

이성분 혼합액의 방향성 응고에서 자연 대류

황인국[†] · 최창균*

수원대학교 공과대학 화공생명공학과
445-743 경기도 화성시 봉담읍 와우리 산 2-2
*서울대학교 공과대학 화학생명공학부
151-744 서울특별시 관악구 관악로 599
(2009년 1월 23일 접수, 2009년 2월 11일 채택)

Natural Convection During Directional Solidification of a Binary Mixture

In Gook Hwang[†] and Chang Kyun Choi*

Department of Chemical and Biochemical Engineering, The University of Suwon,
San 2-2, Wau-ri, Bongdam-eup, Hwaseong-si, Gyeonggi-Do 445-743, Korea
*School of Chemical and Biological Engineering, Seoul National University,
San 56-1, Sillim-dong, Gwanak-gu, Seoul 151-744, Korea
(Received 23 January 2009; accepted 11 February 2009)

요 약

이성분 혼합물의 응고중에 수지상 결정으로 이루어진 mush 층이 형성될 수 있다. 본 연구진이 개발한 전파이론으로 mush 층에서 성분적 대류의 발생을 해석하였다. Emms와 Fowler[18]의 모델로부터 유도한 자기유사 안정성 방정식을 사용하여 대류 발생에 대한 임계 Rayleigh 수를 수치방법으로 계산하였다. 과열량이 아주 크거나 mush 층의 성장률이 아주 작은 극한의 경우에 본 연구 결과는 준정적 안정성 해석 결과와 같아진다.

Abstract – A mushy layer of dendritic crystals is often formed during solidification of a binary mixture. Natural convection in the mushy layer is analyzed by using the propagation theory we have developed. The critical Rayleigh numbers for the onset of convection are evaluated numerically using the self-similar stability equations based on Emms and Fowler's[18] model. The present results approach those from quasi-static stability analysis in the limit of a large superheat or a small growth rate of the mushy layer.

Key words: Propagation Theory, Natural Convection, Solidification, Mushy Layer

1. 서 론

자연대류는 여러 산업공정에서 수반되며 생성되는 제품의 질에 영향을 줄 수 있으므로 고품질 재료의 생산을 위해서는 정밀한 유동의 제어와 더불어 자연대류의 발생 조건에 대한 연구가 필요하다. 전통적인 Bernard 대류 문제와 더불어, 경계면으로부터 급격히 밀도변화를 겪는 수평유체층에 대한 대류 불안정성 문제는 현재까지 많은 연구가 이루어져 왔다. 최 등[1-3]이 지난 수 십 년간 개발하여 온 전파이론(propagation theory)은 발달하고 있는 비선형 온도분포를 갖는 수평유체층에서 대류발생 임계조건을 구할 수 있다. 전파이론은 대류발생 시점에서 온도교란이 주로 열침투깊이(thermal penetration depth) 내에서 전파됨을 가정한다[4-10]. 침투깊이 또는 경계층 두께는 시간의 제곱근에 비례하는데, 전파이론은 침투깊이

를 길이척도로 하여 교란식을 변환하고 대류발생 임계시점(critical time)을 찾는다. 변환된 교란식에서 시간을 매개변수로 취급하고 온도, 농도, 속도 교란을 유사변수(similarity variable)의 함수로 나타내는 자기유사 안정성 방정식(self-similar stability equations)을 얻는다. 근래에 최 등[11]은 안정하게 성장화된 유체층에서 열대류의 시간적 전개에 대해 조사하여 기본 온도장의 성장률과 온도교란의 성장률이 같아지는 조건을 대류발생 시점으로 정하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 밀면이 냉각되어 mush 층이 성장하는 응고계에 전파이론을 적용하여 대류발생에 대해 조사하였다. 두 가지 물질이 혼합된 용액이나 합금 용융액의 방향성 응고(directional solidification) 과정에서 수지상 결정(dendritic crystal)이 생기며, 액체와 고체상 사이에 이러한 수지상 결정과 액체로 이루어진 고체-액체 공존상태의 mush 층이 형성된다[12, 13]. 수지상 결정이 생기는 이유는 고체-액체 계면에서 조성적 과냉각(constitutional supercooling)으로 인한 형태적 불안정성(morphological instability)이 나타나기 때문이다. 다

[†]To whom correspondence should be addressed.

E-mail: ighwang@suwon.ac.kr

*이 논문은 서울대학교 최창균 교수님의 정년을 기념하여 투고되었습니다.

공성 매질로 취급되는 mush 층에서는 온도 및 농도차에 의한 밀도 차이가 생기게 되고, 중력장 하에서 자연대류가 발생할 수 있다. 이러한 성분적 대류(compositional convection)가 발생하면 금속합금, 반도체 재료, 결정성장(crystal growth) 등의 응고공정에서 생성되는 고체 재료에 결함이 생기게 된다. 이와 관련하여 응고시의 대류 불안정성과 mush 층과 관련된 대류 불안정성에 대해 최근까지 많은 연구가 이루어져 왔다[14-20]. Tait와 Jaupart[15]는 염화암모늄 수용액의 응고에서 성분적 대류에 대해 실험하여 임계 Rayleigh 수를 측정하였고 mush 층에 생기는 chimney를 관찰하였다. Worster[16]는 일정한 속도로 응고되는 용융액에서 mush 층 유형과 경계층 유형의 대류를 연구하였다. Emms와 Fowler[18]는 공융혼합물(eutectic mixture)에 가까운 액의 조성을 갖는 염화암모늄 수용액에 대해 mush 층에서 대류발생 임계조건을 구하였다. 그들은 액체층에서 finger 대류를 고려하는 단순화된 근사모델을 제시하였고, 기본상태에 대한 교란식에서 시간을 고정(time-frozen)하는 준정적 안정성 해석(quasi-static stability analysis)을 사용하였다.

본 연구에서는 Emms와 Fowler[18]의 모델에서 시간의존성(time dependency)을 고려하여 전파이론하에 유도한 자기유사성 안정성 방정식(self-similar stability equations)을 사용하여 mush 층에서 대류발생 임계조건을 조사하였다. 본 연구에서는 액체층과 mush 층 사이의 계면을 평평하다고 가정하였고, Stefan 수의 영향과 과열량 θ_{∞} 가 아주 큰 극한의 경우에 대한 안정성 방정식과 대류 발생 임계 조건에 대해 검토하였다.

2. 지배방정식

본 연구에서 고려한 밀면으로부터 냉각되어 성장하는 mush 층을 Fig. 1에 나타내었다. 초기에 온도 T_{∞} 와 용매의 농도 C_{∞} 를 갖는 혼합액이 $Z=0$ 의 냉각 경계면에서 시간 $t=0$ 으로부터 갑자기 냉각된다. 시간이 경과함에 따라 냉각 경계면으로부터 수지상결정(dendrite)이 생기게 된다. 염화암모늄 수용액(NH_4Cl-H_2O)에서 용질은 염화암모늄이며, 생성된 mush 층은 염화암모늄 결정과 물로 이루어져 있다. 이러한 mush 층의 위쪽 경계면은 평평하다는 가정하에 그 위치는 $H(t)$ 로 표시하였으며, mush 층의 두께 H 는 시간에 따라 변하게 된다.

일반적으로 mush 층은 다공성 매질로 취급된다. 본 연구에서는 mush 층 내에서의 기공도(porosity)가 일정하다고 가정하며, 고체와 액체의 밀도, 열용량, 열전도도가 서로 같다고 가정한다. 또한 mush 층에서 용매의 농도 C 는 준액상(liquidus) 농도가 되며, 이는 준액상 온도 T_L 과 선형관계 $T_L=T_0-\Gamma C$ 을 갖는다. 여기서 Γ 는 준액상 기울

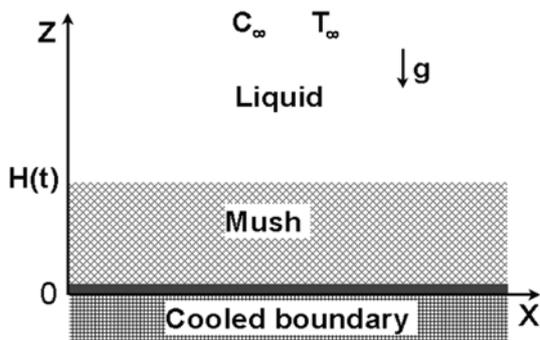


Fig. 1. Schematic diagram of liquid and mushy layers.

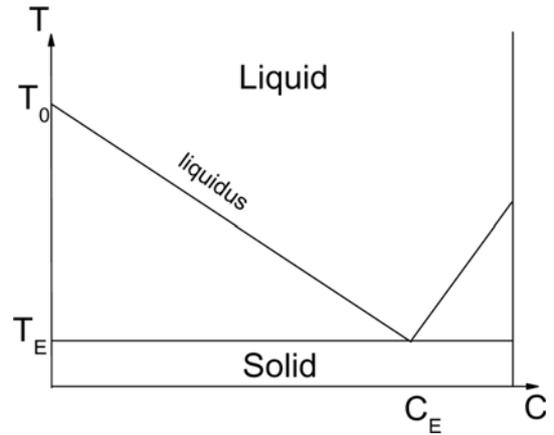


Fig. 2. Schematic phase diagram of binary mixture.

기(slope)이며, T_0 는 순수한 용매의 녹는점이다. 이성분 혼합액의 개략적인 상평형도를 Fig. 2에 나타내었다. T_E 는 공융(eutectic) 온도를 나타내며, C_E 는 공융농도를 나타낸다. 냉각면의 온도가 공융온도 T_E 보다 낮으면 냉각면으로부터 공융온도의 성분을 갖는 고체가 성장하고, 냉각면의 온도가 공융온도보다 높으면 어느 한 성분으로만 이루어진 고체가 성장하게 된다. 물과 염화암모늄으로 이루어진 이성분 혼합물의 공융농도는 용매인 물의 질량분율로 $C_E \sim 0.8$ 이며, 공융온도는 $T_E \sim -15^\circ C$ 이다. 준고상(solidus) 선은 일반적인 액체혼합물에서와 같이 수직으로 가정하였으며, 이 경우 고체결정은 다른 성분을 배제하여 한 성분으로만 이루어진다.

본 연구에서는 mush 층에 대한 지배 방정식으로 Emms와 Fowler [18]의 모델에 따라 다음의 식을 사용하였다[21].

$$\begin{aligned} & \text{(Mush 층)} \\ & (1 + St) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) c = \nabla^2 c \quad (1) \\ & \mathbf{u} = -\nabla p + Rce_k \quad (2) \\ & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

위 식들은 액상 혼합물의 조성이 공융농도에 가까운 상태를 가정하여 얻어진다. Lewis 수($=D/\kappa$)는 0으로 가정되며, mush 층의 투과도는 일정하다. D 는 액체에서 용질확산계수, κ 는 열확산도를 나타낸다. Emms와 Fowler[18]는 액체층에서 온도장과 농도장을 분리하고 mush 층에서 나오는 finger 대류의 상향유동(upflow)을 고려한 다음과 같은 지배방정식을 사용하였다.

$$\begin{aligned} & \text{(액체층)} \\ & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + w|_{z=h} \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \nabla^2 \theta \quad (4) \end{aligned}$$

위 식들에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \frac{(X, Y, Z)}{L}, \mathbf{u} = \frac{L}{\kappa} \mathbf{U}, \tau = \frac{\kappa}{L^2} t \\ p &= \frac{P - (P_a - \rho_{\infty} g Z)}{\mu \kappa / \Pi}, \theta = \frac{T - T_L}{T_L - T_E}, c = \frac{C - C_{\infty}}{C_E - C_{\infty}} \quad (5) \end{aligned}$$

위 식에서 L 은 길이척도이며, ρ_{∞} 용액의 초기 밀도, g 는 중력가속도, \mathbf{U} 는 속도벡터, T 는 온도, P 는 압력, P_a 는 주변 압력을 나타낸다.

μ 는 점도, Π 는 투과도, $T_L^\infty (= T_0 - \Gamma C_\infty)$ 는 초기용액의 준액상온도를 나타낸다. Mush 층에서 준액상 관계에 의해 $\theta = c$ 이다. $h = (2\lambda\sqrt{\tau})$ 는 mush 층의 무차원 높이, λ 는 mush 층의 성장률(growth rate) 또는 상변화율(phase change rate)을 나타내는 상수이며, w 는 수직속도 성분, e_z 는 z 방향의 단위벡터이다. 주요 무차원 수인 Stefan 수 St 와 mush 층에 대한 Rayleigh 수 R 은 다음과 같이 정의된다.

$$St = \frac{\bar{L}}{C_p \Gamma C_\infty}, \quad R = \frac{\Delta \rho g \Pi \bar{L}}{\mu \kappa} \quad (6)$$

여기서 \bar{L} 은 용융잠열, C_p 는 액체의 비열, $\Delta \rho = \rho_\infty [\beta(C_E - C_\infty) - \alpha(T_L^\infty - T_E)]$ 이며, α 는 열팽창계수, β 는 용질팽창계수이다.

위의 지배방정식에 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$z \rightarrow \infty$ 에서

$$\theta \rightarrow \theta_\infty \quad (7)$$

$z = h$ 에서

$$\theta = c = p = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\partial c}{\partial z} \quad (8)$$

$\zeta = 0$ 에서

$$c = 1, w = 0 \quad (9)$$

여기서 $\theta_\infty (= (T_\infty - T_L^\infty)/(T_L^\infty - T_E))$ 는 과열량(superheat) 또는 초기 액상온도를 나타낸다.

3. 전파이론

전파이론은 교란량들에 대해 열침투깊이를 새로운 길이척도로 도입하여, 시간 τ 와 수직좌표 z 의 함수로 된 교란방정식을 임계시점에서 유사변수의 함수로 나타낸다. 전파이론은 자기유사 안정성 방정식(self-similar stability equation)을 사용하여 근사적인 임계조건을 구한다. 최 등[3]은 밀면으로부터 일정열속으로 가열되는 수평유체층의 대류 불안정성에 대해 척도해석(scaling analysis)을 통해 속도교란과 온도교란의 관계를 설정하였고, 기본 온도장의 성장률과 온도교란의 성장률이 같아지는 조건을 대류 안정성 기준으로 정했다. 본 연구에서는 열침투깊이의 두께에 비례하는 mush 층의 깊이 $(h = 2\lambda\tau^{1/2})$ 를 길이척도로 사용한다. 선형안정성 이론을 적용하여 유도된 시간의존형 교란방정식을 임계조건에서 온도, 농도, 속도 교란량들의 진폭함수들에 대한 유사변수 $\zeta (= z/h = z/(2\lambda\tau^{1/2}))$ 의 함수로 나타낸다. 본 연구에서는 임계 mush 층의 깊이가 임계시점에 따라 달라지며, 시간은 매개변수로 취급된다. 무차원 교란식으로부터 유도된 자기유사 안정성 방정식은 다음과 같다[21].

(Mush 층)

$$(\bar{D}^2 + 2(St+1)\lambda^2 \zeta \bar{D} - a^*)c^* = (St+1)R^* w^* \bar{D}c_0 \quad (10)$$

$$(\bar{D}^2 - a^*)w_m^* = a^* \theta_m^* \quad (11)$$

(액체층)

$$(\bar{D}^2 + 2\lambda^2 \zeta \bar{D} - a^*)\theta^* = R^* w^* \Big|_{\zeta=1} \bar{D}\theta_0 \quad (12)$$

여기서 $a^* = ah$, $R^* = Rh$, $\bar{D} = d/d\zeta$ 이며, a 는 수평파수이다. 온도교란의 진폭함수 θ^* 는 $(T_L^\infty - T_E)/R$ 의 척도(scale)를 가지며, c^* 는 $(C_E - C_\infty)/R$ 의 척도를 갖는다. Mush 층의 깊이를 길이척도로 갖는 Rayleigh 수는

$R^* = \Delta \rho g \Pi h / (\mu \kappa)$ 로 정의된다. Emms와 Fowler[18]는 준정적 안정성 해석에서 mush 층의 깊이를 시간에 대해 고정된 것으로 가정하였다. 그들은 시간의존형 기본 상태에 대해 유사해(similarity solution)를 구하고 교란식에 대해서 시간을 동결시켜 매개변수로 취급하는 준정적 안정성 해석을 수행하였다. 이 해석방법은 좌표를 무차원화하는 과정에서 시간좌표에 대해서 mush 층의 깊이의 제곱(h^2)을 시간척도로 하는 일종의 동결시간모델(frozen-time model)이다. 그러나, 전파이론은 교란식에서 유사변수를 사용하여 시간에 대한 편미분 $\partial/\partial \tau = -(2\lambda^2 \zeta / h^2) d/d\zeta$ 를 고려해 주었다. 기본 온도분포와 기본 농도분포는 다음과 같다.

(Mush 층)

$$c_0 = 1 - \frac{\text{erf}((1+St)^{1/2} \lambda \zeta)}{\text{erf}((1+St)^{1/2} \lambda)} = -\theta_0 \quad (13)$$

(액체층)

$$\theta_0 = \theta_\infty \left(1 - \frac{\text{erfc}(\lambda \zeta)}{\text{erfc}(\lambda)} \right) \quad (14)$$

위의 자기유사 안정성 방정식에 적용하게 될 경계조건은 다음과 같다.

$\zeta \rightarrow \infty$ 에서

$$\theta^* = 0 \quad (15)$$

$\zeta = 1$ 에서

$$\theta^* = -c^* \quad (16)$$

$$\bar{D}\theta^* = -\bar{D}c^* \quad (17)$$

$$\bar{D}w^* = 0 \quad (18)$$

$\zeta = 0$ 에서

$$c^* = w^* = 0 \quad (19)$$

식 (18)에서 $\bar{D}w^* = 0$ 은 일정한 압력조건 또는 속도에 대한 투과조건(permeable condition)을 적용한 것이다. 이전의 연구[21]에서는 $\zeta = 1$ 에서 mush-액체 계면의 교란을 고려한 식 $\bar{D}\theta^* - \bar{D}^2\theta_0 c^* / \bar{D}c_0 = (\bar{D}c^* - \bar{D}^2 c_0 c^* / \bar{D}c_0)$ 을 사용하였으나, 본 연구에서는 평평한 계면으로 가정하여 식 (17)을 사용하였다. 대류발생 임계조건을 구하기 위해서는 안정성 방정식과 경계조건을 만족하는 고유치 a^* 와 R^* 을 구하여 그 최소값을 찾아야 한다. 본 연구에서는 수치해법으로 Runge-Kutta 4차의 방법을 사용하였다. 경계조건 문제를 초기치 문제로 풀기 위해서 mush-액체 계면 위치인 $\zeta = 1$ 에서 주어진 조건 이외에 3개의 조건을 더 가정하고, mush 층과 액체층 쪽으로 각각 교란식을 적분한다. 주어진 St 와 θ_∞ 에 대해 $z \rightarrow \infty$ 과 $z = 0$ 에서의 경계조건을 만족시킬 때까지 초기치를 다시 가정하여 계산한다[9].

4. 결과 및 고찰

본 연구의 중요한 매개인자는 Stefan 수 St 와 과열량 θ_∞ 이다. θ_∞ 는 액체층의 초기온도 또는 먼 지점에서의 온도를 나타내며, mush 층의 성장률인 λ 에 영향을 준다. θ_∞ 가 커지면 λ 는 작아지게 되며, 이는 용액의 초기온도가 클 때 mush 층의 성장률은 작고, mush 층의 깊이도 작음을 나타낸다. Emms와 Fowler[18]는 염화암모늄 수용액의 대표적인 물성값으로 $\bar{L} = 3.14 \times 10^2 \text{ kJkg}^{-1}$, $C_p = 3.25 \text{ kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}$,

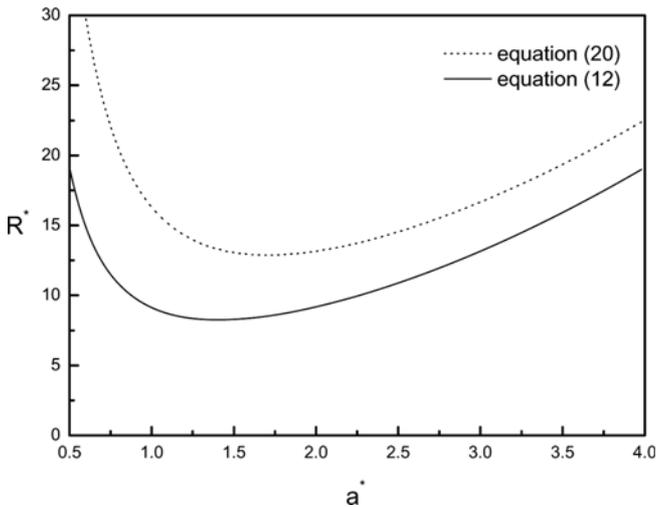


Fig. 3. Marginal stability curves for $St = 0.25$ and $\theta_\infty = 1$.

$\Gamma = 490$ K을 제시하였고, Stefan 수 $St = 0.25$ 를 사용하였다. 본 연구에서는 $St = 0.25$ 와 $\theta_\infty = 1$ 에 대해 Fig. 3에 한계 안정성 곡선을 나타내었다. 곡선의 위쪽은 계가 불안정한 상태이며, 아래쪽은 안정한 상태이다. 임계 Rayleigh 수 R_c^* 는 주어진 파수 a^* 에 대한 최소의 값으로 구해진다. 수치계산결과, 임계값들은 $R_c^* = 8.26$ 와 $a_c^* = 1.41$ 로 얻어졌으며, 이 값들은 mush 층과 액체층 사이의 계면의 교란을 고려한 이전의 연구[21] 결과인 $R_c^* = 8.44$ 와 $a_c^* = 1.43$ 에 비해 작지만 그 차이는 크지 않다. Fig. 3에서 점선으로 나타낸 한계 안정성 곡선은 액체층에서 유동이 없는 상태와 비교하기 위해 식 (12) 대신에 다음의 식을 적용한 결과이다.

$$(\bar{D}^2 + 2\lambda^2 \zeta \bar{D} - a^{*2})\theta^* = 0 \tag{20}$$

대류발생시에 액체층에서의 유동을 고려하지 않는 것은 액체층에서 전도상태를 가정한 것이다. 이 경우, Fig. 3에서 보듯이 더 높은 임계 Rayleigh 수가 얻어진다. 식 (12)의 액체층에서 고려한 상향유동 $w^*|_{\zeta=1}$ 은 유동이 없는 경우보다 계를 더 불안정화시키는 효과를 준다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4에는 $St = 0.25$ 와 $\theta_\infty = 1$ 에 대해 임계조건에서의 속도교란과 온도교란을 도시하였다. 그 크기는 속도교란의 최대값으로 나누어 정규화하였다. 온도교란들은 주로 액체층에서 $\zeta = 5$ 까지로 한정되며 mush-액체 계면 근처에서 최대값이 있음을 알 수 있다. 속도교란의 분포는 mush-액체 계면 위치인 $\zeta = 1$ 근처에서 제일 큰 값을 갖는다. 따라서 식 (12)에서 $w^*|_{\zeta=1}$ 은 mush 층에서 나오는 강한 상향유동을 나타낸다. 실험적으로도 mush 층으로부터 솟아 나오는 이러한 plume 형태의 유동이 액체층에서 관측된다[15].

본 연구에서는 θ_∞ 가 아주 큰 극한의 경우인 $\theta_\infty \rightarrow \infty$ 에 대해 임계조건을 구하였다. θ_∞ 가 큰 경우에는 mush 층에서 기본 온도분포가 선형에 가까워져 시간의존성이 약하다. 전파이론에서 시간의존성과 관련된 $\partial/\partial t$ 는 식 (10)에서 $2(St+1)\lambda^2 \zeta \bar{D} c^*$ 의 항으로 나타난다. θ_∞ 가 아주 크면 $\lambda \sim 1/\theta_\infty$ 의 관계에 의해 λ 는 0에 가까워지므로 $2(St+1)\lambda^2 \zeta \bar{D} c^*$ 의 항이 없어지고 식 (10)은 Emms와 Fowler[18]의 식과 같아진다. 본 연구에서 $\theta_\infty \rightarrow \infty$ 인 경우에 식 (10)을 $(\bar{D}^2 - a^{*2})c^* = (St+1)R^* w^*$ 로 바꾸고, 식 (12)를 $(\bar{D}^2 - a^{*2})\theta^* = R^* w^*|_{\zeta=1}$ 로 바꾸어 계산하였다(\bar{D}_0

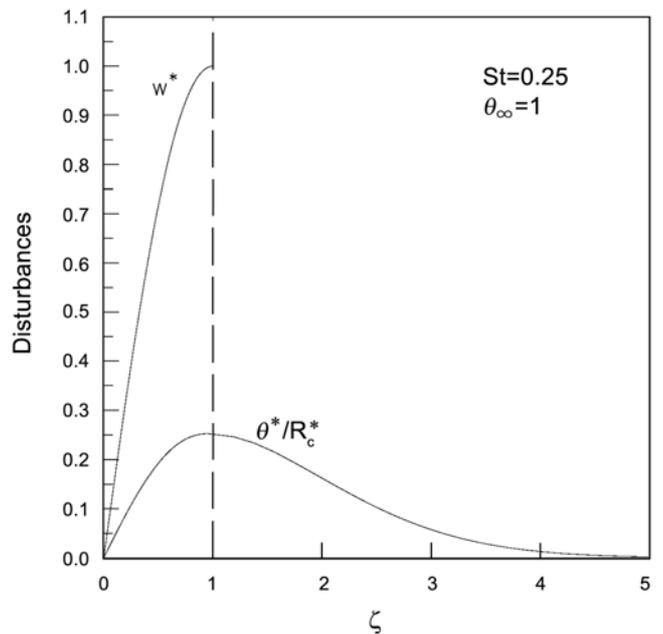


Fig. 4. Distributions of disturbances for $St = 0.25$ and $\theta_\infty = 1$.

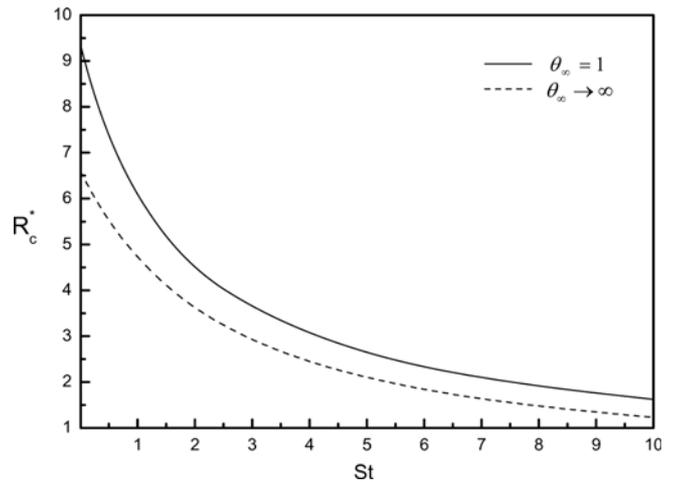


Fig. 5. Critical Rayleigh number R_c^* as a function of St for $\theta_\infty = 1$ and $\theta_\infty \rightarrow \infty$.

$= 1, \bar{D}_0 = 1$). Fig. 5와 Fig. 6에 $\theta_\infty = 1$ 과 $\theta_\infty \rightarrow \infty$ 에 대해 Stefan 수 St 의 영향을 나타내었다. 점선으로 나타낸 곡선은 $\theta_\infty \rightarrow \infty$ 인 경우에 해당한다. θ_∞ 가 증가하거나 St 수가 증가함에 따라 mush 층의 성장률이 작아지고 임계 Rayleigh 수가 더 작아짐을 알 수 있다. Stefan 수는 잠열을 포함하고 있으므로 잠열이 크면 mush 층에서 냉각효과를 완화시켜 성장률이 작게 된다. $St = 0$ 인 경우에는 식 (10)이 $(\bar{D}^2 - a^{*2})c^* = R^* w^*$ 이 되므로 선형온도분포를 갖는 다공성 유체층에 대한 대류 불안정성 문제의 식과 같아진다. 이 문제에서 밑면에 고정경계조건과 일정온도조건을, 윗면에 투과조건과 일정열속조건을 적용한 경우에 문헌[22]에 있는 임계값은 $R_c^* = 9.87$ 와 $a_c^* = 1.57$ 이다. 본 연구에서 $\theta_\infty \rightarrow \infty, St = 0.25$ 인 경우, 임계값은 $R_c^* = 6.028$ 과 $a_c^* = 1.08$ 로 계산되었으며, 이 값들은 Emms와 Fowler[18]가 $\theta_\infty \rightarrow \infty$ 에서 계산한 임계 Rayleigh 수의 값인 6.03과 거의 같은 결과이다. 과열량 θ_∞ 가 큰 경우는 mush 층의 성장률 λ 가 아주 작기 때문에 본 연구의 해석결과는 시간을 고정하는 준정적 안정성 해석 결과와 같아진다.

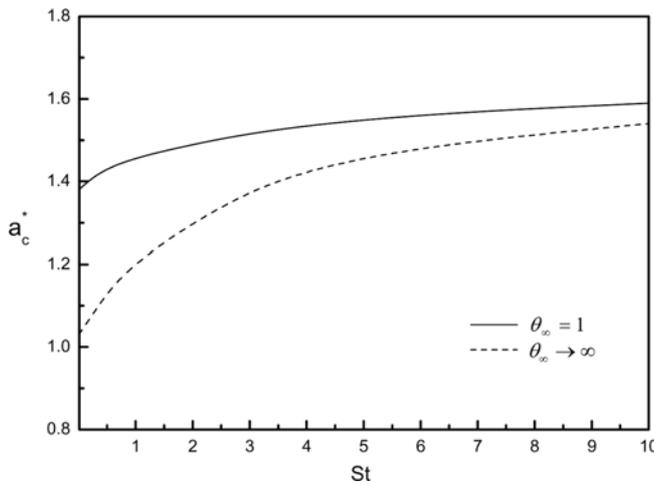


Fig. 6. Critical wave number a_c^* as a function of St for $\theta_\infty=1$ and $\theta_\infty \rightarrow \infty$.

이전의 연구[21]에서 전파이론을 적용한 결과를 Emms와 Fowler [18]의 준정적 안정성 해석결과와 비교하면, θ_∞ 가 작은 경우($0.1 \leq \theta_\infty < 1$)에는 전파이론을 적용한 결과가 준정적 안정성 해석보다 더 큰 임계값을 산출했다. $\theta_\infty=0.1$ 인 경우에 전파이론은 준정적 안정성 해석 결과보다 약 30% 더 큰 임계 Rayleigh 수를 주며, $\theta_\infty=1$ 인 경우에는 두 결과의 차이가 미세하다. θ_∞ 가 작으면 기본 온도분포가 비선형적으로 되어 시간에 대한 교란의 변화가 크므로, 교란식에서 시간을 고정하는 준정적 안정성 해석에 비해 $\partial(\cdot)/\partial\tau$ 항을 고려하는 본 연구가 임계값을 더 높게 산출할 것이다. 최 등[3]은 밀면으로부터 일정열속으로 가열되는 수평유체층의 대류발생에 대한 연구에서 전파이론이 동결시간모델(frozen-time model)보다 더 높은 임계시간을 예측함을 보였고 대류의 발현시점이 실험결과와 잘 맞는다는 것을 논하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 이성분 혼합액이 밀면으로부터 냉각되어 mush 층이 시간에 따라 성장하는 응고계에 대해 선형안정성 이론을 적용하여 mush 층에서의 대류 발생에 대해 조사하였다. Emms와 Fowler[18]의 모델에 전파이론을 적용하여 얻은 자기유사 안정성 방정식을 수치방법으로 풀어 다공성 매질로 가정한 mush 층의 대류 불안정성을 해석하였다. 본 연구 결과, Stefan 수가 증가함에 따라 임계 Rayleigh 수가 더 작아졌으며, 과열량이 아주 크거나 mush 층의 성장률이 아주 작은 경우의 극한에서 계산된 임계조건은 동결시간모델의 일종인 준정적 안정성 해석 결과와 일치하였다. 본 연구진이 개발한 전파이론은 mush 층에서 성분적 대류발생의 임계조건을 잘 예측함을 알 수 있었다.

참고문헌

1. Choi, C. K., Kang, K. H., Kim, M. C. and Hwang, I. G., "Convective Instabilities and Transport Properties in Horizontal Fluid Layers," *Korean J. Chem. Eng.*, **15**, 192-198(1998).
2. Choi, C. K., Park, J. H., Kim, M. C., Lee, J. D., Kim, J. J. and Davis, E. J., "The Onset of Convective Instability in a Horizontal Fluid Layer Subjected to a Constant Heat Flux from Below,"

- Int. J. Heat Mass Transfer*, **47**, 4377-4384(2004).
3. Choi, C. K., Chung, T. J. and Kim, M. C., "Buoyancy Effects in Plane Couette Flow Heated Uniformly from Below with Constant Heat Flux," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **47**, 2629-2636(2004).
4. Yoo, J. S. and Choi, C. K., "Thermal Instability in a Fluid Layer Subjected to Transient Cooling from Above," *Korean J. Chem. Eng.*, **4**, 128-134(1987).
5. Yoon, D. Y., Choi, C. K. and Yoo, J. S., "Analysis of Thermal Instability in a Horizontal Porous Layer Heated from Below," *Int. Chem. Eng.*, **32**, 181-191(1992).
6. Yoon, D. Y., Kim, M. C. and Choi, C. K., "Oscillatory Convection in a Horizontal Porous Layer Saturated with a Viscoelastic Fluid," *Korean J. Chem. Eng.*, **20**, 27-31(2003).
7. Kim, M. C., Chung, T. J. and Choi, C. K., "Onset of Buoyancy-Driven Convection in the Horizontal Fluid Layer Heated from Below with Time-Dependent Manner," *Korean J. Chem. Eng.*, **20**, 69-74(2004).
8. Kim, M. C., Chung, T. J. and Choi, C. K., "The Onset of Taylor-like Vortices in the Flow Induced by an Impulsively Started Rotating Cylinder," *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **18**, 105-114(2004).
9. Hwang, I. G. and Choi, C. K., "Convective Instabilities of the Melt during Solidification Cooled from below," *HWAHAK KONGHAK*, **32**, 718-725(1994).
10. Hwang, I. G. and Choi, C. K., "Onset of Convection in a Porous Mush during Binary Solidification," *Korean J. Chem. Eng.*, **25**, 199-202(2008).
11. Choi, C. K., Park, J. H., Park, H. K., Cho, H. J., Chung, T. J. and Kim, M. C., "Temporal Evolution of Thermal Convection in an Initially Stably-Stratified Horizontal Fluid Layer," *Int. J. Thermal Sci.*, **43**, 817-823(2004).
12. Flemings, M. C., *Solidification Processing*, McGraw-Hill, New York(1974).
13. Huppert, H. E. and Worster, M. G., "Dynamic Solidification of a Binary Melt," *Nature*, **314**, 703-707(1985).
14. Coriell, S. R., Cordes, M. R., Boettinger, W. J. and Sekerka, R. F., "Convective and Interfacial Instabilities During Unidirectional Solidification of a Binary Alloy," *J. Crystal Growth*, **49**, 13-28(1980).
15. Tait, S. and Jaupart, C., "Compositional Convection in a Reactive Crystalline Mush and the Evolution of Porosity," *J. Geophys. Res.*, **97**, 6735-6756(1992).
16. Worster, M. G., "Instabilities of the Liquid and Mushy Regions during Solidification of Alloys," *J. Fluid Mech.*, **237**, 649-669(1992).
17. Amberg, G. and Homay, G. M., "Nonlinear Analysis of Buoyant Convection in Binary Solidification with Application to Channel Formation," *J. Fluid Mech.*, **252**, 79-98(1993).
18. Emms, P. W. and Fowler, A. C., "Compositional Convection in the Solidification of Binary Alloys," *J. Fluid Mech.*, **262**, 111-139(1994).
19. Loper, D. E., "On the Boundary Conditions at a Mush-Melt Interface," *J. Crystal Growth*, **222**, 655-666(2001).
20. Riahi, D. N., "Nonlinear Oscillatory Convection in Rotating Mushy Layers," *J. Fluid Mech.*, **553**, 389-400(2006).
21. Hwang, I. G. and Choi, C. K., "The Onset of Convection in a Mushy Layer during Time-Dependent Solidification," *Heat Transfer 1998 (Proceedings of 11th International Heat Transfer Conference)*, Kyongju, **7**, 193-198(1998).
22. Nield, D. A. and Bejan, A., *Convection in Porous Media*, Springer-Verlag, New York(1992).