

공간구조물의 탄성 분기좌굴해석을 위한 수치해석 이론 개발

A Development of Analytical Strategies for Elastic Bifurcation Buckling of the Spatial Structures

이 경 수¹⁾ · 한 상 을²⁾
Lee, Kyung Soo Han, Sang Eul

요 약 : 본 논문은 기하학적 비선형성을 가진 보존적 단일 하중 매개변수의 탄성 상태 공간구조의 탄성 분기 좌굴이론에 관한 수치 해석적 기본 방법 및 경로 추적, pin-pointing, 경로 전환을 기술하고 있다. 비선형 탄성 불안정 상태는 극한점과 분기점으로 분류될 수 있으며, 평형경로상의 평형점의 계산 및 평형경로상의 특이점을 찾기 위한 pin-pointing 반복계산을 수행하는 일반적인 비선형 수치해석법으로 극한점을 계산할 수 있다. 그러나 분기좌굴 해석을 위해서는 좌굴 후 분기경로의 추적을 위한 분기경로 전환 알고리즘이 추가적으로 필요하다. 본문에서는 에너지이론에 기초한 일반 탄성안정이론을 소개하고, 평형경로 추적, 다분기 좌굴점을 찾기 위한 간접법과 다분기의 경로 전환에 관한 이론을 전개한다. 분기좌굴 해석예제로 트러스로 이루어진 스타돔, 핀지지의 평면아치의 분기좌굴 해석을 수행하여 본문에서 제시한 수치해석법의 정확성 및 적용성을 검증한다.

ABSTRACT : This paper briefly describes the fundamental strategies—path-tracing, pin-pointing, and path-switching—in the computational elastic bifurcation theory of geometrically non-linear single-load-parameter conservative elastic spatial structures. The stability points in the non-linear elasticity may be classified into limit points and bifurcation points. For the limit points, the path tracing scheme that successively computes the regular equilibrium points on the equilibrium path, and the pinpointing scheme that precisely locates the singular equilibrium points were sufficient for the computational stability analysis. For the bifurcation points, however, a specific procedure for path-switching was also necessary to detect the branching paths to be traced in the post-buckling region. After the introduction, a general theory of elastic stability based on the energy concept was given. Then path tracing, an indirect method of detecting multiple bifurcation points, and path switching strategies were described. Next, some numerical examples of bifurcation analysis were carried out for a trussed stardome, and a pin-supported plane circular arch was described. Finally, concluding remarks were given.

핵심용어 : 탄성안정, 분기좌굴, 분기, 호장법, 후좌굴해석

KEYWORDS : elastic stability, bifurcation, brach switching, arc-length method, post buckling analysis

1. 서론

본 논문은 구조물의 탄성안정문제를 이론적인 측면에서 연구한 것이다. 탄성안정문제의 수치해석방법으로서 호장법과 비선형 유한요소법을 사용하였으며, 이를 통하여 탄성안정에 있어서 대표적인 임계상태인 분기좌굴에 관한 수치해석상 특성을 파악하였다.

탄성안정문제의 일반이론에 중점을 둔 연구로 Koiter(1945),

Thompson 등(1973)의 연구가 있다. 이들의 연구는 탄성안정 문제의 이론을 적립하고 체계를 구축하는데 중요한 역할을 하였지만, 고차의 수학적 안정이론을 유한요소법과 같이 해석적인 방법에 정확히 적용하기란 한계가 있었다. 따라서 근래에는 비선형 해석법인 호장법과 비선형 유한요소이론(Crisfield 등, 1990)을 접목하여 실제적인 탄성안정문제에 적용하였다. 분기좌굴해석 등 탄성안정에 대한 근래의 해석적 이론은 Crisfield 등(1990), Choong 등(1993)에 의해 자세히 소개되었다.

1) 인하대학교 건축학부 박사후 연구원, 공학박사(1ks1838@naver.com)

2) 교신저자, 인하대학교 건축학부 교수, 공학박사

(Tel: 032-860-7592, Fax: 032-873-5724, E-mail : hsang@inha.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2010년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

탄성안정이론에서 정의하는 임계점은 극한점과 분기점으로 구분할 수 있다. 외부하중에 대한 구조물의 평형상태를 나타내는 평형경로의 계산은 통상적인 비선형 해석법으로 이루어지며, 임계점을 전후로 한 평형경로의 계산은 위의 수치해석 방법이 그대로 적용된다. 그러나 임계상태의 분류인 극한점과 분기점에 따라 기본경로 혹은 분기경로로의 전환을 위해서는 임계점의 특성을 파악해야하며, 각각의 임계점의 특성에 따라 기본경로, 분기경로로의 평형경로를 추적한다.

본 논문에서는 평형방정식의 고차항은 고려하지 않은 상태에서, 최소고유치에 의해 결정되는 매개변수의 계산을 통해 임계점을 탐색하였다. 이와 같이 매개변수를 통해 임계점을 파악하는 방법을 간접법(Riks, 1979; Riks, 1984; Wagner 등, 1988; Fujii 등, 1992)이라한다. 이와 구별되는 탐색방법인 직접법(Wriggers 등, 1988; Wriggers 등, 1990)은 임계조건을 나타내는 확장시스템(extended system)을 이용해 임계점과 관련된 고유모드를 얻는데 사용되며, 이를 위해 추가식이 비선형 평형방정식에 더해진다. 평형경로의 계산은 앞에서 언급했듯이 호장법에 의한 비선형 해석법을 적용하여 극한점, 분기점 전후의 평형경로를 추적하였다. 특히 분기점의 특성에 따라 분기경로를 추적하는 방법으로 고유치해석을 수행하여 얻은 최소고유모드를 이용하는 Fujii 등(1993, 1997)의 방법을 사용하였다. 개발된 해석법의 검증을 위해 분기좌굴해석과 관련된 대표적인 해석예제를 수행하여 해석결과를 검토하였다.

단순분기의 경우에 대해서만 최소고유치를 이용하였던 이전 연구에서는 다분기나 복합분기를 위해서는 특해모드의 계산을 위해서 종속행렬을 소거한 강성행렬의 축약과정이 필요하였고, 이러한 과정이 복잡한 분기해석을 저해하는 수치 해석적 단점을 야기하였다. 이에 본 연구에서는 고유치해석 후 각각의 고유치에 대한 보정(Crisfield, 1997)을 통한 재 정렬을 수행하여 특해모드의 사용 없이 다분기나 복합분기의 경로탐색을 수행하였다.

2. 탄성안정이론

구조물의 포텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$\Pi(\mathbf{d}, \lambda) = U + V \quad (1)$$

Π : total potential energy, U : strain energy, V : external work, \mathbf{d} : displacement, λ : scalar load parameter

위 식에 대한 테일러급수를 전개하면 포텐셜 에너지의 변화율 $\delta\Pi$ 는 아래식과 같다.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}}\delta\mathbf{d} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{d}^T \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{d}^2} \delta\mathbf{d} + O(\delta\mathbf{d}^3) \quad (2)$$

위 식을 불평형력벡터 $\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) = \partial\Pi/\partial\mathbf{d}$, 접선강성행렬 $\mathbf{K}_t = \partial^2\Pi/\partial\mathbf{d}^2$ 의 관계식을 적용하고, 고차항을 생략하여 정리하면 아래와 같다.

$$\delta\Pi = \mathbf{g}^T \delta\mathbf{d} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{d}^T \mathbf{K}_t \delta\mathbf{d} \quad (3)$$

평형상태에서는 증분변위와 독립적인 정류(stationary)조건에 의해 평형조건식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{,\delta\mathbf{d}} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}} = \mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{d}) - \lambda\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4)$$

위 식에서 \mathbf{f} 는 내력벡터이다. 보존계의 안정이론에 따라 안정평형상태에서는 식(2)의 오른쪽 두 번째 항은 양의 값을 갖는다.

$$\Pi_{,\delta\mathbf{d}^2} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{d}^T \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{d}^2} \delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{d}^T \mathbf{K}_t \delta\mathbf{d} > 0 \quad (5)$$

만약 위 식이 양의 값을 갖지 않는다면 이 상태는 불안정상태라 하며, 평형경로, $[\mathbf{d}, \lambda]$ 의 안정점과 불안정점 사이의 변화는 $\Pi_{,\delta\mathbf{d}^2}$ 값이 양에서 음으로 변화할 때를 나타낸다. 평형경로상의 이 상태를 임계상태라 하고, 본 논문에서는 평형경로의 길이에 대한 매개변수 l 와 *로 표기하며, 임의의 벡터 \mathbf{x} 에 대해서 아래와 같은 특성을 나타낸다.

$$(\mathbf{d}^*, \lambda^*) = (\mathbf{d}(l^*), \lambda(l^*)) \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{d}^*, \lambda^*) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (7)$$

임계상태를 나타내는 위 식에 대한 명확한 정의는 아래와 같이 $w_i = 0$ 을 만족시키는 일반고유치 문제로 정의할 수 있다.

$$[\mathbf{K}_t - w_j \mathbf{I}] \phi_j = \mathbf{0} \quad (8)$$

위 식에서 \mathbf{I} 는 단위 행렬이고, ϕ_i 는 i 번째 고유벡터이다. 임계상태에 대한 또 다른 판단기준으로 필요조건만을 만족시키는 행렬식이 있으며, 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \det[K_t] = 0 \quad (9)$$

평형상태에서 $[d(l), \lambda(l)]$ 는 N 개의 자유도에 대해 고유치 w_j 가 다음식을 만족시키는 한 시스템은 안정하다.

$$0 < w_1 \leq w_2 \leq w_3 \cdots \leq w_N \quad (10)$$

위 식이 아래식과 같을 때 임계상태 혹은 안정한계에 도달한다.

$$0 = w_1 = w_2 \cdots = w_k < w_{k+1} \cdots \leq w_N \quad (11)$$

본 논문에서는 $w_k = 0$ 인 $k = 1$ 인 단순임계 뿐 아니라 $k > 1$ 인 다중임계상태에 대해서도 고려하였다.

식(4)의 불평형력 벡터를 평형상태 $[d_0, \lambda_0]$ 에 테일러급수를 전개하면, 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$g(d, \lambda) = g(d_0, \lambda_0) + \frac{\partial g}{\partial d_0} \Delta d + \frac{\partial g}{\partial \lambda_0} \Delta \lambda + O(\Delta d^2, \Delta \lambda^2, \Delta d \delta \lambda) \quad (12)$$

위에서 고차항을 생략하고, $g(d, \lambda) = g(d_0, \lambda_0) = 0$ 인 평형상태라 가정하면 위 식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial g}{\partial d_0} \Delta d + \frac{\partial g}{\partial \lambda_0} \Delta \lambda = K_t \Delta d - \Delta \lambda p = 0 \quad (13)$$

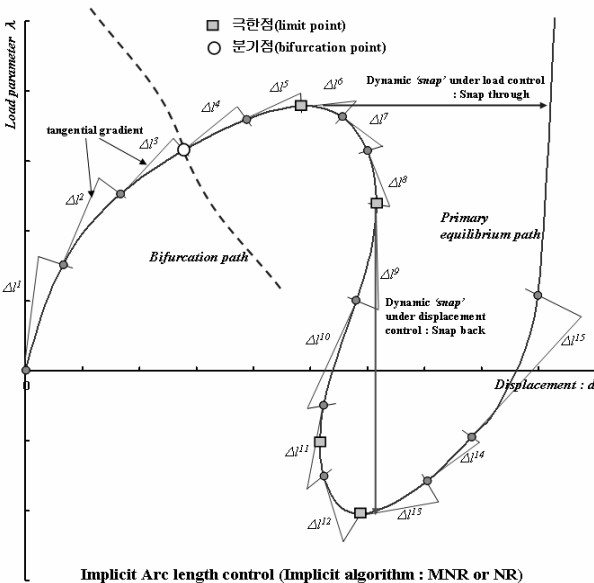


그림 1. 호장법 및 임계점의 특성

위식에서 p 는 하중벡터이고, 평형경로상에서 구조물이 안정에서 불안정으로 바뀌는 임계점에서의 최소고유치 $w_1 = 0$ (혹은 거의 0에 가까운 고유치값)이 되며, 이에 대한 최소고유벡터 ϕ_1 을 위 식에 대입하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta d^T K_t \phi_1 - \Delta \lambda p^T \phi_1 = 0 \quad (14)$$

위식의 왼쪽 첫 번째항은 식(7)에 의해 소거되어 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \lambda p^T \phi_1 = 0 \quad (15)$$

위식이 만족할 조건은 다음조건과 같이 나눌 수 있으며, 이 조건은 임계상태를 극한점(limit point)과 분기점(bifurcation point)로 구별하는 조건식이 된다.

$$p^T \phi_1 \neq 0, \quad \Delta \lambda = 0 : \text{극한점} \quad (16a)$$

$$p^T \phi_1 = 0 : \text{분기점} \quad (16b)$$

따라서 식(16)에 의해 분기점 여부를 판단하게 된다. 만약 구조물에 약간의 섭동이나 불완전이 도입된다면, 분기점부근에서 기본경로가 아닌 제2의 경로로 평형경로가 바뀌게 되며, 이러한 경로를 분기경로라 한다.

3. 평형경로의 탐색

비선형 평형경로를 계산하는 가장 효율적인 해석법은 호장법이라 할 수 있다. Newton-Raphson법을 이용한 일반적인 증분형 해석법(변위, 하중 증분법)은 하중 혹은 변위를 매개변수를 이용하여 해석을 수행하기 때문에, 비선형 평형경로 상에서 발생하는 극한점과 같은 변곡점 이후의 거동을 정확하게 계산 할 수 없다. 이에 반해 호장법은 미리 정의된 호장 매개변수 a 를 적용한 호장제약식을 통해 기본경로상의 변위와 하중매개변수 $[d, \lambda]$ 를 동시에 계산할 수 있어, 극한점, 분기점과 같이, 평형경로 상에 발생하는 복잡한 변곡점 이후의 거동을 매우 정확하게 계산 할 수 있다.

호장법을 이용하면, 예측(predictor)단계에서는 식(13)과 호장제약식을 이용하여 아래의 두 식을 연립하여 변위 하중 매개변수 $[\Delta d, \Delta \lambda]$ 를 계산한다.

$$K_t \Delta d - \Delta \lambda p = 0 \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} + b \Delta \lambda^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta l^2 \quad (18)$$

b : 비례상수, Δl : 호장길이

식(18)에서 비례상수 b 의 값에 따라 구형 호장제약식, 원통형 호장제약식으로 구분되며, 본 논문에서는 $b = 1$ 로 하여 Riks의 구형호장법(細野秀, 1974; Riks, 1979; Riks, 1984; Fujii 등, 1993)을 적용하였다.

예측단계에 대한 수직방향의 수정(corrector)단계의 반복 계산에서는 식(17), 식(18)을 선형화하여 아래 식을 연립하여 $[\delta \mathbf{d}, \delta \lambda]$ 를 계산한다.

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} - \delta \lambda \mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{d}_i, \lambda_i) \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{d}^T \delta \mathbf{d} + b \Delta \lambda \delta \lambda^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = 0 \quad (20)$$

기본경로에 대한 평형점은 예측단계의 매개변수인 호장길이 Δl 에 의해 반복 수렴과정을 통해 결정되며, 증분 변위, 증분 하중매개변수는 아래의 식으로 수정된다.

$$\lambda_{i+1} = \lambda_0 + \Delta \lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta \lambda_i \quad (21)$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \eta_i \delta \mathbf{d}_i \quad (22)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1} = \Delta \mathbf{d}_i + \eta_i \delta \mathbf{d}_i \quad (23)$$

$$\eta_i = \rho \Delta l_i \quad (24)$$

식(23)에서 η_i 는 평형경로의 접선기울기에 비례하는 계수이며, ρ 는 호장길이에 대한 비례상수로 $0 < \rho \leq 1$ 의 값을 사용한다.

4. 좌굴판정기준

일반적으로 비선형 좌굴해석을 위한 수치계산에 있어서 구조물의 접선강성행렬의 행렬식의 값이 0 또는 최소고유치가 0이 되는 위치를 좌굴점으로 간주한다.

본 논문에서는 기본경로에 대한 매개변수로 호장길이 Δl 를 사용하였으며, $\Delta l \cong 0$ 일 때 극한점이나 분기점 같은 임계점에 도달하였다고 판단하며, 식(16)에 의해 극한점과 분기점을 구분한다. 이와 같이 어떤 매개변수의 값을 통해 간접적으로 좌굴상태를 파악하는 방법을 좌굴판정에 대한 간접법이라 하고, 직접법은 임계조건을 나타내는 확장시스템을 이용해 임계점과 관련된 고유모드를 얻는데 사용되며, 이를 위해 추가식이 비선형 평형방정식에 추가된다.

간접법은 분기점을 찾는 방법 중 가장 일반적인 방법으로, 임계추적 매개변수인 호장 Δl 를 계산하는데, 식(8)의 최소

고유치나 식(9)의 행렬식을 사용한다.

행렬식을 이용하는 방법은 행렬식의 부호를 통해 임계상태를 파악하는 단계는 적용가능 하지만(Crisfield, 1997; Fujii 등, 1992, 1993), 호장길이를 결정하는 단계에서는 부정확한 결과를 나타내었다. 그 이유는 호장길이가 0에 매우 근접하였을 때, 행렬식이 해석오차가 발생하여 비정상적인 값을 나타내었기 때문이다. 이에 반해 최소고유치를 이용하면(한상을 등, 2000; 細野秀, 1974; Riks, 1979; Riks, 1984; Fujii 등, 1997), 계산과정은 보다 더 요구되지만, 행렬식을 이용하는 경우에 비해 보다 더 정확한 임계상태 및 호장길이의 계산이 가능하였다.

임의의 k -단계까지의 평형경로의 호장을 l_k 라하고, 임계점 l^* 에서의 고유치 $w(l^*)$ 를 테일러급수 전개하면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(l^*) = w(l_k) + \dot{w}(l_k) \Delta l_k + \frac{1}{2} \ddot{w}(l_k) \Delta l_k^2 + \dots \quad (25)$$

단순 분기의 경우에 대해서만 식(25)를 고려하였던 이전 연구(한상을 등, 2000; 細野秀, 1974; Choong 등, 1993; Crisfield, 1997; Riks, 1979; Riks, 1984)에서는, 다분기나 복합분기를 위해서는 특해모드의 계산을 위해서 종속행렬을 소거한 강성행렬의 축약과정이 필요하였고, 이 과정이 복잡한 분기해석을 저해하는 수치 해석적 단점을 야기하였다(한상을 등, 2000; Choong 등, 1993).

고유한 임계점에서의 최소고유치는 항상 $w_1(l^*) \cong 0$ 이어야 하는 조건에 의해, 본 연구에서는 고유치해석 후 각각의 고유치에 대한 보정(shift)(Crisfield, 1997)을 통한 재정렬을 수행하여, 평형경로에서 발생하는 여러 개의 임계점에서 각각의 최소고유치 $w_1(l^*) \cong 0$ 되도록 하였으며, 분기경로의 계산을 위해서 이때의 최소고유치에 대한 최소고유벡터를 사용하였다.

식(25)에서 고차항은 소거한 상태에서 Δl_k 에 대해 다시 정리하면 다음이 나타낼 수 있다.

$$\Delta l_k = - \frac{w_1(l_k)}{\dot{w}_1(l_k)} \cong - \frac{w_1(l_k) \Delta l_{k-1}}{w_1(l_k) - w_1(l_{k-1})} \quad (26)$$

임계점에 접근할수록 $\Delta l_k \rightarrow 0$ 이 되므로 다음 식으로 임계점을 판단한다.

$$\Delta l_k < \epsilon \Delta l_1 \quad (27)$$

ϵ : 수렴한계(0.01)

5. 분기경로 전환 알고리즘

평형경로에서 정해벡터 d_i 가 분기점(a^*) 근방에 도달하였을 때, 분기 후 경로에 대한 초기 근사해는 분기점에 적당한 크기를 가진 근사 분기모드 \tilde{d}_i 를 더함으로써 다음식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$d_i = d_{i-1} + \eta_i \tilde{d}_i \quad (28)$$

Crisfield(1997), Wriggers 등(1988)은 근사 분기모드를 구하는데 고차항도 고려하였지만, 본 논문에서는 근사 분기모드를 구하는데 식(12)의 고차항은 고려하지 않은 상태에서 고유벡터만 사용하여(Riks, 1979; Riks, 1984; Fujii 등, 1992, 1993, 1997), 단순분기 및 다중분기모드를 예측하였으며, 식(28)의 근사 분기모드에 대한 일반적인 형태로 Fujii 등(1993, 1997)가 제안한 다음 식을 사용하였다.

$$\tilde{d} = \sum_{m=1}^n \alpha_m \phi_m \quad (29)$$

(n : number of zero eigenvalue at critical point)

if $n = 1$: $\tilde{d} = \alpha_1 \phi_1, \alpha_1 = 1$ (30a)

if $n = 2$: $\tilde{d} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$ (30b)

$$\alpha_1 = \cos \theta, \alpha_2 = \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

if $n = 3$: $\tilde{d} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3$ (30c)

$$\alpha_1 = \cos \theta \cos \gamma, \alpha_2 = \sin \theta \cos \gamma, \alpha_3 = \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$$

식(30)은 최소고유치가 동시에 zero가 발생하는 고유치의 수에 따라 식(29)를 일반화한 식으로 다분기의 경우($n > 1$)에 대해서도 유효한 식이며, n 이 4이상의 고차 다분기의 경우에 대해서는 추가적인 연구가 필요할 것으로 사료된다.

6. 검증예제

이전 연구자의 연구를 통해 해석결과가 보고된 검증예제의 해석을 통해 위에서 기술한 탄성안정이론 및 분기좌굴이론에 대해 검토한다. 좌굴형식에 관한 Thompson의 분류는 이론적으로 대단한 연구 성과지만, 분류의 기준을 위해서는 대각화한 에너지함수의 고차미분계수가 필요하기 때문에 실제의 문제에 응용하기에는 곤란한 경우가 많다. 그러나 본 논문

에서는 고차항은 고려하지 않은 상태에서 강성행렬의 고유치해석이나 행렬식으로 좌굴형식을 분류하고 평형경로, 분기경로를 추적할 수 있기 때문에 수치해석적으로 효율성 및 적용성이 높다고 할 수 있다. 검증에 사용된 검증예제는 비록 간단한 모델이지만 수치해석인 관점에서는 결코 쉽지 않은 해석적 노력이 필요한 예제들이며, 재료적으로 탄성의 무한변위를 가지는 것으로 이상화 한다.

6.1 Star Dome의 좌굴해석

첫 번째 검증예제는 트러스로 구성된 Star Dome의 좌굴 해석이다. Hangai 등(1973)에 의해 해석결과가 보고된 이후로 좌굴해석에 사용되는 대표적인 검증예제이다. 특히 Star Dome 과 같이 트러스요소로 구성된 돔형 구조물이 뿔 좌굴, 분기좌굴과 같은 고도의 비선형해석에 자주 사용되는 이유는 다음과 같다. 트러스요소는 유한요소법에 의한 비선형 평형방정식이 정해의 결과를 보여주고, 수치해석에 사용되는 변수나 필요 계산용량 등이 비교적 간단하여 해석이 용이하고, 뿔좌굴, 분기좌굴과 같은 복잡한 거동이 비교적 명확히 나타나기 때문에, 정확한 해석결과가 이전의 많은 연구자들에 의해 보고되어 있기 때문이다.

그림2는 Star Dome의 해석모델 및 하중 적용상태를 나타내고 있다. 절점은 힌지로 연결되어 있고 지점은 고정되어 있다. 해석결과 첫 번째 뿔좌굴이 발생하기전에 3개의 하중 상태에서 분기좌굴이 발생하였으며, 이와 관련된 좌굴특성을 그림3에 나타내었다. 그림3의 BP1, BP2, BP3은 분기점이고, LP1은 극한점이며, BP2, BP3은 다분기의 특성을 나타내었다. 그림3의 각각의 좌굴점에 대한 좌굴 하중값을 이전의 연구결과와 비교하여 표1에 표기하였다. 해석결과 본 연구의 좌굴하중 해석결과는 이전의 연구결과와 비교적 잘 일치하였다. 본 연구의 해석결과와 기존 연구결과와의 오차는 각각의 연구에서 적용하고 있는 요소 및 알고리즘의 차이에서 발생하는 것으로 판단되며, 평형경로의 추적, 좌굴점의 판단, 분기경로로의 전환과 관련된 해석과정이 매우 효율적으로 수행되었다.

표1. 좌굴하중 비교(하중대개변수, $\lambda(N)$)

위 치	BP1	BP2	BP3	LP1
결 과				
해석결과	8.795	10.461	15.586	18.420
Fujii(1992)	8.689	10.267	15.606	-
Crisfile(1997)	8.680	10.260	15.670	18.400

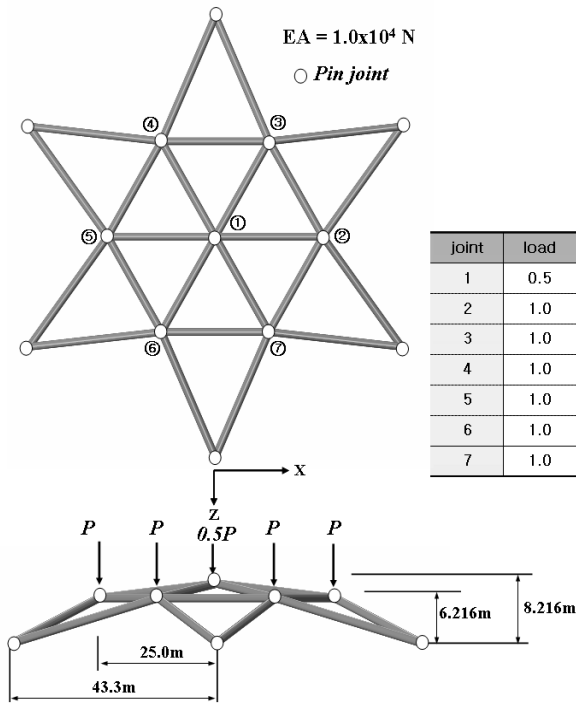


그림 2. Sar Dome 해석모델 및 적용하중 특성

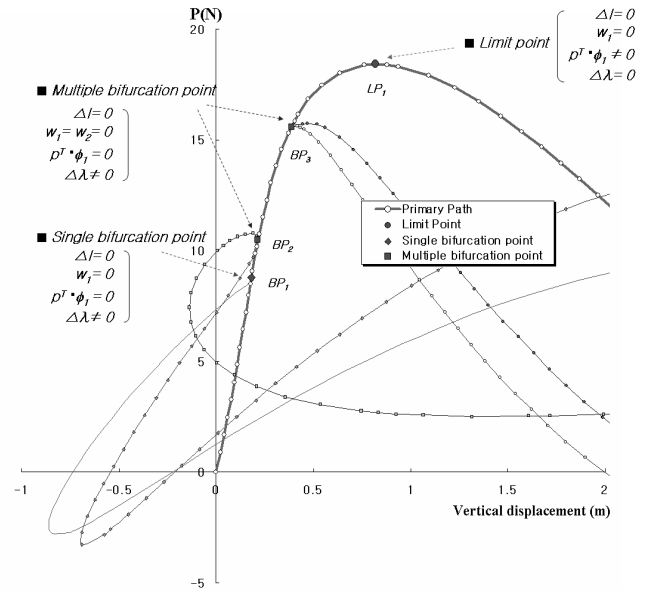


그림 3. Star Dome의 좌굴특성

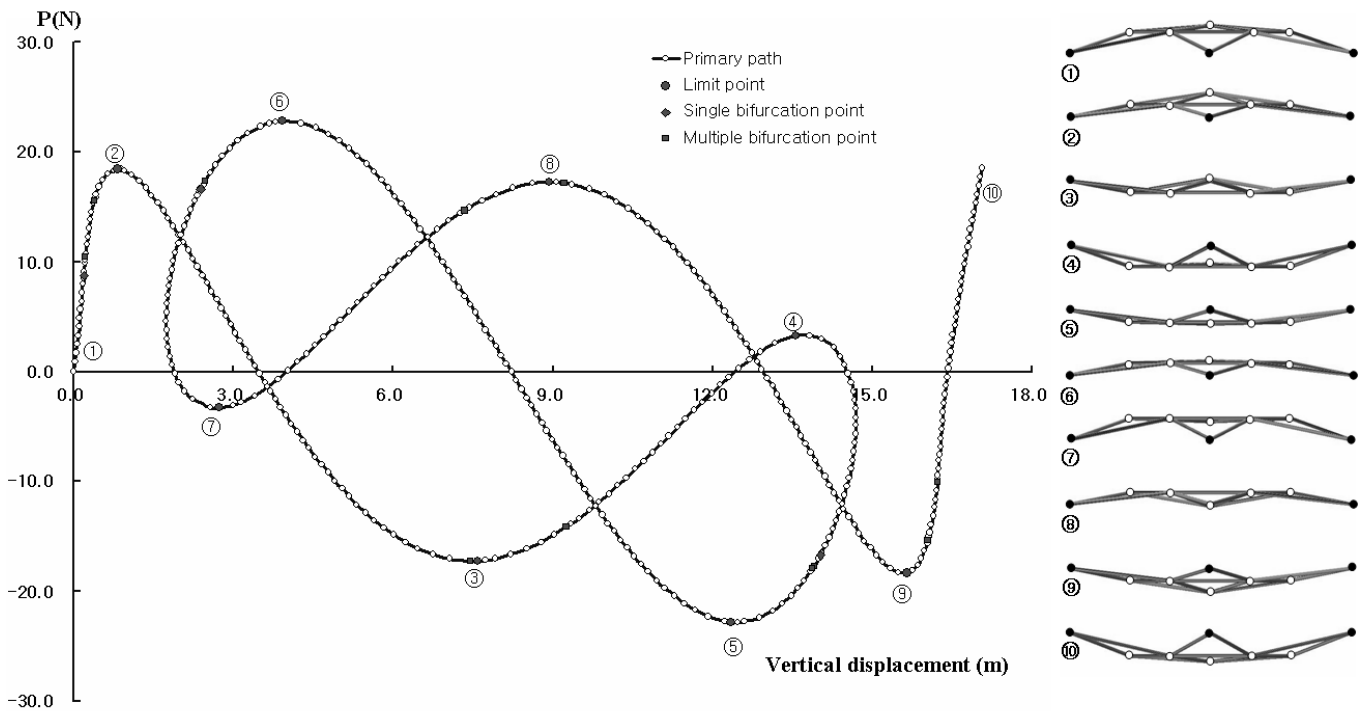


그림 4. Star Dome의 평형경로 및 변형형상(①절점의 수직방향 하중-변위)

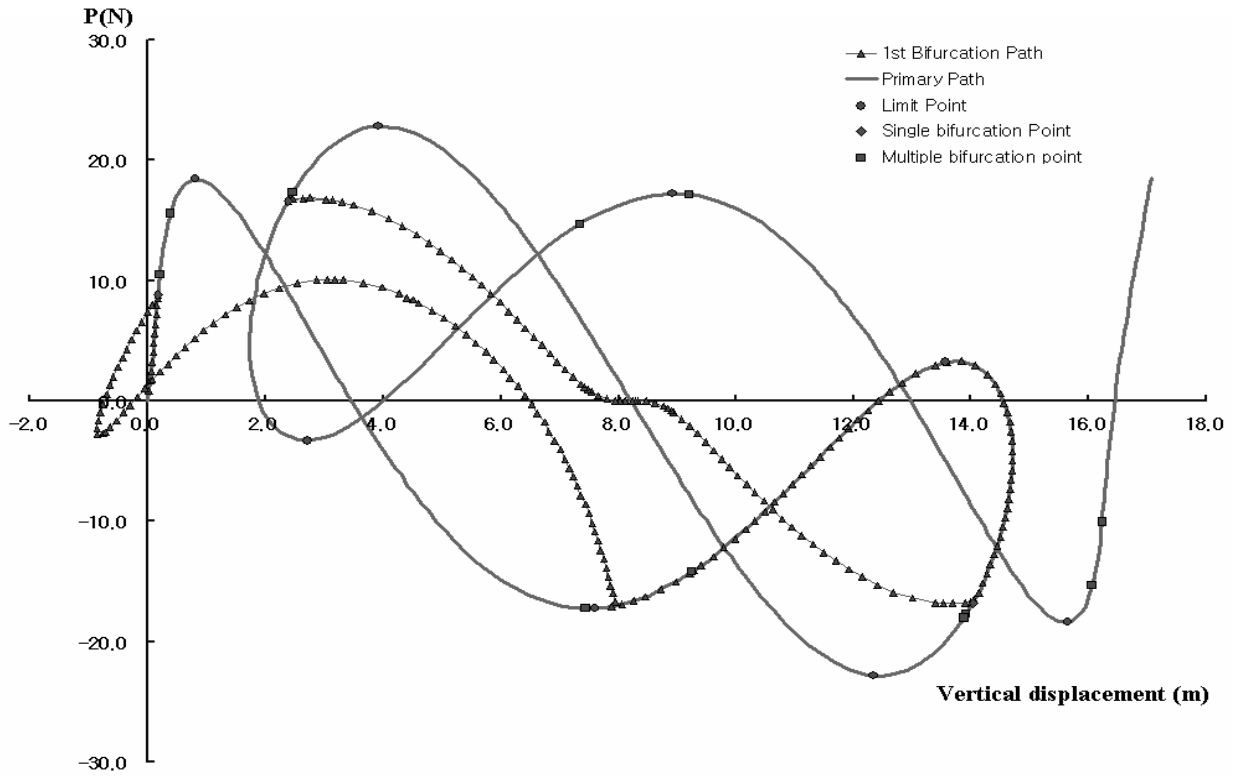


그림 5. 1st bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

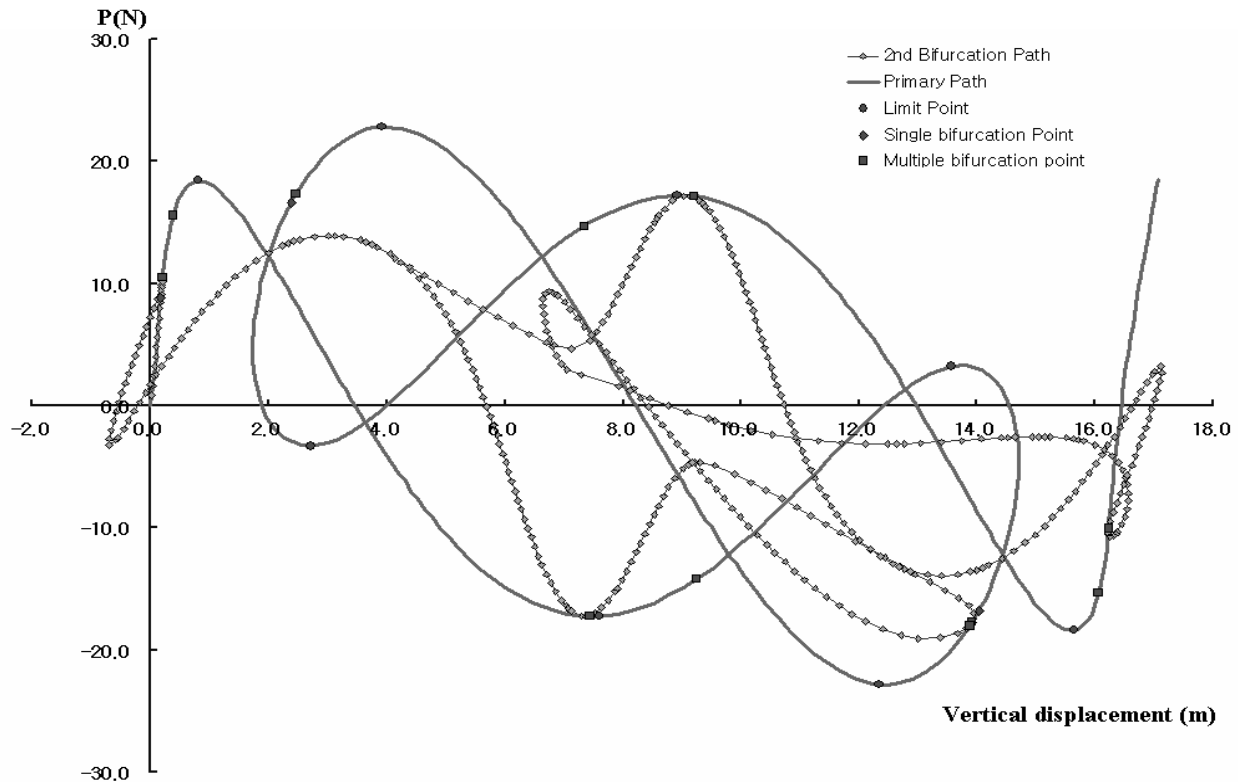


그림 6. 2nd bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

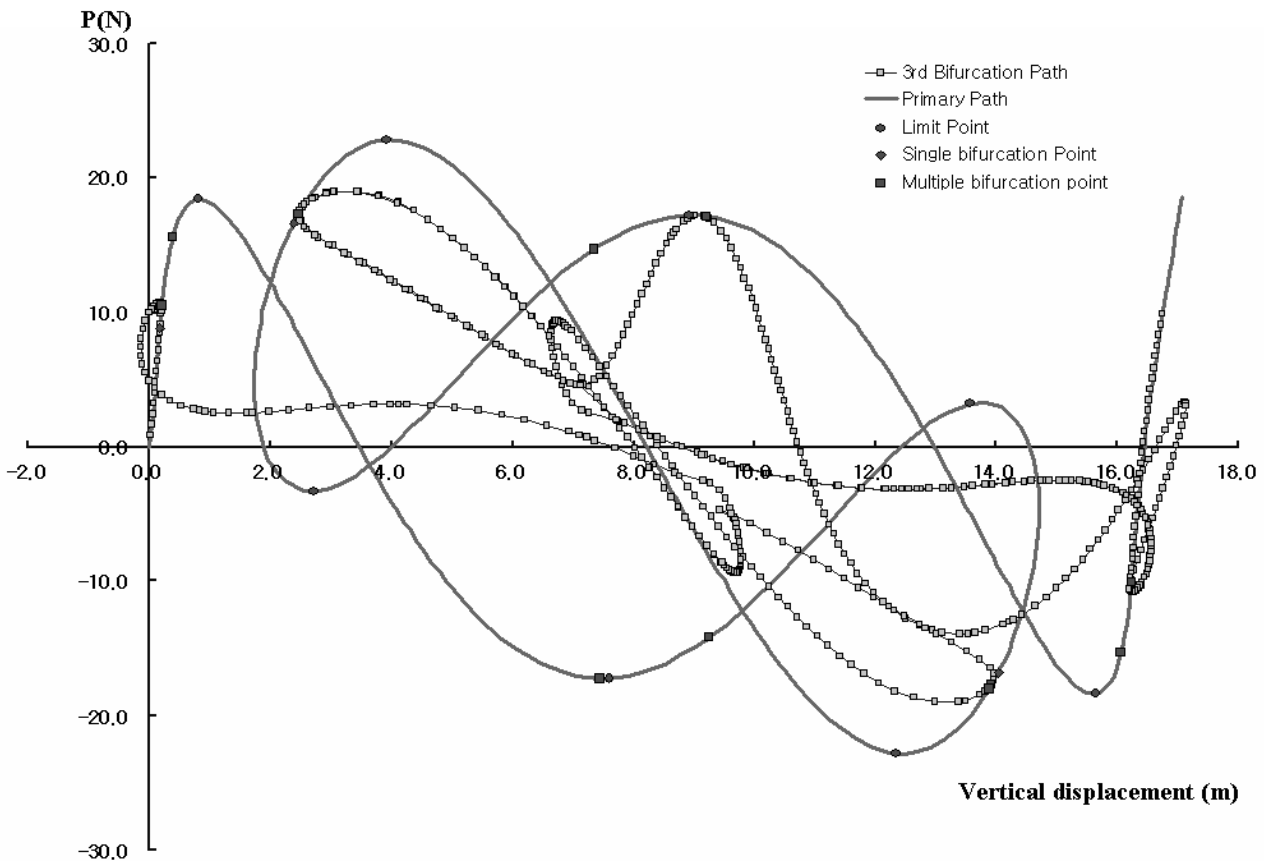


그림 7. 3rd bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

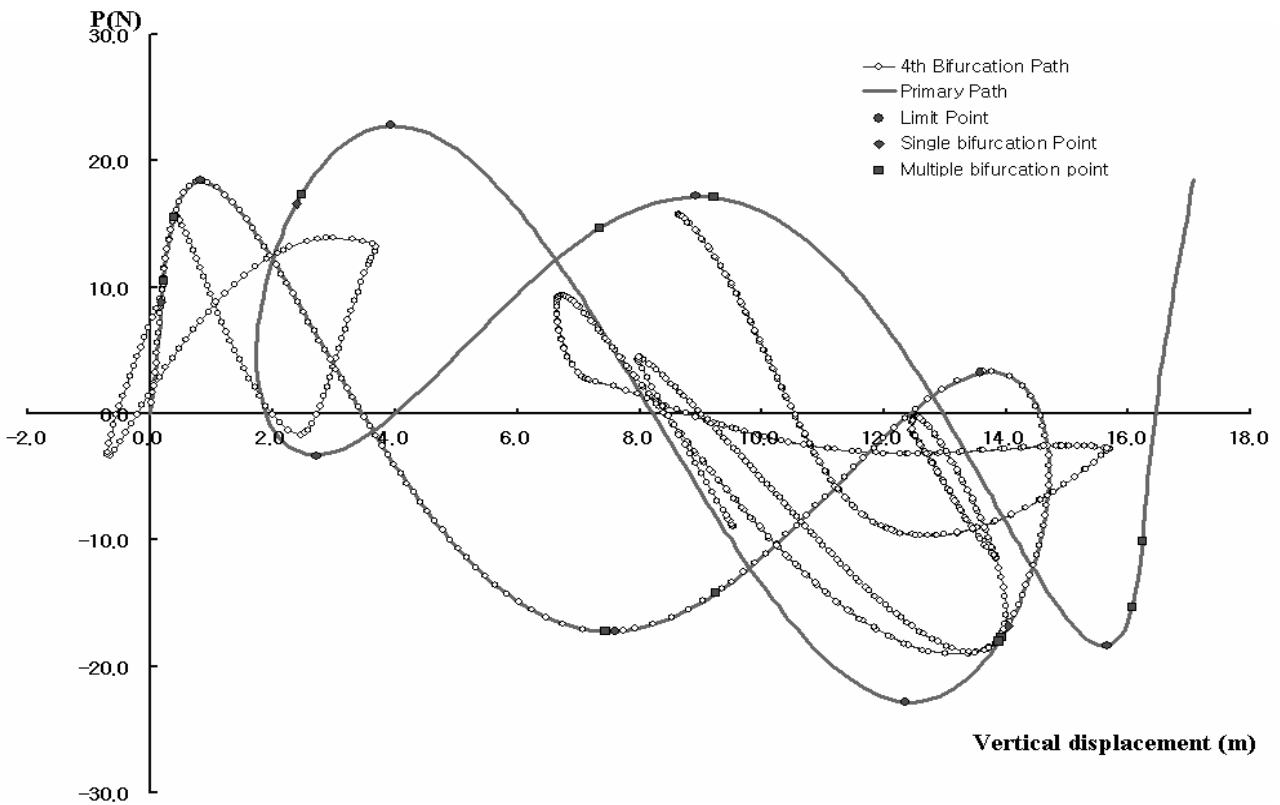


그림 8. 4th bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

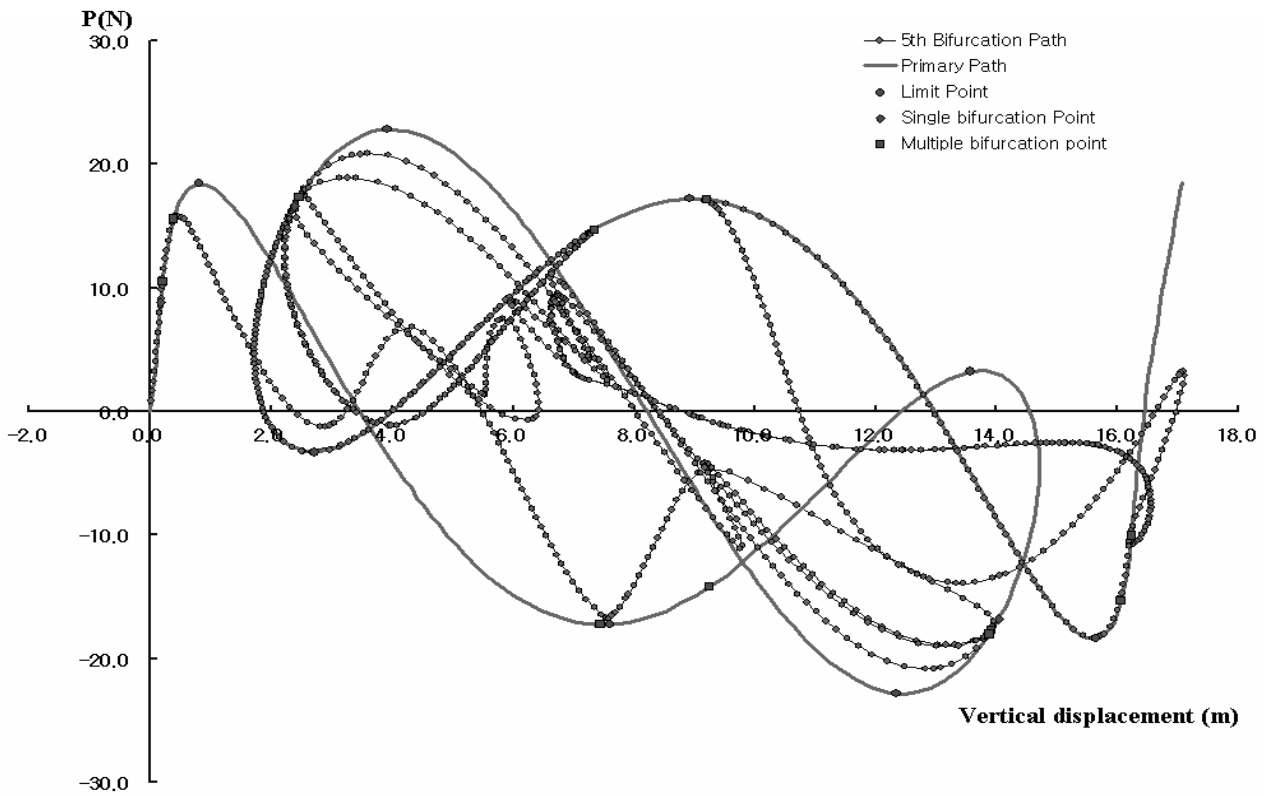


그림 9. 5th bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

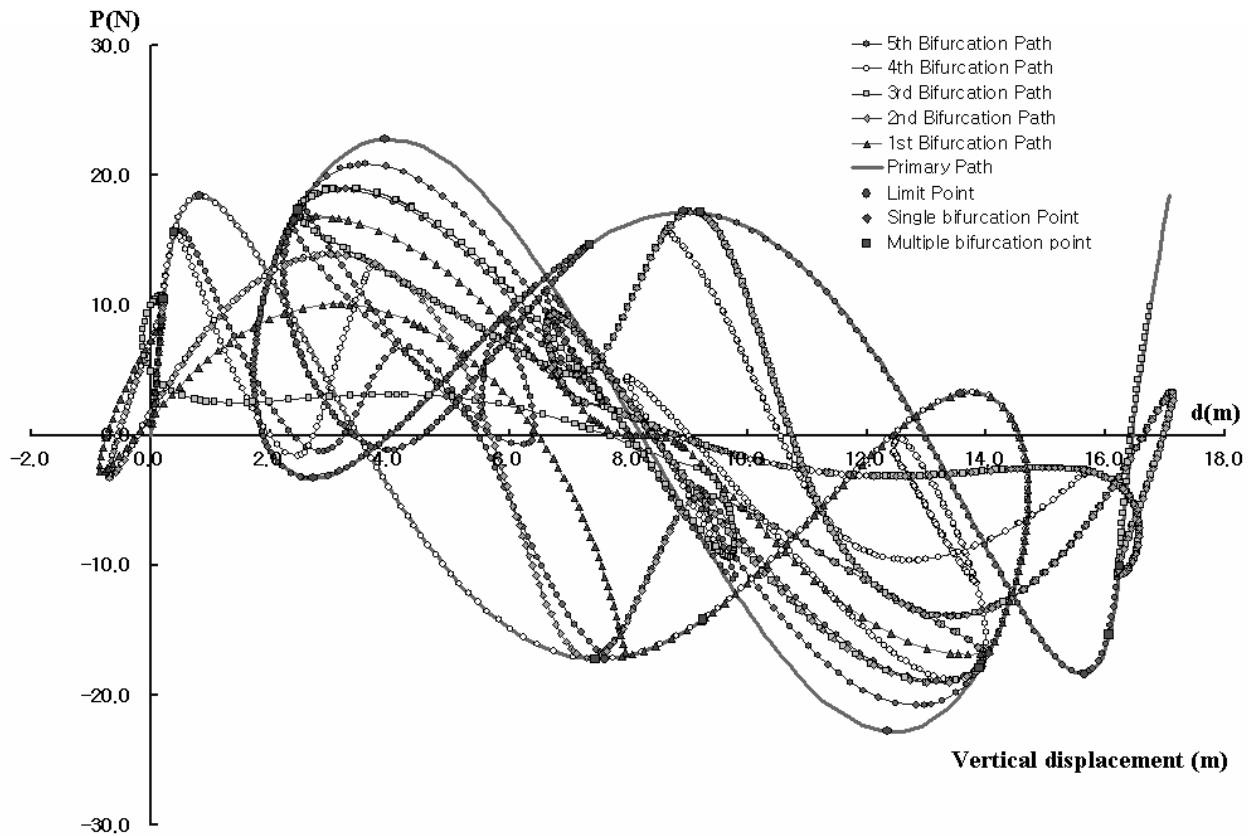


그림 10. full bifurcation path (①절점의 수직방향 하중-변위)

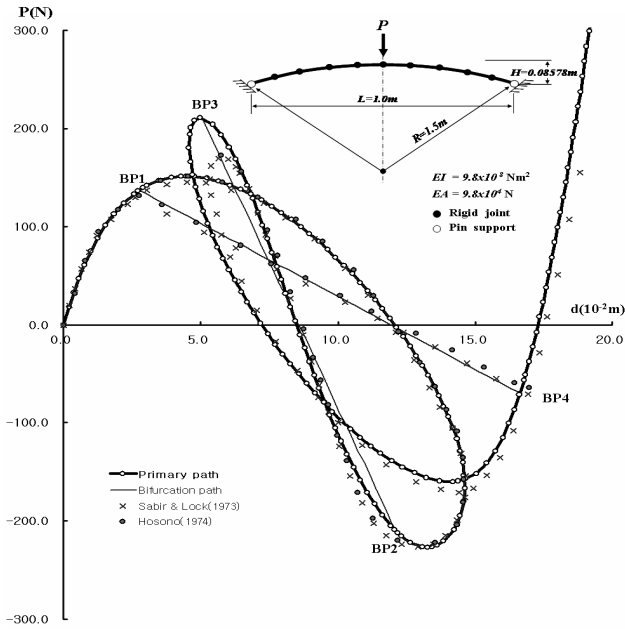


그림 11. 평면아치 정점의 수직방향 하중-변위 그래프

첫 번째 극한점 이후의 구조물의 평형경로를 추적하여 평형경로 상에서 발생한 좌굴점과 각각의 좌굴점에 대한 특성 및 변형형상을 그림4에 나타내었다. 그림4의 극한점에 따른 변형형상을 관찰해보면, Star Dome의 x-z축에 대하여 대칭으로 변형하고 있음을 알 수 있다. 이는 구조물이 평형상태 혹은 대칭상태를 상실했을 때 분기좌굴이 발생한다는 좌굴이론의 특성을 보여주는 것이다.

따라서 그림4의 평형경로 상에서 약간의 섭동이나 불완전을 가했을 경우 분기좌굴이 발생하여 분기경로로의 분기가 발생한다. 그림5-그림10은 그림4의 평형경로와 그림3에서 계산한 BP1, BP2, BP3에서의 분기경로를 나타낸 것으로, 모든 분기경로는 평형경로의 분기점사이의 경로를 복잡하게 진행하고 있다. 그러나 어떠한 분기경로도 대칭으로 변형하는 그림4의 평형경로를 크게 벗어나지 않고 있는데, 이는 비대칭으로 거동하다가 대칭을 찾게 되면 다시 평형경로를 복귀하고 있기 때문이다. 따라서 정확한 평형경로의 예측은 분기경로의 파악을 위한 전제조건이라 말할 수 있고, 분기좌굴은 구조물이 대칭성을 잃거나 불완전(imperfect)이 도입되었을 때 발생하는 현상으로 볼 수 있다.

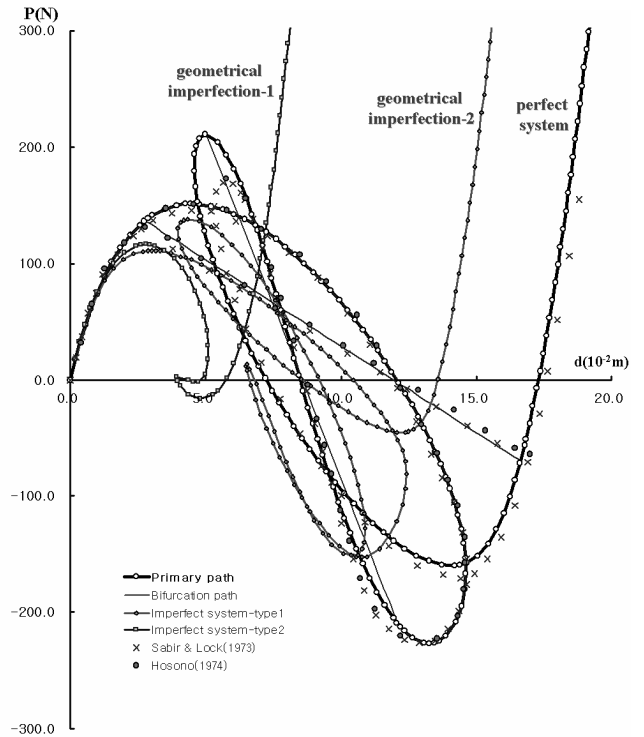


그림 12. 불완전형상에 따른 평면아치 정점의 거동

6.2 평면아치의 좌굴해석

본 예제는 평면 아치에 대한 좌굴해석을 수행하여 기존의 연구결과와 비교하였다.

해석모델의 형상, 경계조건, 재료상수 및 해석결과에 대한 하중-변위관계를 이전 연구결과와 비교하여 그림7에 나타내었다. Sabir 등(1973)은 유한요소법과 변위중분법에 의해 분기경로를 제시하였고, 細野秀(1974)는 Powell(1969)의 범요소 이론과 호장법을 이용하여 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 저자의 이전연구 경험을 바탕으로, 범요소의 유한변형을 위한 Kassimali 등(1991)의 유한변형이론과 Meek 등(1984, 1989)의 범요소의 유한요소 평형방정식 및 강성행렬을 사용하여, 2차원 및 3차원 분기좌굴 좌굴해석을 위한 공간프레임 요소를 개발하였다(한상을 등, 2007; 이경수 등, 2009).

해석모델은 細野秀(1974)의 방법에 따라 그림11과 같이 아치를 10개의 범요소로 모델링하여 좌굴해석을 수행하였고, 이에 대한 좌굴해석결과 평형경로상에서 4개의 분기점이 발생했으며, 이에 대한 분기경로 추적을 성공적으로 수행하였다. 특이 이전 연구(Sabir 등, 1973; 細野秀, 1974)에서는 BP1-BP4를 연결하는 분기경로만 보고되었던 것과 달리, 본 연구에서는 BP2-BP3을 연결하는 분기경로가 추가로 발견되었다.

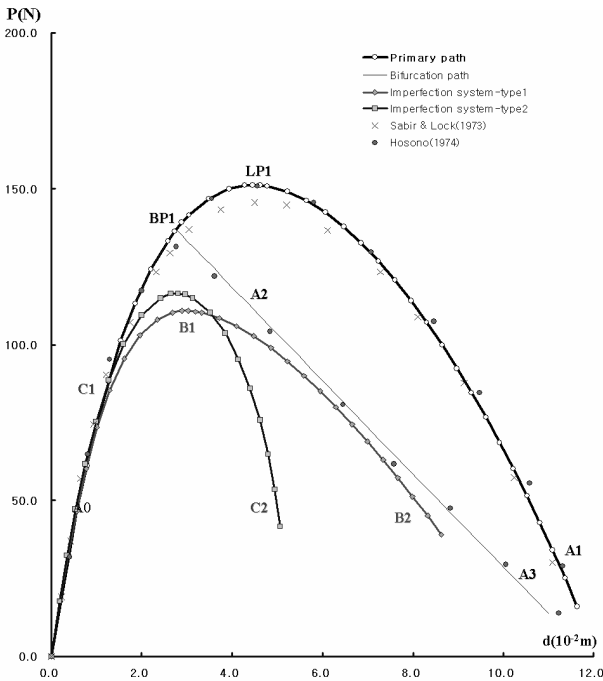


그림 13. 불완전형상에 따른 정점의 하중 변위 그래프

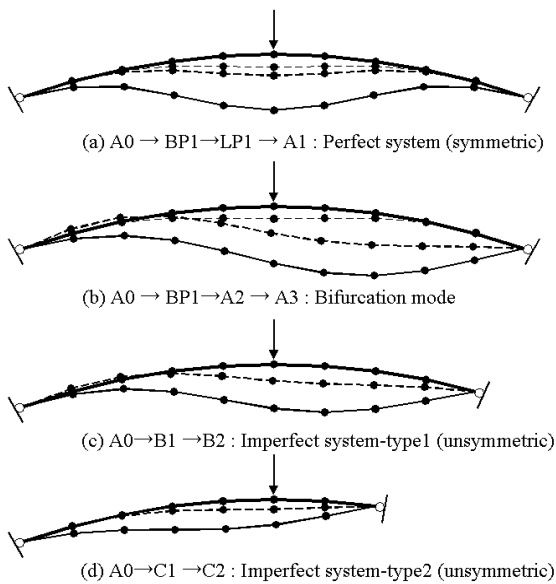


그림 14. 불완전형상에 따른 평면아치의 거동 형상

그림12, 그림13는 그림14의 아치형상에 따른 하중-변위관계를 나타낸 것이다. 그림14에서 알 수 있듯이 평형경로상의 구조물의 변형형상은 예제1의 Star Dome의 경우와 마찬가지로, 완전성(대칭)을 나타내며, 분기경로상의 변형형상은 비대칭 혹은 불완전성을 나타내게 된다. 또한 그림14의 (c), (d)와 같이 임의의 형상에 대한 불완전성(비대칭성)을 부여했을 때, 그림13의 하중-변위관계에서와 같이 1차 분기모드 이전에, 그림14 (b)의 분기경로와 유사한 형태로 변형함을

알 수 있다.

7. 결론

본 논문에서는 기존의 연구이론을 확장하여 공간구조의 분기좌굴해석을 위한 평형경로 탐색, 좌굴판정기준, 분기경로 전환 등의 수치해석알고리즘을 제시하였다.

평형경로 탐색은 Riks(1979, 1984)의 호장법을 사용하였고, 좌굴판정기준을 위해서 특해모드의 계산이 필요 없는 간접법을 제안하였으며, 이를 Fujii 등(1993, 1997)의 다분기 해석 알고리즘에 적용하여 검증예제에 대한 분기좌굴 해석결과를 수행하여 해석알고리즘의 정확성을 검증하였다. 해석에 사용된 비선형 유한요소모델은 후좌굴해석을 위한 비선형특성을 검증하는데 효율적으로 사용되었으며, 자세한 유도과정은 생략하였다.

검증예제의 해석결과는 기존의 연구문헌에서 보고되었던 좌굴특성 및 분기경로 등의 결과와 일치하거나 근접하였으며, 예제2의 경우에는 추가적인 분기경로를 탐색할 수 있었다. 연구를 통해 작성된 해석프로그램에 의해 각각의 예제를 수행하는데 있어서 어떠한 수치해석적 가정이나 어려움은 없었다.

따라서 분기좌굴해석을 위한 본 논문의 해석알고리즘은 공간구조 및 일반구조의 좌굴해석에 효율적으로 적용가능 할 것으로 사료되며, 향후 탄소성 분기좌굴에 관한 연구를 수행할 예정이다.

감사의 글

본 논문은 2005년 한국건설교통기술평가원(과제번호:05 건설핵심C02)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사드립니다.

참고 문헌

이경수, 한상을 (2009) 공간프레임의 대변형 해석을 위한 오일러리안 정식화, 대한건축학회 논문집(구조계), 제25권, 제1호, pp. 73-80.
 한상을, 윤한흠 (2000) 래티스 돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘. 대한건축학회논문집. 제16권, 제9호, pp.3-9.
 한상을, 이경수 (2007) 공간구조의 후좌굴 해석에 관한 연구, 대한건축학회 논문집(구조계), 제23권, 제7호, pp.53-60.
 한상을, 이경수 (2007) 공간구조의 비선형 탄소성 후좌굴해석에 관한 연구, 대한건축학회 논문집(구조계), 제23권, 제12호, pp. 59-68.
 細野秀 (1974) 弧長法たよる弾性座屈問題の解析, 博士學位論文, 東

京大學

- Choong, K. K., and Hangai, Y. (1993) Review on methods of bilurcation analysis for geometrically nonlinear structures, ull. Int. Assoc. Shells Spatial Struct. (issue dedicated to SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures), Vol. 34, No. 2, pp.133-149.
- Crisfield, M. S. (1981) A fast incremental iterative solution procedure that handles 'snap through', *Computer & Structures*, Vol.13 pp.55-62.
- Crisfield, M. A. (1982) An arc-length method including line searches and accelerations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol.19, pp.1269-1289.
- Crisfield, M. A., and Shi, J. (1990) *A review of solution procedures and path-following techniques in relation to the non-linear finite element analysis of structures*, in *Nonlinear computational mechanics: state of the art*, edited by Wriggers, P. and Wagner, W. (Eds), Springer-Verlag, Berlin, pp.47-68.
- Crisfield, M. A. (1997) *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2, Advanced Topics, John Wiley & Sons
- Fujii, F., and Choong, K. K. (1992) Branch-switching in bifurcation of structures., *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, pp.1578-1596
- Fujii, F., and Asada, K. (1993) Branch-switching in simple spatial bifurcation models, *SEIKEN-IASS Svm. on Nonlinear Analysis and Design jbr Shells and Spatial Structures*, Tokyo, pp.515-522.
- Fujii, F., and Ramm, E. (1997) Computational bifurcation theory-path-tracing, pinpointing and path-switching, *Engineering Structures*, Vol.19, pp.385-392.
- Fujii, F., Ikeda, K., Noguchi, H., and Okazawa, S. (2001) Modified stiness iteration to pinpoint multiple bifurcation point, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 18, 19, pp.2499-2522.
- Fujii, F., and Noguchi, H. (2002) Eigenvector-free pinpointing iteration for multiple bifurcation. *Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna
- Fujii, F., and Noguchi, H. (2003) Eigenvector-free indicator, pinpointing and brach-switching for bifurcation, *Commun. Numer. Meth. Engng*, Vol. 9, pp.445-457.
- Hangai, Y., and Kawamata, S. (1973) *Aanlysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method*, Report of The Industrial Science The University of Tokyo, pp.22-5.
- Kassimali, A., and Abbasnia, R. (1991) Large deformation analysis of elastic space frames. *ASCE J. Struc. Eng.* Vol. 117, No. 7, pp.2067-2087.
- Koiter, W. T. (1945) *On the stability of elastic equilibrium*, Thesis, Polytechnic Institute, Delft H. T., Paris, Amsterdam
- Meek, J. L., and Tan, H. S. (1984) Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 47. pp.261-282.
- Meek, J. L., and Loganathan, S. (1989) Large displacement analysis of space frame structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, pp. 57-75.
- Powell, G. H. (1969) Theory of nonlinear elastic structures, *J. Struct. Div. ASCE*, 95 ST12, pp.2687-2701.
- Ramm, E. (1981) *Strategies for tracing the non-linear response near limit points*, in *Nonlinear finite element analysis in structural mechanic*, Wunderlich, W. et al. (Eds), Springer-Verlag, Berlin, pp.63-89.
- Riks, E. (1979) An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 15, pp.529-551.
- Riks, E. (1984) Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 47, pp.219-259.
- Sabir, A. B., and Lock, A. C. (1973) Large deflection, geometrically nonlinear finite element analysis of circular arches, *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 15, pp. 37-47.
- Thompson, J. M. T., and Hunt. G. W. (1973) *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons, Chichester, UK
- Wagner, W., and Wriggers, P. (1988) A simple method for the calculation of postcritical branches, *Engng Comput*, Vol. 5, pp.103-109.
- Wriggers, P., Wagner, W., and Miehe, C. (1988) A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 70, pp. 329-347.
- Wriggers., P., and Simo, J. C.(1990) A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 30, pp. 155-176.

(접수일자 : 2009. 1. 13 / 심사일 2009. 1. 29 /
게재확정일 2009. 5. 6)