

# 두 변수 탄성지반으로 지지된 원호형 등단면 띠기초의 자유진동

## Free Vibrations of Circular Uniform Strips Resting on Two Parameter Elastic Foundation

이 종 천\*

Lee, Jong-Cheon

### Abstract

This paper deals with the free vibrations of circular strip foundations which have uniform solid rectangular cross-section. The ground which supports circular strips was modeled as the two parameter elastic foundation. Differential equations governing the flexural-torsional free vibrations of circular strips supported by such foundation were derived, and solved numerically for obtaining the natural frequencies and mode shapes. Boundary condition of free-free ends was considered for numerical examples. Four lowest natural frequencies according to the variations of five system parameters i.e. subtended angle, depth ratio, contact ratio, elasticity ratio and soil parameter are reported in the non-dimensional forms. Also, typical mode shapes of both deformations and stress resultants are presented in the figures. Experiment was conducted for validating the theory developed in this study.

### 요 지

이 논문은 직사각형 단면을 갖는 원호형 등단면 띠기초의 자유진동에 관한 연구이다. 띠기초를 지지하는 지반을 두 변수 탄성지반으로 모형화하였다. 두 변수 탄성지반으로 지지된 원호형 띠기초의 휨-비틀림 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산정하였다. 띠기초의 경계조건은 자유-자유로 하여 최저저차 4개의 고유진동수를 산정하였다. 수치해석의 결과로, 중심각, 깊이비, 접촉비, 탄성계수비, 지반변수 등 5개의 변수가 고유진동수에 미치는 영향을 보고하였다. 변위 및 합응력의 진동형을 그림으로 나타내었다. 실험을 통하여 이 연구의 결과를 검증하였다.

**Keywords :** Circular strip foundation, Flexural-torsional free vibrations, Two parameter elastic foundation, Natural frequencies, Mode shapes.

**핵심 용어 :** 원호형 띠기초, 휨-비틀림 자유진동, 두 변수 탄성지반, 고유진동수, 진동형

\* 정희원, 원광대학교 토목환경도시공학부 겸임교수

E-mail : jcleee91@wku.ac.kr 063-850-6719

• 본 논문에 대한 토의를 2009년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 2009년 5월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

각종 토목 구조물에는 기계 장치 등의 설비가 필수적으로 필요하며 이러한 경우에 기계적 장비의 가동으로 인하여 동하중의 작용이 필수적이다. 동하중이 작용하면 구조물에 공진현상이 발생하여 변위의 증가를 초래하여 구조물이 붕괴하게 된다. 이와 같은 동하중에 대한 구조물물의 취약점을 사전에 방지하기 위해서는 본 연구에서와 같은 자유진동 해석이 필요하다. 또한 구조물의 유지보수를 위한 구조물의 건전성 평가에서 자유진동에 의한 구조물의 고유진동수는 중요한 평가지표가 된다. 이러한 관점에서 구조물의 고유진동수 산정은 구조물의 설계측면에서 뿐만 아니라 구조물의 유지보수 측면에서 매우 중요한 연구분야이다.

최근까지 여러 조건을 갖는 지반 위에 놓인 구조물들의 정·동적 거동에 관한 많은 연구가 활발하게 이루어지고 있다<sup>(3),(6),(9)</sup>. 이러한 구조물의 전형적인 예 중에 하나는 원호형 띠기초를 들 수 있다. 원호형 띠기초는 유체저장 탱크, 고속도로의 완화공간, 철도의 궤도, 기계기초 등에서와 같이 하중의 크기가 매우 큰 상부구조를 지지해주는 기초구조(foundation structure)로 이용되고 있다<sup>(10)</sup>.

띠기초와 같이 지반 위에 놓인 구조물의 거동 해석에는 Winkler지반 모형을 많이 이용한다. Winkler지반은 지반을 독립적인 스프링으로 모형화함으로써 스프링과 스프링사이에서 발생하는 전단력을 고려할 수 없다. 이러한 Winkler지반의 단점을 보완하기 위하여 지반에 작용하는 전단력을 고려하는 전단층을 추가한 지반이 두 변수 탄성지반이다. 두 변수 탄성지반으로 지지된 지반구조물에 관한 연구를 간략하게 고찰하면 다음과 같다. Wang과 Stephens<sup>(13)</sup>은 전단변형 효과를 고려한 Timoshenko 띠기초의 자유진동을 해석하였다. Kok<sup>(5)</sup>는 띠기초의 동적 해석을 실시하였고, Paliwal 등<sup>(7)</sup>은 셸 구조물의 자유진동 해석을 실시하였다. Yokoyama<sup>(14)</sup>는 Timoshenko보-기둥의 자유진동을 연구하였고, Rashed 등<sup>(8)</sup>은 보강판의 자유진동을 연구하였다. 이병구 등<sup>(1)</sup>은 집중질량이 작용하는 면내력을 받는 후판의 자유진동을 해석하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 띠기초의 자유진동 해석

은 매우 중요한 연구과제 중에 하나이다.

이 논문은 두 변수 탄성지반으로 지지된 원호형 띠기초의 횡-비틀림 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 해석모형으로부터 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구 목적이 있다. 이를 위하여 본 연구에서는 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 자유-자유 조건의 경계조건을 유도하였다. 띠기초의 변수연구에서는 중심각, 깊이비, 접촉비, 탄성계수비, 지반변수 등이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하고 이를 표 및 그림에 나타내었다.

## 2. 지배미분방정식의 유도

### 2.1. 자유진동변수

Fig. 1은 두 변수 탄성지반으로 지지된 원호형 띠기초의 형상을 나타낸다. 띠기초에는 줄눈 시공이 불가피하므로 이 연구에서는 단부조건을 자유-자유(free-free ends)로 국한하였다.

띠기초의 반경은  $\rho$ ,  $\alpha$ 는 중심각을 나타낸다. 띠기초의 좌단으로부터 임의점까지의 각도는  $\theta$ 이다. 또한  $v$ ,  $\beta$ ,  $\psi$  및  $\phi$ 는 띠기초의 임의점 ( $\rho, \theta$ )에서 연직 변위, 전단에 의한 단면 회전각, 횡에 의한 단면 회전각 및 비틀림각을 나타내며, 단면에 발생하는 전단력, 횡 모멘트 및 비틀림 모멘트의 합을  $Q$ ,  $M$  및  $T$ 로 나타낸다. 두 변수 탄성지반의 지반반력계수는  $K$

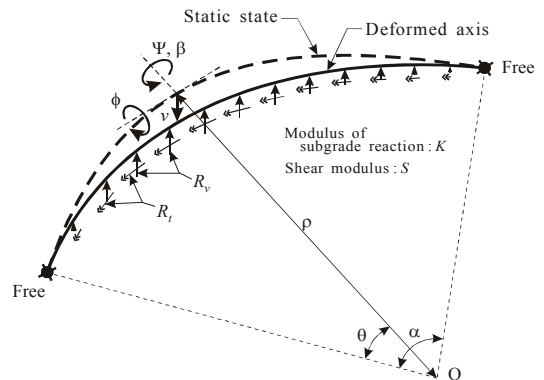


Fig. 1 원호형 띠기초의 기하학적 형상

이고 전단계수는  $S$ 이다. 지반에 발생하는 연직반력과 비틀림 반력을  $R_v$ 와  $R_t$ 로 표현한다.

## 2.2. 동적 평형방정식

자유진동하는 띠기초의 미소요소에는 변위에 의하여 힘들들이 작용하게 된다. Fig. 2는 이 미소요소에 작용하는 합응력  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ , 지반반력  $R_v$ ,  $R_t$  및 관성력  $F_v$ ,  $C_\psi$ ,  $C_\phi$ 를 나타낸다.

띠기초의 미소요소에 작용하는 합응력, 지반반력 및 관성력 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식(1)~(3)과 같다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\theta} - F_v - R_v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\theta} - Q + \frac{T}{\rho} + C_\psi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{M}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\theta} + C_\phi + R_t = 0 \quad (3)$$

## 2.3 미소요소에 작용하는 하중

### 2.3.1 합응력

띠기초 단면에 발생하는 합응력인 전단력  $Q$ , 휨 모멘트  $M$ , 비틀림 모멘트  $T$ 를 변위항으로 나타낸다. 전단에 의한 회전각  $\beta = dv/(\rho d\theta) - \Psi$ 로 나타낼 수 있기 때문에 전단력  $Q$ 는 다음 식과 같이 표현된다<sup>(11)</sup>.

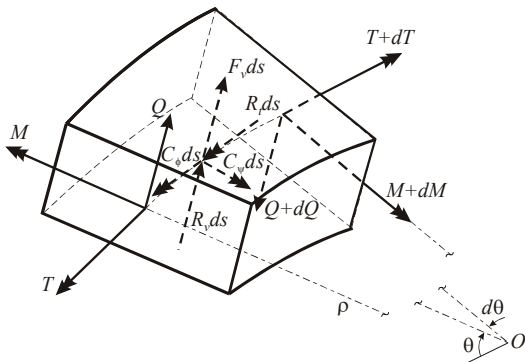


Fig. 2 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력

$$Q = fGA\beta = fGA\left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\theta} - \Psi\right) \quad (4)$$

여기서  $f$ 는 형상계수이며 이 연구에서 채택한 직사각형 단면의  $f=5/6(=0.833)$ 이다. 또한,  $G$ 는 전단탄성계수,  $A$ 는 단면적이다.

휨 모멘트  $M$  및 비틀림 모멘트  $T$ 를 변위항으로 나타내면 다음 식들과 같다<sup>(12)</sup>.

$$M = \frac{EI}{\rho} (\phi - \frac{d\Psi}{d\theta}) \quad (5)$$

$$T = \frac{GJ}{\rho} (\Psi + \frac{d\phi}{d\theta}) \quad (6)$$

여기서  $E$ 는 탄성계수,  $I, J$ 는 띠기초 단면의 단면2차모멘트, 비틀림상수이다.

### 2.3.2 지반반력

Fig. 3(a)와 같이 띠기초는 두 변수 탄성지반으로 지지되어 있기 때문에 단면이 변위를 갖게 되면 지반에는 지반반력이 발생한다. 탄성체인 지반의 지반반력계수  $K$ 는 단위면적에 연직방향으로 단위처짐을 발생시키는데 필요한 힘이다. 전단계수  $S$ 는 두 변수 탄성지반의 전단층이 지지하는 단위길이당의 전단력이다. 여기서 띠기초의 단면은 단면폭  $B$ , 단면깊이  $H$ 를 갖는 직사각형 단면이다.  $r$ 은 단면의 도심  $o$ 로부터 단면폭을 따라서 곡률중심 방향으로 측정된 거리이다.  $z(r, \theta)$ 는 임의점  $(\rho, \theta)$ 에서 비틀림각  $\phi$ 로 인하여 발생하는  $r$ 에서 곡률중심방향의 연직변위이다. 곡률중심 방향의 단면은 충분한 강성을 갖기 때문에 연직변위  $z(r, \theta)$ 는 직선적인 변화를 한다.

Fig. 3(a)에 나타낸 지반과 단면이 접하는 접촉면에서 발생하는 압력의 변화  $p(r, \theta)$ 는 지반반력계수  $K$ 와 전단계수  $S$ 가 연계된 다음과 같은 식으로 유도할 수 있다<sup>(10)</sup>.

$$p(r, \theta) = Kz(r, \theta) - \frac{S}{\rho^2} \frac{d^2 z(r, \theta)}{d\theta^2} \quad (7)$$

단면의 곡률중심 방향의 축은 직선을 유지하고 단면의 중심으로부터 거리  $r$ 에 대하여  $v$ ,  $\phi$ 는 상수이므로, 연직변위  $z(r, \theta)$ 는 다음 식(8)과 같이  $r$ 의 1차 식으로 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (8)$$

식(8)에 의한 지반의 압력분포는 Fig. 3(b)와 같이 직선분포인 사다리꼴 분포를 이룬다. 연직반력  $R_v$ 는 Fig. 3(b)에 나타난 사다리꼴의 면적이며, 비틀림반력  $R_t$ 는 사다리꼴 면적의 단면의 도심  $o$ 에 대한 모멘트로 구할 수 있다. 이들은 각각 식(9), (10)과 같이 산출된다.

$$R_v = B(Kv - \frac{S}{\rho^2} \frac{d^2v}{d\theta^2}) \quad (9)$$

$$R_t = \frac{1}{12}B^3(K\phi - \frac{S}{\rho^2} \frac{d^2\phi}{d\theta^2}) \quad (10)$$

### 2.3.3 관성력

띠기초의 진동을 조화진동으로 가정하고 D'Alembert의 원리를 이용하면 관성력  $F_v$ ,  $C_\psi$  및  $C_\phi$ 를 다

음과 같이 구할 수 있다<sup>(11)</sup>.

$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 v \quad (11)$$

$$C_\psi = -\gamma I \omega_i^2 \Psi \quad (12)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p \omega_i^2 \phi \quad (13)$$

여기서  $\gamma$ 는 질량밀도,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 단면2차모멘트,  $I_p$ 는 단면극관성모멘트,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s)이고  $i$ 는 모드 번호이다.

## 2.4 지배미분방정식

### 2.4.1 단면성질

띠기초의 단면은 Fig. 3(a)에서와 같이 단면폭  $B$ , 단면깊이  $H$ 를 갖는 직사각형 단면이다. 지배미분방정식의 유도에서 필요한 직사각형 단면성질  $A$ ,  $I$ ,  $I_p$ ,  $J$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = BH \quad (14)$$

$$I = \frac{1}{12}BH^3 \quad (15)$$

$$I_p = \frac{1}{12}(BH^3 + HB^3) \quad (16)$$

$$J = C_T BH^3 \quad (17.1)$$

$$C_T = \frac{1}{3}(1 - 0.63 \frac{H}{B}), \quad \frac{H}{B} \leq 1 \quad (17.2)$$

### 2.4.2 무차원 변수

이 연구에서 지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 무차원 변수들을 다음과 같이 도입한다.

$$n = \frac{H}{B} \quad (18)$$

$$b = \frac{B}{\rho} \quad (19)$$

$$\eta = \frac{v}{\rho} \quad (20)$$

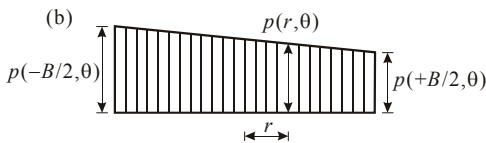
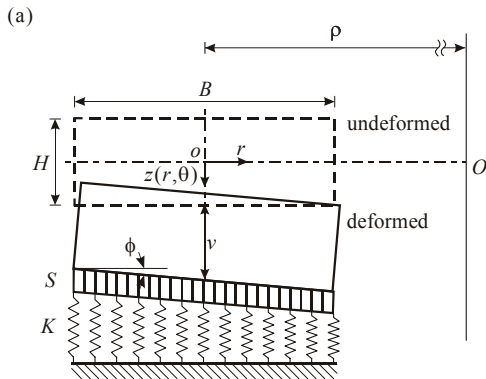


Fig. 3 띠기초에 작용하는 반력

$$g = \frac{G}{E} \quad (21)$$

$$k = \frac{B\rho^4 K}{EI} \quad (22)$$

$$s = \frac{B\rho^2 S}{EI} \quad (23)$$

위의 식들에서  $n$ 은 깊이비,  $b$ 는 접촉비,  $\eta$ 는 무차원 연직변위,  $g$ 는 탄성계수비,  $k$ 는 지반변수,  $s$ 는 전단변수로 정의한다.

#### 2.4.3 지배미분방정식

이상에서 유도한 합응력  $M$ ,  $T$ , 지반반력  $R_v$ ,  $R_t$  및 관성력  $F_v$ ,  $C_\psi$ ,  $C_\phi$ 에 단면의 성질  $A$ ,  $I$ ,  $L_p$ ,  $J$ 을 대입한다. 이렇게 얻어진 합응력, 지반반력 및 관성력을 동적 평형방정식에 대입하고 식(18)~(23)의 무차원 변수식들을 이용하면 다음과 같은 식(24)~(26)의 원호형 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = a_4[a_1(k - C_i^2)\eta + \frac{d\Psi}{d\theta}] \quad (24)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\theta^2} = a_2\frac{d\eta}{d\theta} + (-a_2 + a_3C_i^2 + e_1)\Psi + (1 + e_1)\frac{d\phi}{d\theta} \quad (25)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = e_4[-(1 + e_1)\frac{d\Psi}{d\theta} + (1 + ke_2 + a_3e_3C_i^2)\phi] \quad (26)$$

위의 지배미분방정식에 포함되어 있는 무차원 계수  $a_1 \sim a_4$  및  $e_1 \sim e_4$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{n^2b^2}{12fg} \quad (27.1)$$

$$a_2 = -\frac{12fg}{n^2b^2} \quad (27.2)$$

$$a_3 = -\frac{n^2b^2}{12} \quad (27.3)$$

$$a_4 = \frac{1}{1 + a_1s} \quad (27.4)$$

$$e_1 = 4g(1 - 0.63n) \quad (27.5)$$

$$e_2 = \frac{b^2}{12} \quad (27.6)$$

$$e_3 = 1 + \frac{1}{n^2} \quad (27.7)$$

$$e_4 = \frac{1}{e_1 + se_2} \quad (27.8)$$

식(24)~(26)에서 지배미분방정식의 고유치인 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$C_i = \omega_i\rho^2\sqrt{\frac{\gamma A}{EI}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (28)$$

합응력의 최대진폭의 크기는 매우 중요한 동적 설계 자료가 된다. 합응력의 진동형을 무차원 변위  $\eta$ ,  $\Psi$ ,  $\phi$  향으로 나타내기 위하여 식(4)~(6)에서 나타낸 합응력  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ 를 다음 식들과 같이 무차원 합응력  $Q^*$ ,  $M^*$ ,  $T^*$ 로 나타낸다.

$$Q^* = \frac{Q}{fGA} = \frac{d\eta}{d\theta} - \Psi \quad (29)$$

$$M^* = \frac{M\rho}{EI} = \phi - \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (30)$$

$$T^* = \frac{T\rho}{4GI} = (1 - 0.63n)(\Psi + \frac{d\phi}{d\theta}) \quad (31)$$

#### 2.4.4 경계조건

띠기초는 일정간격으로 줄눈시공이 필수적이므로 양단 부는 자유단이 일반적이다. 자유단( $\theta = 0$  또는  $\theta = \alpha$ )에서 식(29)~(31)에 나타낸 합응력  $Q^*$ ,  $M^*$ ,  $T^*$ 이 "0"이어야 하므로 다음의 경계조건식을 얻는다.

$$Q^* = \frac{d\eta}{d\theta} - \Psi = 0 \quad (32)$$

$$M^* = \phi - \frac{d\Psi}{d\theta} = 0 \quad (33)$$

$$T^* = (1 - 0.63n)(\Psi + \frac{d\phi}{d\theta}) = 0 \quad (34)$$

### 3. 수치해석 방법

이상에서 유도한 연립 미분방정식의 엄밀해를 산출하는 것은 매우 어렵기 때문에 수치해석적 방법으로 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 진동형  $\eta, \Psi, \phi$ 를 산출한다. 진동형을 산출하기 위한 식(24)-(26)의 수치적분은 4계 Runge-Kutta 법(2)을 이용하고 고유치  $C_i$ 는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi법(2)과 결합한 행렬값 탐사법을 이용한다.

이와 같은 초기치 문제의 수치방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

1. 무차원 입력변수인  $\alpha, n, b, k, s$ 를 입력한다.
2. 미분방정식의 고유치  $C$ 를 가정한다. 최초의 가정값은 0이다.
3. 미분방정식을 수치적분하기 위하여 식(3.32)-(3.34)를 만족하는 초기조건을 다음 Table 1과 같이 임의로 3조( $j = 1, 2, 3$ )가정한다.
4. 식(32)-(34)의 초기( $\theta = 0$ ) 경계조건을 갖는 식(24)-(26)의 미분방정식을 4계 Runge-Kutta 법으로 수치적분하여  $0 \leq \theta \leq \alpha$ 에서 착오적 해  $\eta_j, d\eta/d\theta_j, \Psi_j, d\Psi/d\theta_j, \phi_j, d\phi/d\theta_j$ 를 산출한다. 여기서 첨자  $j$ 는 Table 1에서 가정번호이다.

Table 1 수치적분을 위한 초기치의 가정

$j$	$\eta$	$\frac{d\eta}{d\theta}$	$\Psi$	$\frac{d\Psi}{d\theta}$	$\phi$	$\frac{d\phi}{d\theta}$
1	1	2	2	3	3	-2
2	4	0	0	5	5	0
3	6	7	7	0	0	-7

5. 식(32)-(34)를 이용하여  $\theta = \alpha$ 에서  $Q^*, M^*, T^*$ 로 이루어지는 행렬값  $D$ 를 다음과 같이 산출한다.

$$D = \begin{vmatrix} Q_{j=1}^* & Q_{j=2}^* & Q_{j=3}^* \\ M_{j=1}^* & M_{j=2}^* & M_{j=3}^* \\ T_{j=1}^* & T_{j=2}^* & T_{j=3}^* \end{vmatrix} \quad (35)$$

6. 앞에서 가정한  $C$ 가 고유치의 참값이면  $D=0$ 이다. 제1의 수렴조건은 다음 식과 같다.

$$|D| \leq 1 \times 10^{-8} \quad (36)$$

7. 식(36)의 수렴조건을 만족하지 않으면  $C$  값을 증가시키며 2~4의 과정을 반복시행하며  $D$ 의 부호를 관찰한다.
8. 반복시행하는 과정에서  $D$ 의 부호가 바뀌면 참  $C$  값은 전 단계의  $C_a$ 와 현 단계의  $C_b$ 사이에 있으므로 Regula-Falsi 법에 의하여 참  $C$  값에 근접한  $C_c$  값을 다음과 같이 계산한다.

$$C_c = \frac{C_a|D_b| + C_b|D_a|}{|D_a| + |D_b|} \quad (37)$$

여기서  $D_a, D_b$ 는  $C_a, C_b$ 에 대응하는  $D$  값이다.

9. 제2의 수렴조건은 다음 식과 같다.

$$\left| \frac{C_b - C_a}{C_b} \right| \leq 1 \times 10^{-3} \quad (38)$$

10. 제1 또는 제2의 수렴조건 중 하나를 만족하면 무차원 고유진동수  $C_i$  및 진동형  $\eta, \Psi, \phi$ 를 출력한다.
11. 마지막으로 식(29)-(31)에 의하여 무차원 합응력  $Q^*, M^*, T^*$ 을 산출한다.

이상의 수치해석방법을 이용하여 자유진동 해석의

입력변수인  $\alpha, n, b, k, s$ 를 입력하면, 무차원 고유진동수  $C_i$  및 변위의 진동형  $\eta_i$ , 휨에 의한 회전각  $\psi_i$ , 전단에 의한 회전각  $\phi_i$ 를 수치해석 할 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하였다.

이 연구에서는 4개의 최저차  $C_i (i=1,2,3,4)$  및 이에 대응하는 변위의 진동형  $\eta, \psi, \phi$  및 합응력의 진동형  $Q^*, M^*, T^*$ 를 산정하였다.

#### 4. 수치해석 예제 및 고찰

본격적인 수치해석에 앞서 4계 Runge-Kutta 법에서 적당한 단계길이  $\Delta\alpha$ 를 산정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. Table 2는 수렴해석의 결과를 나타내며 이로부터  $1/\Delta\alpha$ 가 20 이상이면 즉  $\Delta\alpha$ 가 0.05 이하이면 수치해  $C_i$ 는 충분한 정도로 수렴하는 것을 알 수 있다. 이후의 변수연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $1/\Delta\alpha=50$ 로 수치해석하고 이 경우에  $C_i$ 는  $1/\Delta\alpha=100$ 에 대한  $C_i$  값에 대하여 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.

Table 3은 무차원 변수값  $\alpha=1, n=0.3, b=0.1, k=5000, s=0.1$ 을 적용하고 탄성계수비  $g$ 값을

Table 2 수치해\*의 수렴해석

$1/\Delta\alpha$	무차원 고유진동수, $C_i$			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
10	83.58	91.04	104.3	151.5
20	71.24	79.72	92.53	140.9
40	70.36	78.17	91.78	137.4
50	69.29	77.29	90.99	135.9
80	69.28	77.25	90.92	135.4
100	69.28	77.25	90.92	135.4

\*  $\alpha=1, n=0.3, b=0.1, k=5000, s=0.1$

Table 3 탄성계수비( $g$ )가  $C_i$ 에 미치는 영향

$g$	무차원 고유진동수, $C_i$			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0.30	69.28	77.24	90.52	126.3
0.35	69.28	77.24	90.77	132.9
0.40	69.28	77.25	90.92	135.4
0.45	69.28	77.25	91.02	135.4
0.50	69.28	77.26	91.06	135.4

\*  $\alpha=1, n=0.3, b=0.1, k=5000, s=0.1$

0.3~0.5사이에서 변화시키며  $C_i$ 값을 산출하여  $g$ 의 영향을 분석한 표이다.  $g$ 값이 증가하면  $C_i$ 값은 증가한다.  $g$ 값이 크면 전단강성이 큰 재료이므로 변위의 감소를 초래하고 그 결과로 고유진동수는 증가한다. 따라서 전단변형효과를 고려하면 변위의 증가를 초래하여 고유진동수는 감소한다.  $g$ 의 영향은 저차모드에서 보다 고차 모드에서 더 크다.

Fig. 4는  $C_i-\alpha$  곡선이다. 중심각  $\alpha$ 값이 증가하면  $C_i$ 값은 감소한다. 제1모드( $i=1$ )의  $C_1$ 값은 거의 변화가 없다. 고차모드의 감소율은 저차모드의 감소율보다 크기 때문에 모든 곡선이 특정 수평선에 접근한

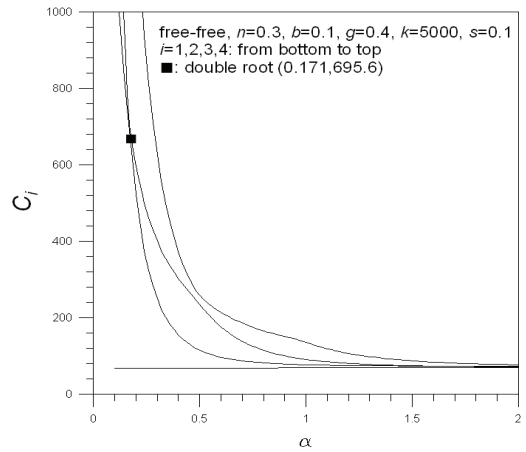


Fig. 4 곡선

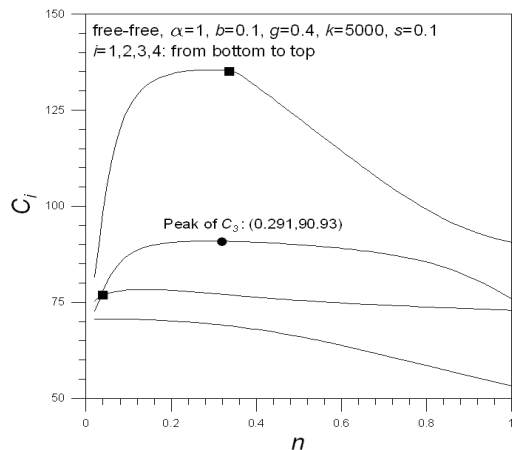


Fig. 5  $C_i-n$  곡선

다. 결과적으로  $C_i (i=2,3,4)$  값들은 제1모드의  $C_1$  값에 근접하게 된다. 이 그림에서 두 개의  $C_i$  곡선이 교차하는 경우가 있다. 즉, ■로 표시한 (0.171, 695.6)에서 즉  $\alpha=0.171$ 에서  $C_2=C_3=695.6$ 의 중복근을 갖는다. 따라서  $\alpha=0.171$ 의 띠기초는 다른  $\alpha$  값에 비하여 공진의 가능성이 매우 크므로  $\alpha=0.171$ 의 제원으로는 설계하지 않는 것이 바람직하다.

Fig. 5은  $C_i-n$  곡선이다. 깊이비  $n$  값이 증가하면  $C_i$  값은 증가하다가 최대치를 보인 후에 감소하는 경향이 있다. 예로서 제3모드  $C_3$ 의 경우에는 ●로 표시한 (0.291, 90.93)에서 최대치를 보인다. 따라서

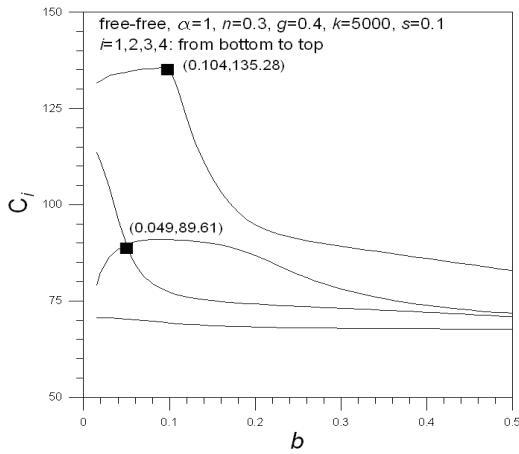


Fig. 6  $C_i-b$  곡선

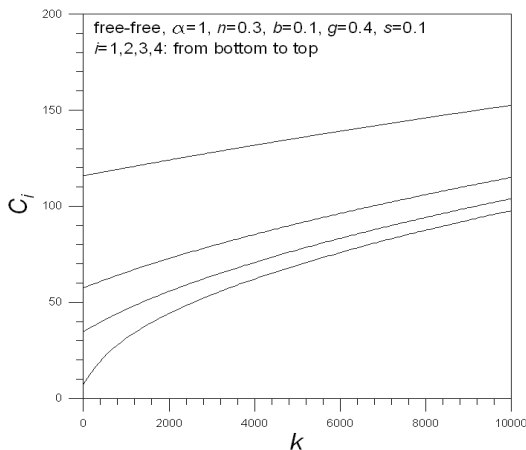
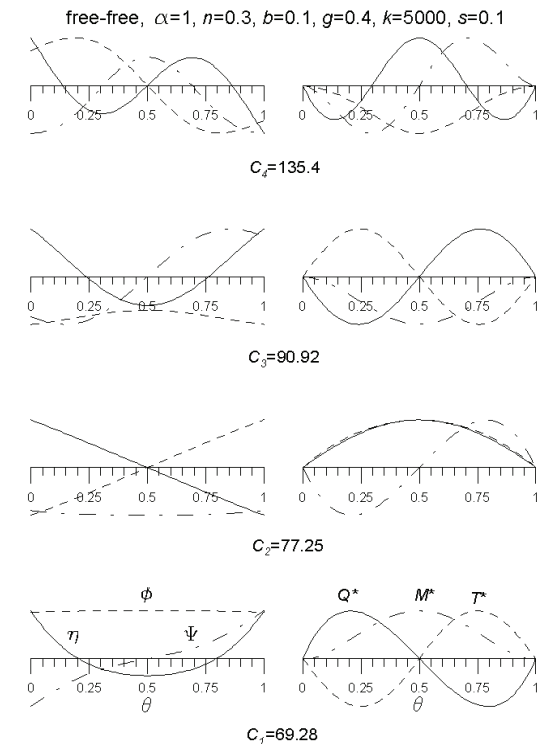


Fig. 7  $C_i-k$  곡선

제3모드에 대한 가장 강인한 띠기초의 제원은  $n=0.291$ 인 경우이다. Fig. 5에서와 마찬가지로  $C_i-n$ 의 관계에서도 ■로 표시한 중복근을 갖는  $n$  값이 두 곳 존재하는 것을 알 수 있다.

Fig. 6은  $C_i-b$  곡선이다. 접촉비  $b$  값이 증가하면  $C_i$  값은 대체로 감소하는 경향이 있지만 특정  $b$  값 이하에서는 증가하는 경향도 있다. 따라서 높은 고유진동수를 갖는 강인한 띠기초를 설계하기 위해서는  $b=0.104$ 이하의 값이 되도록 설계하는 것이 바람직하다. 이 그림에서도  $C_i-b$ 의 관계에서 ■로 표시한 중복근을 갖는  $b$  값이 두 곳 존재한다.

Fig. 7은  $C_i-k$  곡선이다. 지반변수  $k$  가 증가하면  $C_i$  값은 크게 증가한다.  $k$  값은 지반재료를 적절하게 치환하여 조절할 수 있으므로 상부하중에서 작용하는 동하중의 진동수가 띠기초의 고유진동수를 피할 수 있는 소요의 고유진동수를 갖도록 하는 최적의 지반재료를



(a) Deformations (b) Stress Resultants

Fig. 8 진동형



이 그림으로부터 찾을 수 있다.

Fig. 8은 변위 및 합응력의 진동형을 나타낸다. 이 그림으로부터 (a)변위와 (b)합응력의 진폭의 크기 및 무진폭의 위치를 알 수 있다. 띠기초의 설계에서 상부 동하중의 위치를 무진폭의 위치에 작용할 수 있도록 결정하는데 이 그림은 매우 유용한 동적 자료를 제공할 수 있다.

## 5. 실험

### 5.1 실험방법

띠기초의 뼈대구조인 곡선보의 재질을 알루미늄으로 선정하고 직사각형 단면으로 재단하여 소정의 중심각  $\alpha$ 와 곡률반경  $\rho$ 를 갖도록 시편을 제작하였다. 띠기초의 양단부가 자유이므로 제작된 곡선보를 지반으로 선정한 탄성매트 위에 단순히 거치시키면 모형 띠기초의 제작이 완료된다. 시편의 가속도 응답을 측정하기 위하여 가속도 센서를 시편에 부착하고, 가진력을 측정하기 위한 가속도 센서가 부착된 충격망치를 이용하여 시편 위에 표시된 가진점을 차례로 가진하면서 가진력과 가속도응답을 동시에 측정하였다. 이렇게 측정된 주파수 응답함수에 대한 곡선적합을 실시하여 띠기초 시편의 고유진동수를 측정하였다. 이러한 실험방법은 Ewins(4)의 문헌에 자세하게 기술되어 있다.

### 5.2 띠기초의 제원

본 실험에 이용한 띠기초의 각종 제원은 다음과 같

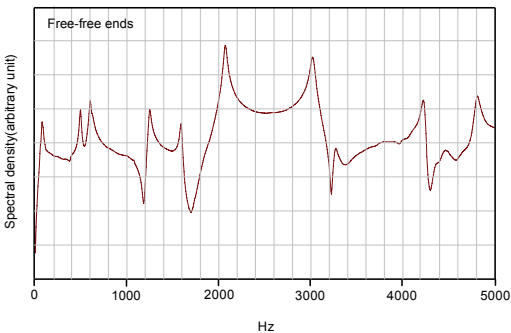


Fig. 9 응답함수

다. 먼저 띠기초의 기하학적 제원은 중심각  $\alpha = 1.22$  rad, 곡률반경  $\rho = 0.3$  m이고, 단부조건은 자유-자유를 택하였다. 띠기초의 뼈대구조인 곡선보의 기계적 성질은 알루미늄으로 채택하였다. 알루미늄의 탄성계수, 전단 탄성계수 및 질량밀도는 각각  $E = 7 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>,  $G = 2.6 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup> 및  $\gamma = 2.6$  t/m<sup>3</sup>이다. 띠기초의 단면은 단면폭이  $B = 0.03$  m, 단면깊이가  $H = 0.006$  m인 직사각형 등단면으로 채택하였다. 마지막으로, 지반은 탄성매트를 이용하였고 탄성매트의 지반반력계수는  $K = 3.5 \times 10^3$  kN/m<sup>3</sup>, 전단계수는  $S = 4.62$  kN/m이다.

### 5.3 실험결과

실험으로부터 얻어진 모형 띠기초의 주파수 응답함수를 Fig. 9에 나타내었다. 이 그림에서 첨두에 해당하는 수평축의 좌표값이 작은 순서로  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$ 의 고유진동수(Hz)이다.

Table 4는 본 연구의 이론에서 얻어진 10개의  $C_i$ ,  $F_i$  (Hz)값들과 실험에서 얻어진 10개의  $F_i$  (Hz) 값을 비교한 표이다. 이론과 실험 사이의 오차는 0.88% ~ 3.26%를 보이며 평균 2.18%의 오차를 보여 두 결과는 매우 우수하게 근접하고 있다. 특히 고차모드에서도 두 결과는 매우 우수하게 근접하고 있다.

이상과 같은 모형실험의 결과로부터 이 연구에서 유도한 지배미분방정식, 경계조건 및 수치해석방법의 이론적 접근이 모두 타당함을 검증할 수 있었다.

Table 4 이론과 실험의 고유진동수(Hz) 비교

$i$	이론		실험	차이(%)
	$C_i$	$F_i$ (Hz)	$F_i$ (Hz)	
1	4.67	75	76	1.32
2	31.1	494	503	1.79
3	37.3	592	610	2.95
4	76.5	1215	1256	3.26
5	101.4	1611	1597	0.88
6	127.0	2018	2075	2.75
7	184.4	2930	3026	3.17
8	203.1	3227	3281	1.65
9	258.6	4108	4232	2.93
10	299.5	4759	4810	1.06

\* 차이(%) = |(이론-실험)/실험| × 100

## 6. 결 론

이 논문에서는 원호형 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였으며, 유도한 지배미분방정식을 수치해석하여 띠기초의 고유진동수와 변위 및 합응력의 진동형을 산정하였다.

이 논문의 수치해석 결과를 분석하여 다음의 결론을 얻었다.

- 1) 탄성계수비  $g$ 가 증가하면 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 증가한다.
- 2) 전단변형 효과를 무시하면  $C_i$ 는 과소평가 된다.
- 3) 중심각  $\alpha$ 가 증가하면  $C_i$ 는 감소한다.
- 4) 깊이비  $n$ 가 증가하면  $C_i$ 는 증가하다 최대치를 보인 후에 다시 감소한다.
- 5) 동일한 곡선보의 입력변수에 대하여 중복근  $C_i$ 를 갖는 경우도 있다.
- 6) 지반변수  $k$ 가 증가하면  $C_i$ 는 증가한다.
- 7) 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 상부구조를 지지하는 원호형 띠기초의 설계 및 건전성 평가에 매우 유용한 동적 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고문헌

1. 이병구, 이용수, 오숙경, 이태은, "비균질 Pasternak 지반으로 지지된 집중질량을 갖고 면내력을 받는 후판의 자유진동", 대한토목학회 논문집, 제24권, 제1A호, 2004, pp.79-85.
2. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R. "Numerical Method in Engineering Practice", Reinhardt and Winston, USA, 1986.
3. De Rosa, M.A. and Maurizi, M.J., "The Influence of Concentrated Masses and Pasternak Soil on the Free Vibrations of Euler Beams-Exact Solution", Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, 1988, pp. 573-581.
4. Ewins, D.J., "Modal Testing : Theory and Practice",

John Wiley & Sons, Inc., 1985.

5. Kok, A., "Dynamic Analysis of Beams on a Pasternak Foundation", Proceedings of the Fourth Conference on Computer in Civil Engineering, ASCE, 1986, pp. 553-560.
6. Lee, B.K., Oh, S.J. and K.K. Park., "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 2, No. 1, 2002, pp. 77-97.
7. Paliwal, D.N., Sindhi, S.N. and Ahmad, A., "Hyper Shell on Pasternak Foundation", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.118, No.5, 1992, pp. 1303-1316.
8. Rashed, Y.F., Aliabadi, M.H. and Brebbia, C.A., "Formulation of Mindlin-Engesser Model for Stiffened Plate Vibration", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 120, 1999, pp. 339-353.
9. Shastry, B.P. and Rao, G.V., "Dynamic Stability of Cantilever Columns Resting on an Elastic Foundation", Computers & Structures, Vol.25, 1987, pp. 157-158.
10. Selvadurai, A.P.S., "Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction", Elsevier, UK., 1979.
11. Timoshenko, S.P., "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars", Philosophical Magazine, Vol. 41, pp. 744-746.
12. Volterra, E. and Gains, J.H., "Advanced Strength of Materials", Prentice-Hall, USA.
13. Wang, T.M. and Stephens, J.E., "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation, Journal of Sound and Vibration", Vol. 51, 1977, pp. 149-155.
14. Yokoyama, T., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Column on Two-Parameter Elastic Foundations", Computers & Structures, Vol. 61, 1996, pp. 995-1007.

(접수일자 : 2008년 8월 9일)

(심사완료일자 : 2008년 10월 17일)