'E'}$ 이다. $\overline{DE}$ 대신에 변 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 에 평행인 직선을 그으면,

$\frac{CA}{C'D'} = \frac{CD}{C'E'} = \frac{AB}{D'E'}$ 을 보일 수 있다.

$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C'$

정리11-8(SAS similarity theorem) [H. Pearson & J E. Lightner(1984)]

두 변의 길이의 비가 같고 끼인각의 크기가 같은 두 삼각형은 서로 닮았다.



곧, $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$에서 $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'}$, $\angle C \cong \angle C'$이면 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$이다.

[증명]: $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$ 위에 $CD = C'A'$, $CE = C'B'$ 되게 점 D, E를 잡아 선분 $\overline{DE}$를 긋는다. 그러면

$\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$ 따라서 $\angle CDE \cong \angle A'$, $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$

$\therefore\ \overline{DE} \,//\, \overline{AB}$

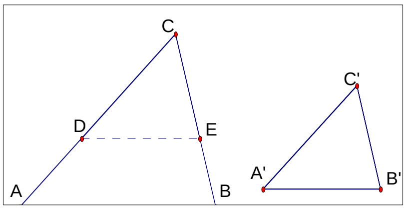
$\angle A \cong \angle CDE,\ \angle A \cong \angle A'$

따라서 AA 닮음에 의하여

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

정리11-9 (SSS similarity theorem)[H. Pearson & J E. Lightner(1984)]

세 변의 대응변의 비가 모두 같은 두 삼각형은 닮은꼴이다.



곧, $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$에서

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ 이면 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 이다.

[증명]: 변 $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$ 위에 $CD = C'A',\ CE = C'B'$ 되게 점 $D,\ E$를 잡아 선분 $\overline{DE}$를 긋는다.

그러면, $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{EC}$, $\angle C \cong \angle C$ 이므로 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

따라서 $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CD}{CA}$, $CD = C'A'$ 이고 가정에서 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ 이므로

$\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{A'B'}{AB}$ 이들로부터 $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{A'B'}{AB}$ 이므로 $DE = A'B'$

그러므로 $\overline{DE} \cong \overline{A'B'},\ \overline{CD} \cong \overline{C'A'},\ \overline{CE} \cong \overline{C'B'}$ 에서 $\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$

$$\therefore\quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$