

기울기 벡터의 직교 정사형을 사용한 CMA 등화기에 관한 연구

A Constant Modulus Algorithm Based on an Orthogonal Projection

임 준 석*
(Jun-seok Lim*)

*세종대학교 전자공학과

(접수일자: 2009년 6월 3일; 수정일자: 2009년 7월 2일; 채택일자: 2009년 8월 27일)

블라인드 채널 등화기의 일종인 CMA방식의 수렴 속도는 일반적인 훈련열을 바탕으로 한 방법에 비해서 느린 경향이 있다. 또 그 수렴 속도는 정해진 스텝사이즈에 따라 정해진다. 본 논문은 기존 고정 스텝사이즈 CMA 알고리즘의 수렴 속도를 개선하기 위한 직교 정사형 망각인자를 도입하여 수렴성능이 개선된 새로운 알고리즘을 제안한다.

핵심용어: 채널 등화기, 고속수렴, 블라인드 등화기

투고분야: 음향 통신 기술 분야 (6.3)

CMA (Constant Modulus Algorithm) is one of the famous algorithms in blind channel equalization. Generally, CMA converges slowly and the speed of convergence is dependent on a step-size in the CMA procedure. Many researches have tried to speed up the convergence speed by applying a variable step-size to CMA. In this paper, we propose a new CMA algorithm with improved convergence performance. The improvement comes from an orthogonal projection of an average error gradient. We show the improvement in simulation results.

Keywords: Channel Equalization, High Speed Convergence, Blind Equalization

ASK subject classification: Acoustic Communication (6.3)

I. 서론

순간 기울기를 이용한 알고리즘을 이용한 블라인드 채널 등화기법 중에서 CMA (Constant Modulus Algorithm)은 여러 응용에서 성공적으로 응용되고 있는 기법이다. CMA는 LMS (Least Mean Square)와 같이 계산량이 적고 적용 범위가 넓은 채널 등화 알고리즘으로도 유명하다. CMA는 LMS와 마찬가지로 순간 기울기에 스텝 사이즈를 곱한 만큼 갱신되는 형태를 취한다. 이 때 갱신에 사용되는 스텝사이즈는 알고리즘의 수렴 속도를 좌우하게 된다. 그러나 일반적으로 CMA류의 알고리즘들은 LMS류와 같이 고정된 스텝 사이즈 값을 쓰고 또 알고리즘의 수렴 속도도 느린 알고리즘으로 분류된다 [1].

LMS 연구자들은 이런 느린 수렴 속도 개선하기 위한 여러 가지 연구를 수행하였다. 그 중에 하나가 선형 여파 기울기 적응 (FGA, linearly filtered gradient adaptive) 알고리즘이다. 이 알고리즘은 Proakis에 의해서 처음 소개되었다 [2][3]. 이 알고리즘은 지수함수적으로 가중된 최소 자승 오차로부터 새롭게 유도되었는데, 이 방법에서는 적응 필터의 갱신 벡터가 이전 갱신 벡터와 현재 기울기 벡터로부터 얻을 수 있었다. 이 방법은 수렴 속도를 많이 개선하였으나 계산량이 늘어나는 부담이 있었다. 이 외에도 목적함수의 스텝사이즈에 대한 기울기를 이용하여 매 시간 스텝 사이즈를 조절하는 알고리즘도 제안되었다. 이런 알고리즘도 앞서의 알고리즘들과 마찬가지로 계산이 본래 CMA에 비해서 상당히 증가하여, 간단한 알고리즘으로써의 CMA의 이점이 적어지는 단점을 가지고 있다 [4][5]. 이에 대해서 Lim은 스텝사이즈를 고정 하고, 오차의 평균을 취하는데 쓰이는 망각인자를 매 시각마다 최적화하는 방법을 사용하는 FGA를 직교 기울

기 적응 (OGA, orthogonal gradient adaptive) 필터라고 이름 붙여 제안하였고, 이 방법을 LMS에 적용하였을 때 종전보다 수렴성이 향상됨을 보였다 [6].

본 논문에서는 Lim이 제안한 OGA를 적용한 수렴성이 향상된 CMA 알고리즘을 제안한다. 이를 위해서 통상적인 CMA 알고리즘의 목적함수를 변형하였고, 이 변형된 목적함수로부터 LMS와 유사한 형태의 CMA 알고리즘을 얻었다. 이 변형된 알고리즘에 OGA를 적용하여 수렴 성능 향상을 꾀하였다. 그리고 시뮬레이션을 통해서 그 성능을 기존의 통상적인 CMA와 비교한다.

II. Constant Modulus Algorithm

블라인드 등화기 중 하나인 CMA는 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 계수 벡터를 구해서 이를 등화기의 계수 벡터로 삼는 방법이다.

$$J_s = (\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n) - R_2)^2 \quad (1)$$

식 (1)의 기울기를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^*} &= 2(\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n) - R_2)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n) \\ &= 2\mathbf{x}(n)(|y(n)|^2 - R_2)y^*(n) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{x}^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]$ 또 $y(n) = \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$ 이다. 위 식 (2)를 사용하여 등화기 벡터의 갱신식을 구하면 아래 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^*} = \mathbf{w}(n) - \mu \alpha(n)(|y(n)|^2 - R_2)y^*(n) \quad (3)$$

서론에서 언급한 것과 같이 갱신식의 갱신 정도는 스텝 사이즈로 조절된다.

III. 기울기 벡터의 직교 정사형을 사용한 CMA

일반적으로 식 (3)과 같은 형태의 갱신 식을 취하는 알

고리즘의 수렴 성능을 향상 시키기 위해서는 식 (3)의 고정 스텝 사이즈를 상황에 따라 변동하는 가변 스텝 사이즈로 바꾸는 시도를 많이 한다. 본 장에서는 스텝 사이즈를 직접 조절하는 대신 오차의 평균을 내는 유효 참함수의 길이를 의미하는 망각 인자의 값을 조절하는 방법을 사용한다. 조절 방법은 평균 오차의 기울기가 이전 평균 오차의 기울기와 항상 직교를 유지 하도록 조정한다. 이런 가변 망각인자를 도입하여 단일 스텝 사이즈의 수렴 성능을 개선하도록 한다.

3.1. 변형된 목적 함수

식 (1)과 같은 목적함수를 다시 쓰면 식 (4)와 같이 된다.

$$J = E\left[(|y|^2 - R_2)^2 \right] \quad (4)$$

위와 같은 목적함수를 아래와 같이 변형하면 축차형으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \lambda_n^{n-i} (|y(i)|^2 - R_2)^2 = \lambda_n \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_n^{n-i-1} (|y(i)|^2 - R_2)^2 \\ &+ \frac{1}{2} (|y(n)|^2 - R_2)^2 = \lambda_n J(n-1) + \frac{1}{2} e(n)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

3.2. 기울기 벡터의 직교 정사형을 사용한 가변 망각인자

위 식 (5)처럼 근사화된 목적함수를 등화기 계수 벡터로 미분하면 다음과 같은 축차 방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식으로부터 일종의 이동 평균값을 구하는 효과를 얻을 수 있다. 그 의미는 각 순간의 평균 오차 평면의 기울기를 구하는 것과 같다.

$$\mathbf{p}(n) = -\frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}^*} = \lambda_n \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}(n) \quad (6)$$

위 식 (6)에서 $\mathbf{g}(n) = \mathbf{x}(n)y^*(n)(|y(n)|^2 - R_2)^*$ 이다. 식 (6)의 $\mathbf{p}(n)$ 이 이전의 $\mathbf{p}(n-1)$ 과 직교인 관계를 늘 유지하여 Lim이 제안한 OGA가 되도록 하면 아래와 같은 식이 만족된다 [6].

$$\mathbf{p}^H(n)\mathbf{p}(n-1) = \lambda_n \mathbf{p}^H(n-1)\mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1) = 0 \quad (7)$$

위 식 (7)을 망각인자에 대해서 풀면 다음과 같은 가변 망각인자를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1)/\mathbf{p}^H(n-1)\mathbf{p}(n-1) \\ &= -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1)/\|\mathbf{p}(n-1)\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

위에 사용한 계산법이 벡터간 직교 정사형을 구하는 것과 유사하여 본 절의 망각인자를 직교 정사형 망각인자라고 하기로 한다.

3.3. 기울기 벡터의 직교 정사형을 사용한 CMA

위 식 (6)과 식 (8)을 이용하여 식 (3)을 다시 쓰면 아래와 같이 된다.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{p}(n), \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{p}(n) = \lambda_n \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}(n)$, 이고 $\mathbf{g}(n) = \mathbf{x}(n)\mathbf{y}'(n)$ ($|\mathbf{y}(n)|^2 - R_2$)^{*}, 이고 $\lambda_n = -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1)/\|\mathbf{p}(n-1)\|^2$ 이다.

3.4. 기울기 벡터의 직교 정사형을 사용한 CMA의 수렴성 해석

식 (9)를 이용하여 제안된 알고리즘의 수렴성을 알아본다. 이를 위해서 아래와 같이 식 (9)에 z변환을 취하면,

$$z\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}(z) + \mu\mathbf{P}(z), \quad (10)$$

이 된다. 또 $\mathbf{p}(k) = \beta\mathbf{p}(k-1) + \mathbf{g}(k)$ 에도 z변환 하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= \beta z^{-1}\mathbf{P}(k) + \mathbf{G}(k) \\ &= \beta z^{-1}\mathbf{P}(k) + Z\{E(\mathbf{x}(d - \mathbf{x}^T \mathbf{w}(k)))\} \\ &= \beta z^{-1}\mathbf{P}(k) + \frac{b}{1-z^{-1}} - \mathbf{R}\mathbf{W}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다. 여기서 β 는 식(8)이나 식 (9)에 사용되는 망각인자의 평균값 $\bar{\lambda}_n$ 이라고 가정한다. 식 (11)을 정리하면 다음과 같이 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}(k) = \frac{z^2 \mathbf{b} - z(z-1)\mathbf{R}\mathbf{W}(z)}{(z-\beta)(z-1)}, \quad (12)$$

식 (12)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같다.

$$z\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}(z) + \frac{\mu z^2 \mathbf{b}}{(z-\beta)(z-1)} - \frac{\mu z \mathbf{R}\mathbf{W}(z)}{(z-\beta)}. \quad (13)$$

이고 이는 다음과 같이 간단히 정리된다.

$$\mathbf{W}(z) = ((z-1)(z-\beta)\mathbf{I} + \mu z \mathbf{R})^{-1} \frac{\mu z^2}{(z-1)} \mathbf{b}. \quad (14)$$

위 식에 최종값 정리를 적용하면 제안된 알고리즘이 최종으로 수렴되는 값을 알아볼 수 있다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathbf{W}(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad (15)$$

로 수렴한다.

식 (15)로부터 제안된 알고리즘이 최적해에 수렴할 수 있음을 알 수 있다. 또 식 (14)의 안정성을 위한 조건을 도출을 하면서 최적 스텝사이즈의 범위를 얻을 수 있다. 안정성 보장을 위해서 다음과 같은 조건이 만족되어야 한다. 즉, $|\beta| < 1$ 이고 $\det((z-1)(z-\beta)\mathbf{I} + \mu z \mathbf{R}) = 0$ 의 근이 단위원의 내부에 존재해야 한다. 이 조건에 맞는 근을 구한다면 다음 식 (16)을 풀어야 한다.

$$\det((z-1)(z-\beta)\mathbf{I} + \mu z \mathbf{R}) = \prod_{i=0}^N (z^2 + (\mu\lambda_i - (\beta+1))z + \beta) = 0. \quad (16)$$

여기서 λ_i 는 \mathbf{R} 의 i 번째 고유값을 의미한다. 식 (16)에 포함된 각 개별 식의 근은 다음과 같다.

$$\frac{-(\mu\lambda_i - (\beta+1)) \pm \sqrt{(\mu\lambda_i - (\beta+1))^2 - 4\beta}}{2} \quad (17)$$

이다.

위 근들 중 큰 근 ≤ 1 인 관계에서,

$$\frac{-(\mu\lambda_i - (\beta+1)) + \sqrt{(\mu\lambda_i - (\beta+1))^2 - 4\beta}}{2} \leq 1 \quad (18)$$

이다.

$$-1 \leq \beta + \mu\lambda_i - \beta - 1, \quad (19)$$

또 작은 근 ≥ -1 에서

$$-1 \leq \beta - \mu\lambda_i + \beta + 1, \quad (20)$$

모든 고유치에 대해서 위 식 (19)과 식 (20)를 동시에 만족하는 조건을 구하면 다음과 같다.

$0 \leq \mu \lambda_L \leq 2 + 2\beta$ 이다. 이 조건을 만족하는 스텝 사이즈를 구하면,

$$0 \leq \mu \leq \frac{2 + 2\beta}{\lambda_L} \quad (21)$$

이다.

여기서 λ_L 은 가장 값이 큰 고유치이다.

위 관계식은 다음과 같은 관계를 갖는 LMS알고리즘의 스텝사이즈와 비교할 수 있다.

$$0 \leq \mu_{LMS} \leq \frac{2}{\lambda_L} \quad (21)$$

식 (20)와 식 (21)을 비교하면 제안한 알고리즘이 LMS 보다 더 큰 값을 스텝 사이즈로 사용할 수 있음을 알 수 있다.

일반적으로 LMS류의 알고리즘의 수렴 곡선의 근사 시상수 τ 와 step size μ 와는 다음과 같은 관계를 갖는다는 것이 알려져 있다 [1].

$$\tau \propto \frac{1}{\mu} \quad (22)$$

위 관계로부터 아래와 같은 시상수 간의 크기 관계를 구할 수 있다.

$$\tau_{proposed} = \frac{\lambda_L}{2 + 2\beta} < \tau_{LMS} = \frac{\lambda_L}{2} \quad (23)$$

본 논문에서 제안한 알고리즘의 수렴 성능이 보통인 LMS보다는 빠른 수렴이 가능하다는 것을 알 수 있다.

IV. 시뮬레이션

본 절에서는 위에서 제안한 직교 정사형 망각인자를 적용한 CMA에 대한 성능을 시뮬레이션을 통하여 검증하려고 그림 1과 같은 통신 환경을 가정한다.

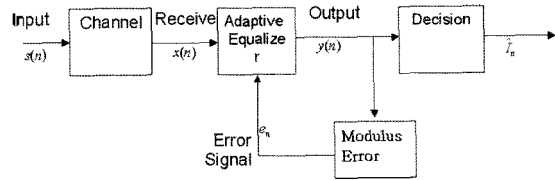


그림 1. 시뮬레이션 환경
Fig. 1. Simulation Configuration.

4.1. 설정된 시뮬레이션 환경

시뮬레이션을 위해서 아래와 두 채널들을 사용하였다. 첫 번째 채널은 식 (24)과 같은 채널이고 [7].

$$C(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.125z^{-3} \quad (24)$$

또 다른 하나는 식 (25)과 같은 채널로써 소위 '디지털 전화 채널'이라고 불리는 채널이다 [8].

$$C(z) = 0.005 + 0.009z^{-1} - 0.024z^{-2} + 0.854z^{-3} - 0.218z^{-4} + 0.049z^{-5} - 0.016z^{-6} - 0.016z^{-7} \quad (25)$$

그 외에 CMA 알고리즘을 전체적으로 살펴본 논문인 [9]에 소개된 여러 채널 중 아래 두 채널을 선택하여 위 두 채널과 길이가 다른 채널의 예로 삼았다.

$$C(z) = -0.0901 + 0.71705z^{-1} \quad (26)$$

$$C(z) = 1 + 0.2z^{-1} - 0.2z^{-2} \quad (27)$$

여러 채널 성능의 비교를 위해서 통산적인 CMA와 제안된 CMA를 같은 채널을 통과한 수신 신호를 가지고 수렴성과 수렴 후 정상도로 비교하였다. 등화기 각각의 길이는 35로 동일하고, 신호대 잡음비는 30 dB로 그리고 고정 스텝 사이즈는 두 알고리즘 공히 0.0005로 하였다.

4.2. 시뮬레이션 결과

4.1과 같이 설정된 식 (24)의 채널 환경하에서 실험한 결과들은 그림 2와 그림 3에 각각 도시 하였다. 그림 2의 (a)는 본 신호의 정상도이고, (b)는 채널을 통과하고 수신된 신호의 정상도이다. (c)는 고정 스텝 사이즈를 사용한 CMA로 등화한 결과 신호의 정상도이며, (d)는 가변 스텝 사이즈 CMA의 등화 결과이다. 이 결과를 보면 제안된 알고리즘의 결과가 상대적으로 정상도 분포가 우수함을 알 수 있다. 이런 정상도 상의 우수함은 정상도를 그리는데

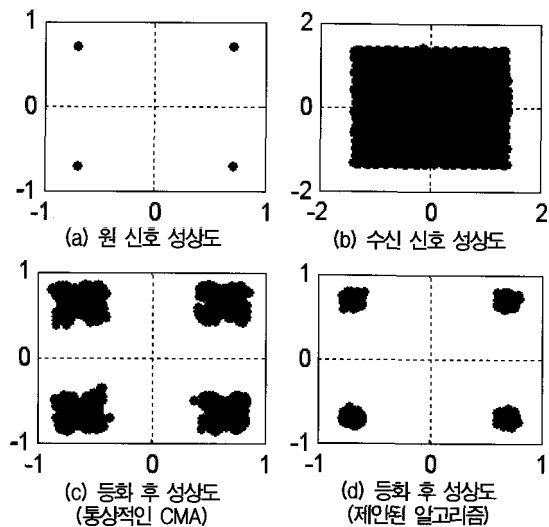


그림 2. 성상도를 통한 등화기 성능 비교 (식 (24)에서)
 Fig. 2. Comparison of Received Signal Constellation with the channel in (24).

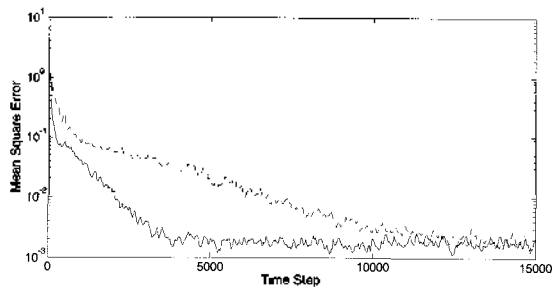


그림 3. 수렴 곡선을 이용한 성능 비교 (식 (24)에서)
 Fig. 3. Comparison of Convergence Performance with the channel in (24).

시작 시간이 모두 다 2000 스텝부터 똑같이 시작하여 마지막 스텝까지 겹쳐 그리도록 한 결과로써 제안된 알고리즘이 시작 시점에 이미 상대적으로 수렴이 빨리 잘 되었고, 일반적인 알고리즘은 아직 충분히 수렴하지 못한 시점부터 성상도를 그린 결과라고 할 수 있다. 이는 시간에 따라 수렴되는 성능을 서로 비교한 결과를 도시한 그림 3으로 확인 할 수 있다. 그림 3의 두 곡선을 보면 스텝 사이즈가 둘 다 동일함에도 불구하고 제안된 알고리즘이 더 빠른 수렴을 하면서도 더 작은 오차로 수렴함을 알 수 있다. 이 결과는 그림 2의 결과를 뒷받침하는 결과라고 할 수 있다. 또 식 (25)의 채널 환경하에서 실험한 결과들도 그림 4와 그림 5에 각각 도시하였다. 이 채널의 결과도 위의 식 (24) 채널의 결과와 대동소이 하게 제안된 알고리즘이 상대적으로 빠른 수렴을 함을 보이고 있다. 마찬가지로 식 (26)과 식 (27)의 채널 환경하에서 실험한 결과들도 그림 6과 그림 7 및 그림 8과 그림 9에 각각 실었다. 이 결과도 위에 언급한 다른 채널의 결과와 비슷한 경향을 보였다.

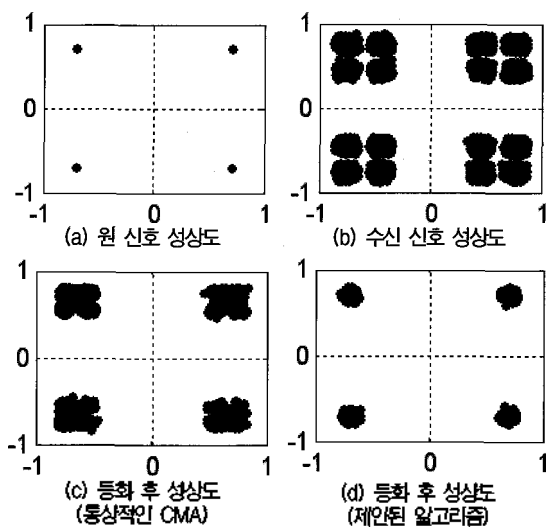


그림 4. 성상도를 통한 등화기 성능 비교 (식 (25)에서)
 Fig. 4. Comparison of Received Signal Constellation with the channel in (25).

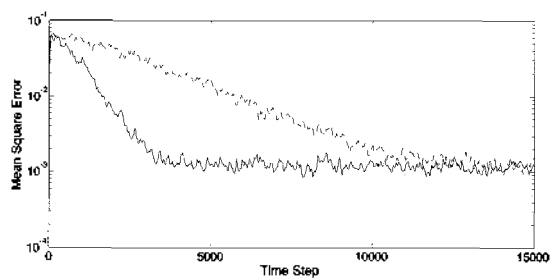


그림 5. 수렴 곡선을 이용한 성능 비교(식 (25)에서)
 Fig. 5. Comparison of Convergence Performance with the channel in (25).

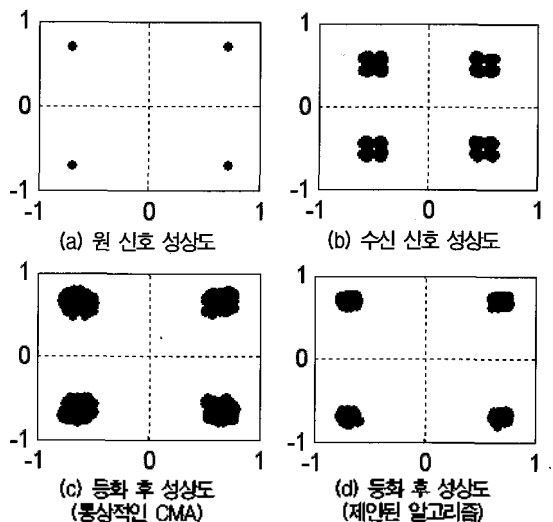


그림 6. 성상도를 통한 등화기 성능 비교 (식 (26)에서)
 Fig. 6. Comparison of Received Signal Constellation with the channel in (26).

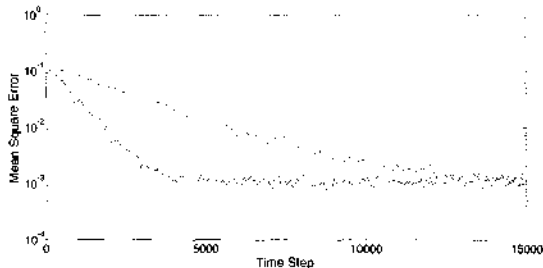


그림 7. 수렴 곡선을 이용한 성능 비교 (식 (26)에서)
Fig. 7. Comparison of Convergence Performance with the channel in (26).

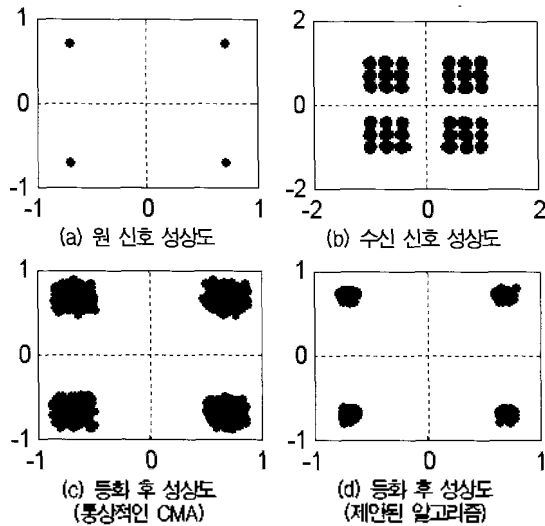


그림 8. 성상도를 통한 등화기 성능 비교 (식 (27)에서)
Fig. 8. Comparison of Received Signal Constellation with the channel in (27).

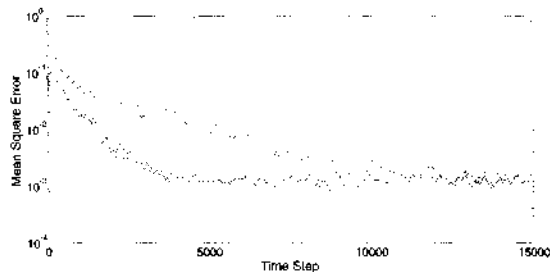


그림 9. 수렴 곡선을 이용한 성능 비교(식 (27)에서)
Fig. 9. Comparison of Convergence Performance with the channel in (27).

V. 결론

본 논문은 기존 고정 스텝사이즈 CMA 알고리즘의 수렴 속도를 개선하기 위한 직교 정사형 망각인자를 도입하여 수렴성능이 개선된 새로운 알고리즘을 제안하였다. 블라인드 채널 등화기에 많이 쓰이는 CMA방식의 수렴 속도는 일반적으로 느린 경향이 있다. 또 그 수렴 속도는 정해진 스텝사이즈에 따라 정해진다. 본 논문은 기존 고

정 스텝사이즈 CMA 알고리즘의 수렴 속도를 개선하기 위한 직교 정사형 망각인자를 도입하여 수렴성능이 개선된 새로운 알고리즘을 제안하였고, 이 성능이 기존의 고정 스텝 사이즈를 사용하는 것에 비해서 향상되는 것을 시뮬레이션을 통해서 보였다.

참고 문헌

1. A. H. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley, New-York, 2003
2. J. G. Proakis, "Channel identification for high speed digital communications," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 19, no. 6, pp. 916 - 922, 1974.
3. S. Roy and J. J. Shynk, "Analysis of the momentum LMS algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, no. 12, pp. 2088 - 2098, 1990.
4. P. Yuvapooitanon and J. A. Chambers, "Adaptive step-size constant modulus algorithm for DS-CDMA receivers in non-stationary environments", *Signal Processing*, vol. 82, no.2, pp.311-315, 2002.
5. Jun-Seok Lim, Jae-Jin Jeon and Koeng-Mo Sung, "Adaptive step-size widely linear constant modulus algorithm for DS-CDMA receivers in nonstationary interference environments," *IEICE Trans. Comm.*, vol. E90-B, no. 1, pp. 168-170, 2007.
6. J. S. Lim, "New Adaptive Filtering Algorithms Based on an Orthogonal Projection of Gradient Vectors," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 11, pp.314-316, 2000.
7. Zhang Xiaoquin, Wang Huakui and Zhang Liyi, "A Blind Equalization Algorithm Based on Bilinear Recurrent Neural Network," in *Proc. Of World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1982-1984, June, 2004.
8. Sridha V., "Convex Cost Function in Blind Equalization," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 8, pp. 1952-1960, 1994.
9. C.R. Johnson, P. Schniter and J.T. Endres, "Blind equalization using the constant modulus criterion: a review," *Proc. of IEEE*, vol. 86, no. 10, pp. 1927-1949, 1998.

저자 약력

•임 준 석

한국음향학회지, 제28권 제6호 참조