經營科學
第26卷 第3號
2009年 11月

선형근사 기법을 이용한 단일비행구간의 좌석할당 모형

송윤숙* · 이휘영** · †윤문길***

Seat Allocation Model for Single Flight-leg using Linear Approximation Technique

Yoon Sook Song* · Hwi Young Lee** · †Moon Gil Yoon***

■ Abstract ■

Over the last three decades, there are many researches focusing on the practice and theory of RM in airlines. Most of them have dealt with a seat assignment problem for maximizing the total revenue. In this study, we focus on a seat assignment problem in airlines. The seat assignment problem can be modeled as a stochastic programming model which is difficulty to solve optimally. However, with some assumptions on the demand distribution functions and a linear approximation technique, we can transform the complex stochastic programming model to a Linear Programming model. Some computational experiments are performed to evaluate out model with randomly generated data. They show that our model has a good performance comparing to existing models, and can be considered as a basis for further studies on improving existing seat assignment models.

Keywords : Revenue Management, Seat Allocation, Booking Control, Linear Approximation

이 논문은 2008년도 한국경영과학회 추계 학술대회(2008년 10월 31일) 우수논문상(응용부문) 수상논문으로 소정의 심사과정을 거쳐 게재 추천되었음.
논문접수일 : 2009년 03월 14일 논문게재확정일 : 2009년 10월 01일
* 대한항공 노선영업팀
** 인하공업전문대학 항공경영과
*** 한국항공대학교 경영학과
† 교신저자

1. 서 론

항공사 좌석할당 문제는 항공사 수익경영(Revenue Management, RM)의 한 분야로 오랫동안 많은 연구가 진행되어 왔다. 즉, 항공사에서는 다수의 요금수준에 대한 불확실한 미래 수요를 고려하여 최대의 수익이 얻어지도록 사전적으로 좌석예약 한계를 설정하여 관리하고 있다. 차별화된 여러 요금수준이 제공되는 경우 이용 가능한 좌석용량을 각 요금수준 별로 적절히 배분하는 것은 매우 중요한 일이다. 즉, 낮은 요금에 과다한 좌석을 배정하여 판매하면 높은 요금 수요의 예약이 거절되어 기회손실이 발생될 수 있고, 높은 요금에 많은 좌석을 배정하여 판매하면 배정된 좌석이 판매되지 않으면서도 낮은 요금 수요의 예약을 거절하여 기회손실이 발생될 수 있기 때문이다[2].

다양한 요금수준에 따른 좌석할당 문제는 각 요금수준에서 발생하는 수요의 분포뿐만 아니라, 적용 비행구간과 좌석통제 방식 등에 따라 다른 방법이 적용된다[2, 26, 28]. 즉, 단일 비행구간의 수요만 고려하는 경우와 복수의 비행구간을 이용하는 수요를 고려하는 경우는 문제의 정의가 달라져야 되고, 수요의 형태가 개인수요와 단체수요에 따라 좌석통제 방식이 달라짐으로 다른 모형이 적용되게 된다.

항공사 좌석할당 문제는 의사결정 방식에 따라 정태적 모형과 동태적 모형으로 구분하여 연구되어 왔다[28]. 정태적 모형에서는 계획기간동안 요금수준별로 추정된 수요를 바탕으로 최대의 기대수익이 얻어지도록 할당좌석수를 결정하고 계획기간동안 이를 동일하게 적용하는 방식이다. 동태적 모형은 각 요금수준별로 수요발생 시점에 좌석의 가치를 재 산정하여 예약의 수용여부를 결정하는 방식으로 요금수준별로 좌석할당이 동적으로 변동되는 방식이다[24]. 현실적인 수요의 변동을 효과적으로 고려하기 위하여 동태적 모형이 합리적일 수 있으나, 관련되는 매개변수 등의 추정이 복잡하거나 정확한 추정이 불가능한 경우가 많아 실제 적용에는 많은 한계를 가지고 있다. 따라서 많은 경우 정태적 모형을 활용하고, 수요변동을 반영하기 위해 주기적으로 수요변동에 따른 좌석할당의 조정을 실시하고 있다.

항공사 좌석할당 문제는 대상 항공노선이 단일구간인 경우와 복수구간인 경우에 따라 다른 모형이 적용될 뿐만 아니라, 요금수준간의 수요의 독립성 여부에 따라서도 다른 모형이 적용된다. 초기의 좌석할당 연구에서는 요금수준간의 수요가 독립적인 단일 비행구간을 대상으로 한데 비하여, 최근의 연구에서는 요금수준간의 수요의 종속성을 고려함은 물론 복수의 비행구간에 대한 요금수준별 좌석할당 문제로 연구를 확장하고 있다[13].

본 연구에서는 단일비행구간 복수요금수준에 대하여 요금수준간의 수요가 상호 독립적인 가정하에서 최대 수익을 위한 요금수준별 좌석할당을 결정하는 정태적 의사결정 문제를 다룬다. 단일비행구간의 복수 요금수준에 대한 좌석할당 문제는 Littlewood의 기대한계수익(Expected Marginal Revenue, EMR)1)에 대한 연구로부터 이를 확장한 Belobaba[5, 6]의 기대한계좌석수익(Expected Marginal Seat Revenue, EMSR) 모형으로 다양하게 연구되어 왔다[26]. 특히, Belobaba[6]는 EMSR 개념을 3개 이상의 요금수준에 적용하여 좌석할당을 결정하는 $EMSR_b$ 모형을 개발하였다. $EMSR_b$는 정태적 좌석할당 모형으로 해지와 예약부도(No-show) 등을 고려하고 있지는 않지만 적용과정이 비교적 용이하여 항공사에서 많이 활용되고 있다. 그러나 $EMSR_b$ 모형은 이용 가능한 총 좌석 범위 내에서 요금수준별 수요의 확률분포에 따른 기대수익을 최대화하는 좌석할당에 초점을 맞추고 있을 뿐, 좌석할당에 따른 기대이익을 확인할 수 없고 좌석운용에 따른 추가적인 제약요인을 고려할 수 없는 단점이 있다. 즉, $EMSR_b$을 적용하여 요금수준간의 수요분포에 따라 각 요금수준별 할당 좌석수는 결

1) Littlewood의 EMR 모형은 윤문길, 이휘영[2], Talluli and van Ryzin[26]의 연구에 잘 설명되어 있다.

정할 수 있으나, 이 같은 좌석할당을 통해 얻어지는 기대수익을 사전에 확인할 수는 없다. 또한 특정 요금수준에 대한 좌석할당 제약을 고려해야 하는 경우에는 $EMSR_b$ 모형으로는 좌석할당을 결정할 수 없게 된다. 아울러 이미 결정된 각 요금수준에서 변동이 발생하는 경우에 전체 과정을 다시 수행함으로써 좌석할당을 조정(민감도 분석)해야 하는 단점도 있다.

따라서 본 연구에서는 이 같은 기존 연구의 단점을 보완할 수 있도록 개인수요에 대한 단일 비행구간의 정태적 좌석할당 문제를 수리계획 모형을 이용하여 제시함으로써, 좌석할당에 따른 기대수익 산출, 가격변동에 따른 민감도분석, 좌석운용에 따른 제약요인 등을 효과적으로 처리할 수 있도록 하고자 한다. 즉, 각 요금수준별 수요분포를 고려하여 용량제약과 좌석운용제약을 고려한 확률계획모형을 수립하고, 수요분포에 대한 가정을 통해 선형근사 방법(Linear Approximation Technique)을 적용함으로써 확률계획모형을 단순한 선형계획모형으로 변환하여 최적좌석 할당을 결정하고자 한다. 선형근사방법은 Szwarc[25]이 확률적 수송계획문제에 효과적으로 적용될 수 있음을 보였고, Tcha and Yoon[27]이 확률적 수요하의 입지계획문제에 적용하였으며, 윤문길 등[3]이 복수비행구간의 좌석할당 문제에, 송윤숙 등[4]이 단체수요에 대한 좌석할당 문제에 효과적으로 적용하였다.

제 2장에서는 개인수요를 대상으로 단일 비행구간의 정태적 좌석할당 문제와 기존의 모형에 대하여 설명하고, 본 연구에서 제시할 모형의 타당성과 성과를 비교하기 위해 Belobaba의 $EMSR_b$ 모형을 소개한다. 또한 본 연구에서 다룬 문제에 대한 확률계획모형을 제시하고, 선형근사 기법을 적용하여 선형계획 모형으로 변환하는 과정을 소개한다. 제 3장에서는 임의의 요금수준과 수요분포를 고려하여 본 연구에서 제시된 좌석할당 방법의 타당성과 성과를 $EMSR_b$ 모형의 결과와 비교하기 위한 모의실험을 실시하고, 향후 연구방향 및 결론은 제 4장에 서술한다.

2. 단일 비행구간 정태적 좌석할당 문제

개인수요에 대한 좌석할당 문제는 기대한계좌석수익를 이용하여 효과적으로 처리하여왔다. Belobaba [5]는 각 요금수준에 하나의 좌석을 추가로 공급하는 경우에 얻어지는 한계수익의 기대치를 계산하여, 이 한계수익의 기대치가 동일한 수준에서 각 요금수준의 좌석용량을 결정하는 EMSR 개념을 제안하였다[2, 26]. EMSR을 적용하기 위한 기본가정은 요금수준별로 발생하는 수요는 독립적이고, 낮은 요금수준의 수요가 높은 요금수준의 수요보다 먼저발생하며, 요금수준간의 수요의 하향이전은 고려하지 않는 것으로 하였다. 이 밖에, 네스팅[2]도 고려하지 않았고, 예약해지 및 예약부도는 발생하지 않는 것으로 하였으며, 예약 거절된 고객은 다른 형태의 예약으로 전환되지 않고 손실되는 것으로 가정하였다.

D_i가 i 요금수준의 수요으로 확률분포가 알려져 있고, 평균과 분산이 각각 $\overline{D_i}$, σ_i^2라 하자. f_i는 i 요금수준의 요금이라 하고($f_i > f_{i+1}$), 이용가능한 총 좌석용량은 Q라 하자. Belobaba[6]는 요금수준 i에 대한 최적 좌석할당 s_i^*를 다음 관계식을 만족하는 값으로 산출할 수 있음을 제시하였다.

$$f_{i+1} = f_i \times \Pr(D_i > s_i^*) \tag{1}$$

$\Pr(D_i > s_i^*)$는 수요 D_i가 할당된 좌석수 s_i^*보다 크게 나타날 확률.)

(식) 1은 f_{i+1} 요금으로부터 f_i 요금의 좌석이 최소한 s_i^* 만큼은 보호(확보)되어야 함을 의미한다. 따라서 f_{i+1} 요금수준에 대한 좌석 예약한계는 $(Q - s_i^*)$가 된다. Belobaba[6]는 모든 요금수준에

2) 요금수준별로 좌석을 할당하는 경우, 높은 요금수준에 대하여는 필요시 낮은 요금에 할당된 좌석도 점유하여 판매할 수 있도록 하는 개념으로 자세한 내용은 윤문길, 이휘영[2] 연구를 참조.

대하여 Littlewood의 모형을 일반화한 (1)의 관계식을 적용할 수 있음을 제시하였다.

2.1 $EMSR_b$ 모형

EMSR모형은 두 요금수준에서는 잘 적용되었으나, 세 개 이상의 요금수준에서는 효과적인 적용이 어려웠다. Belobaba[6]는 이러한 문제점을 보완한 $EMSR_b$ 모형을 제시하였다. $EMSR_b$에서는 상위요금수준의 수요를 하위 요금수준으로부터 보호하기 위하여 상위 요금수준의 모든 수요를 하위 요금수준 좌석용량 설정시 고려하였다. 즉, i번째 요금수준의 좌석용량을 설정하기 위하여 i번째 이전의 모든 요금수준의 수요와 요금을 평균의 개념으로 고려하여 적용하였다. $EMSR_b$의 절차는 다음과 같다.

[$EMSR_b$ 모형]

단계 1 : 최상위 요금수준 좌석용량(Q)와 좌석보호수준(s_1^*) 설정

$$f_2 = EMSR_1 = f_1 \overline{P_1}(s_1^*),$$

$$\overline{P_1}(s_1^*) = \Pr(D_1 > s_1^*),$$

f_2 요금수준에 대한 예약한계 : $Q - s_1^*$.

단계 2 : 2번째 요금수준의 좌석보호수준(s_2^*) 결정

$$\overline{D}_{12} = \overline{D_1} + \overline{D_2},\ \hat{\sigma}_{12} = \sqrt{\hat{\sigma_1^2} + \hat{\sigma_2^2}},$$

$$f_{12} = \frac{f_1 \overline{D_1} + f_2 \overline{D_2}}{\overline{D}_{12}},$$

$$\overline{P}_{12}(s_2) = \Pr(D_1 + D_2 \geq s_2)$$

$$f_3 = EMSR_{12}(s_2^*) = f_{12} \overline{P}_{12}(s_2^*)$$

f_3 요금수준에 대한 좌석용량 할당 : $Q - s_2^*$

단계 3 : 일반요금 수준 n

$$\overline{D}_{1n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{D}_i,\quad \hat{\sigma}_{1n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2},$$

$$f_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \overline{D}_i}{\overline{D}_{1n}},\quad \overline{P}_{1n}(s_n) = \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} D_i \geq s_n\right)$$

$$f_{n+1} = EMSR_{1n}(s_n^*) = f_{1n} \overline{P}_{1n}(s_n^*)$$

f_{n+1} 요금수준에 대한 좌석용량 할당 : $Q - s_n^*$

EMSR과 $EMSR_b$는 요금수준에 따른 수요의 분포함수를 고려하여 요금수준별 좌석할당을 결정해 줄 뿐, 좌석할당에 따른 기대수익을 제시하지 못하고 있다. 따라서 이 같은 좌석할당 결과를 적용하여 나타난 결과가 좌석할당 당시의 기대수익과 어느 정도 차이가 나타나는지 확인할 수 없게 된다. 또한, 항공사간의 가격경쟁이 심하여 수요분포는 변함이 없으나 가격이 f_i에서 $\overline{f_i}$로 증가 또는 감소하는 경우에 $EMSR_b$ 모형의 전 과정을 다시 반복하여 좌석조정을 실시해야 한다. 뿐만 아니라 특정 요금수준의 좌석할당에 대한 정책적 배려 등 좌석운용 제약이 고려되는 경우에는 $EMSR_b$ 모형으로는 해결할 수 없게 된다.

$EMSR_b$에서는 n번째 요금수준까지의 좌석보호수준(s_n^*)을 [단계 3]의 비교적 간단한 관계식을 이용하여 결정할 수 있다. 그러나 이를 위해 최상위 요금수준에서 n번째 요금수준까지의 수요에 대한 결합 확률분포(joint probability distribution)를 구해야 하는 문제점을 가지고 있다. 즉, 각 요금수준의 수요분포가 다루기 용이한 동일한 확률분포를 가지는 경우는 비교적 쉽게 결합 확률분포를 구할 수 있으나, 각 요금수준의 수요의 확률분포가 상이한 경우는 결합 확률분포의 산출이 매우 어렵거나 불가능할 수도 있게 된다. 따라서 $EMSR_b$ 모형이 엄격한 가정을 적용하여 모형을 단순화 시켰음에도 불구하고, 현실적으로 수요분포함수 추정의 문제점으로 인해 적용상 여러 가지 어려움을 갖고 있다.

2.2 선형근사모형(Linear Approximation Model)

개인수요에 대한 단일 비행구간의 정태적 좌석할당 문제에 대한 $EMSR_b$ 모형의 한계점을 보완하기 위하여 수리계획 모형을 고려한다. 이를 위해 $EMSR_b$ 모형에서 고려했던 기본 가정을 그대로 적

용하기로 한다. 즉, 수요이동(Diversion), 예약부도, 네스팅은 고려하지 않고, 요금수준간의 수요는 독립적이고 수요의 분포함수는 알려진 것으로 가정한다. 그러나 기존 모형과는 달리 낮은 요금수준의 수요가 높은 요금수준의 수요보다 먼저 발생한다는 가정은 고려하지 않는다. 따라서 본 연구에서 고려하는 수리계획 모형이 $EMSR_b$ 모형에 비해 보다 현실적 특성을 반영하게 된다. 개인수요에 대한 단일구간 좌석할당 문제를 수리계획 모형으로 정식화하기 위해 다음과 같은 기호와 변수를 고려하자.

I : 요금수준의 집합 ($i \in I$),
D_i : i번째 요금수준의 수요(확률분포를 갖음),
C : 최대 공급 좌석수,
r_i : i번째 요금수준의 수익,
l_i : i번째 요금수준에 할당되어야 할 최소 좌석수,
u_i : i번째 요금수준에 할당되어야 할 최대 좌석수,
x_i : i번째 요금수준에 할당된 좌석수.

네스팅을 고려하지 않음으로 i번째 요금수준에서 발생한 수요가 i번째 요금수준에 할당된 좌석수 (x_i)보다 큰 경우에는 할당 된 좌석수를 초과하는 수요의 예약요구는 모두 기각되고, 발생한 수요가 할당된 좌석수 보다 적을 때는 발생한 수요의 예약요구 모두가 허용되게 된다. 따라서 i번째 요금수준의 판매수익은 다음과 같이 나타나게 된다.

i번째 요금수준의 판매수익 :

$$r_i \min(D_i, x_i) = \begin{cases} r_i D_i, & D_i \leq x_i, \\ r_i x_i, & D_i > x_i. \end{cases}$$

모든 요금수준에 대한 기대수익은 $E[\sum_{i \in I} r_i \min(D_i, x_i)]$으로 나타낼 수 있고, 이 기대수익을 최대화하기 위한 요금수준별 좌석할당 결정문제는 다음과 같은 수리계획 모형으로 나타낼 수 있다.

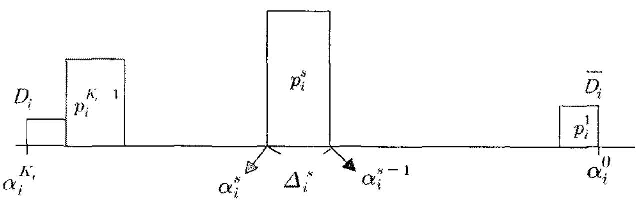
$$(P_0)\ Max.\quad Z_P = E[\sum_{i \in I} r_i \min(x_i, D_i)], \tag{2}$$

$$s.t.\quad \sum_{i \in I} x_i \leq C, \tag{3}$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \qquad i \in I. \tag{4}$$

목적함수 2는 요금수준별 할당좌석에 대하여 수요의 확률분포에 따른 기댓값의 합으로 이 값을 최대화하기 위한 것이다. 식 (3)은 각 요금수준에 할당된 좌석할당의 합이 총 공급좌석이하여야 함을 나타내고 있고, 식 (4)는 각 요금수요에 대하여 최소 또는 최대 좌석 배정에 대한 제약을 나타내고 있다. 식 (4)와 같은 제약조건은 일반적이지는 않지만, 영업활동의 필요에 의하여 낮은 요금수준이나 특정 요금수준에 대한 정책적 좌석배정을 고려해야 하는 경우에 적용될 수 있다. 따라서 식 (4)의 경우에는 기존의 좌석할당 모형에서는 고려되지 않았던 제약조건이다.

i번째 요금수준의 수요 D_i가 확정적 수요(Deterministic Demand)라면, (P_0)는 단순한 선형계획 모형으로 나타낼 수 있어 쉽게 최적 좌석할당을 결정할 수 있다. 그러나 요금수준의 수요가 확률적으로 발생함으로 식 (2)의 계산이 단순하게 나타나지 않는다. (P_0)를 보다 단순한 선형계획모형으로 변환하기 위하여 각 요금수준의 수요에 대한 분포함수를 상한값과 하한값을 갖는 계단함수(Step Function)



〈그림 1〉 수요 D_i의 확률분포

로 가정한다. 계단함수는 현실적인 자료수집 과정에서 처리가 용이하고, 어떤 형태의 분포함수도 계단함수로 근사시켜 표현할 수 있는 장점을 가지고 있다. 즉, 계단형 함수의 각 구간의 크기를 작게 하는 경우에는 원래의 확률분포함수와 거의 동일한 계단형 함수를 얻을 수 있기 때문이다. 따라서 각 요금수준의 수요함수에 대한 계단형 분포함수를 가정하여 Szwarc[25]의 선형근사방법(Linear Approximation Method)을 적용하면 (P_0)는 단순한 선형계획 모형으로 변환이 가능해진다.

i번째 요금수준의 수요분포함수가 <그림 1>과 같이 범위 $[\underline{D_i},\ \overline{D_i}]$ 내에서 계단함수를 갖는 것으로 가정한다. 수요의 최대값과 최소값의 범위는 K_i개의 세부 구간으로 분할할 수 있고, 각 세부 구간의 크기를 Δ_i^s라 하자. 이때 범위의 최대값을 α_i^0, 최소값을 $\alpha_i^{K_i}$라하고, 세부 구간 s는 범위 $[\alpha_i^s,\ \alpha_i^{s-1}]$로 정의한다. 즉, $\alpha_i^{s-1}=\alpha_i^s+\Delta_i^s$로 나타낼 수 있다. 수요 D_i가 계단함수를 갖고 확률분포가 미리 알려진 것으로 가정했음으로 세부구간 s에서의 수요발생 확률 p_i^s는 미리 계산될 수 있다.

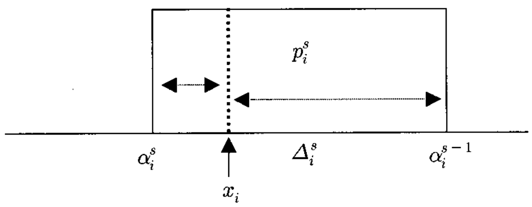
이 같은 분포함수를 가정하면 목적함수 Z_p는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z_p=\sum_{i\in I}r_iE[\min(x_i,\ D_i)] \tag{5}$$

$$=\sum_{i\in I}[\int_{\alpha_i^{K}}^{x_i}r_iD_if(D_i)dD_i+\int_{x_i}^{\alpha_i^0}r_ix_if(D_i)dD_i]$$

($f(D_i)$: i번째 요금수준 수요의 확률밀도함수)

수요함수를 계단함수로 가정했음으로, 세부구간



<그림 2> 구간 $[\alpha_i^s,\ \alpha_i^{s-1}]$에서 x_i의 분포

s에서 확률분포는 균일분포를 갖게 되고, 이구간의 확률분포함수는 $f(D_i)=\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}$로 나타낼 수 있다[25].

여기서, $z_1(x_i)=\int_{\alpha_i^K}^{x_i}r_iD_if(D_i)dD_i$, $z_2(x_i)=\int_{x_i}^{\alpha_i^0}r_ix_if(D_i)dD_i$라 하면, $Z_p(x_i)=z_1(x_i)+z_2(x_i)$로 나타낼 수 있다.

따라서 i번째 요금수준에 할당될 좌석수 x_i가 $\alpha_i^s\le x_i\le\alpha_i^{s-1}$ 범위에서 결정되었다면, $z_1(x_i)$와 $z_2(x_i)$는 수요범위 $[\underline{D_i},\ \overline{D_i}]$에서 계단함수를 적용하면 각각 다음과 같이 계산된다.

$$z_1(x_i)=\int_{\alpha_i^{K}}^{x_i}r_iD_if(D_i)dD_i \tag{6}$$

$$=r_i[\int_{\alpha_i^s}^{x_i}D_i\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}dD_i+\int_{\alpha_i^{s+1}}^{\alpha_i^s}D_i\frac{p_i^{s+1}}{\Delta_i^{s+1}}dD_i+\cdots$$

$$+\int_{\alpha_i^K}^{\alpha_i^{K-1}}D_i\frac{p_i^{K_i}}{\Delta_i^{K_i}}dD_i]$$

$$=r_i[\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}(x_i-\alpha_i^s)\frac{(x_i+\alpha_i^s)}{2}$$

$$+\sum_{k=s+1}^{K_i}p_i^k\frac{(\alpha_i^{k-1}+\alpha_i^k)}{2}].$$

$$z_2(x_i)=r_i\int_{x_i}^{\alpha_i^0}x_if(D_i)dD_i \tag{7}$$

$$=r_ix_i(\int_{x_i}^{\alpha_i^{s-1}}\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}dD_i+\int_{\alpha_i^{s-1}}^{\alpha_i^{s-2}}\frac{p_i^{s-1}}{\Delta_i^{s-1}}dD_i+\cdots$$

$$+\int_{\alpha_i^1}^{\alpha_i^0}\frac{p_i^1}{\Delta_i^1}dD_i)=\ r_ix_i(\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}(\alpha_i^{s-1}-x_i)+\sum_{k=1}^{s-1}p_i^k)$$

$z_1(x_i)$, $z_2(x_i)$는 2차함수임으로 세부구간 s에서 선형함수인 $\overline{z_1}(x_i)$와 $\overline{z_2}(x_i)$로 근사시킬 수 있다.

$$\overline{z_1}(x_i)=z_1(\alpha_i^s)+\frac{(z_1(\alpha_i^{s-1})-z_1(\alpha_i^s))}{\Delta_i^s}(x_i-\alpha_i^s) \tag{8}$$

$$=r_i(\sum_{k=s+1}^{K_i}p_i^k\frac{(\alpha_i^{k-1}+\alpha_i^k)}{2})$$

$$+\ r_i(\frac{p_i^s}{\Delta_i^s}\frac{(\alpha_i^{s-1}+\alpha_i^s)}{2})(x_i-\alpha_i^s).$$

$$\iota_i^s) + \frac{(z_2(\alpha_i^{s-1}) - z_2(\alpha_i^s))}{\Delta_i^s}(x_i - \alpha_i^s) \quad (9)$$

$$(p_i^s + \sum_{k=1}^{s-1} p_i^k)$$

$$+ r_i(-\alpha_i^s \frac{p_i^s}{\Delta_i^s} + \sum_{i=1}^{s-1} p_i^k)(x_i - \alpha_i^s).$$

따라서 $Z_p(x_i)$는 다음과 같이 $\overline{z_1}(x_i) + \overline{z_2}(x_i)$로 선형근사화시켜 나타낼 수 있다.

$$Z_p(x_i) = \overline{z_1}(x_i) + \overline{z_2}(x_i) = H_i^s + h_i^s(x_i - a_i^s) \quad (10)$$

(여기서, $H_i^s = r_i(\sum_{k=1}^{s} p_i^k a_i^s + \sum_{k=s+1}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2})$,

$h_i^s = r_i(\frac{p_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} p_i^k))$

새로운 변수 x_i^s를 i번째 요금수준에 할당될 좌석수 x_i가 세부구간 $s(\alpha_i^s \leq x_i \leq \alpha_i^{s-1})$에서 값이 결정되는 경우를 나타내는 것으로 다음과 같이 정의하자.

$$x_i^s = x_i - \alpha_i^s, \quad \alpha_i^s \leq x_i \leq \alpha_i^{s-1}.$$

i번째 요금수준에 할당될 좌석수 x_i가 세부구간 s에서 값이 결정되는 경우의 기대수익 $Z_p(x_i)$는 새로운 변수 x_i^s에 의해 정의되는 $Z_p^s(x_i^s)$로 나타낼 수 있고 다음과 같은 단순한 선형함수로 나타낼 수 있다.

$$Z_p^s(x_i^s) = H_i^s + h_i^s x_i^s, \ (0 \leq x_i^s \leq \Delta_i^s). \quad (11)$$

정리 1 : $Z_p^s(x_i^s)$는 $s = 1, \cdots, K_i$ 구간에서 볼록형 조각-선형함수(Convex Piecewise Linear Function)가 된다.

증명 : $Z_p^s(x_i^s)$가 전체 수요범위 $[\underline{D_i}, \overline{D_i}]$에 대하여 연속함수임을 보이기 위해 임의구간 s에서 $Z_p^s(\alpha_i^{s-1}) = Z_p^{s-1}(\alpha_i^{s-1})$임을 보인다.

$$Z_p^{s-1}(\alpha_i^{s-1}) - Z_p^s(\alpha_i^{s-1})$$

$$= r_i[p_i^{s-1}\frac{\alpha_i^{s-1}}{2} + \sum_{k=s}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2}$$

$$+ (\frac{p_i^{s-1}}{2} + \sum_{k=1}^{s-2} p_i^k)\alpha_i^{s-1}] - r_i[p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2}$$

$$+ \sum_{k=s+1}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2} + (\frac{p_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} p_i^k)\alpha_i^{s-1}]$$

$$= r_i[p_i^{s-1}\frac{\alpha_i^{s-1}}{2} + p_i^s \frac{(\alpha_i^{s-1} + \alpha_i^s)}{2}$$

$$+ \frac{p_i^{s-1}}{2}\alpha_i^{s-1} - p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2} - \frac{p_i^s}{2}\alpha_i^{s-1}$$

$$- p_i^{s-1}\alpha_i^{s-1}] = 0.$$

따라서 $Z_p^s(x_i^s)$는 수요범위 $[\underline{D_i}, \overline{D_i}]$에서 연속함수가 된다. 이때 구간 $[\alpha_i^s, \alpha_i^{s-1}]$에서의 H_i^s와 h_i^s 값의 크기를 비교해보면 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$h_i^s = r_i(\frac{p_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} p_i^k) = r_i(-\frac{p_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s} p_i^k)$$

$$\leq r_i(\sum_{k=1}^{s} p_i^k + \frac{p_i^{s+1}}{2}) = h_i^{s+1},$$

$$H_i^s = r_i[p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2} + \sum_{k=s+1}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2}$$

$$+ p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} p_i^k \alpha_i^s]$$

$$= r_i[p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2} + p_i^{s+1}\frac{(\alpha_i^s + \alpha_i^{s+1})}{2}$$

$$+ \sum_{k=s+2}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2} - p_i^s \frac{\alpha_i^s}{2} + \sum_{k=1}^{s} p_i^k \alpha_i^s]$$

$$= r_i[p_i^{s+1}\frac{\alpha_i^s}{2} + \sum_{k=s+2}^{K_i} p_i^k \frac{(\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k)}{2} + p_i^{s+1}\alpha_i$$

$$+ r_i[p_i^{s+1}\frac{(\alpha_i^s - \alpha_i^{s+1})}{2} + \sum_{k=1}^{s} p_i^k(\alpha_i^s - \alpha_i^{s+1})]$$

$$= H_i^{s+1} + r_i[p_i^{s+1}\frac{(\alpha_i^s - \alpha_i^{s+1})}{2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} p_i^k(\alpha_i^s - \alpha_i^{s+1})] \geq H_i^{s+1}.$$

따라서 구간 s가 증가함에 따라 h_i^s는 비감소(nondecreasing), H_i^s는 비증가(non-increasing)를 보이고 있다. $Z_p^s(x_i^s)$가 수요범위 $[\underline{D_i}, \overline{D_i}]$에서 연속함수임으로 $Z_p^s(x_i^s)$는 $s=1, 2, \cdots, K_i$에 따라 볼록형 조각-선형함수(Convex piecewise linear function)가 된다.

$Z_p^s(x_i^s)$가 볼록형 조각-선형함수임으로, i) $x_i^s < \Delta_i^s$이면, $x_i^k = 0$, $k < s$가 되고, ii) $x_i^s > 0$이면, $x_i^k = \Delta_i^k$, $k > s$가 된다. 따라서 $Z_p^s(x_i^s)$에서 상수항인 H_i^s를 목적함수에 고려하지 않아도 최적해에는 변함이 없게 된다. 따라서 (P_0)는 다음과 같은 단순한 선형계획모형 (P)로 근사시킬 수 있다.

$$(P)\quad Max.\ Z_p = \sum_i \sum_s h_i^s x_i^s \tag{12}$$

$$s.t.\quad \sum_i \sum_s x_i^s \leq C \tag{13}$$

$$l_i \leq \sum_s x_i^s \leq u_i,\ \forall i, \tag{14}$$

$$x_i^s \leq \Delta_i^s,\ \forall i,\ s, \tag{15}$$

$$x_i^s \geq 0,\quad \forall i,\ s. \tag{16}$$

(P)는 일반적인 선형계획 문제임으로 CPLEX 등을 이용하여 쉽게 최적해를 구할 수 있다. 특히, 문제의 크기가 요금수준과 각 요금수준의 구간수(K_i)의 곱으로 나타나게 됨으로 변수의 수가 수 만개 이내가 되어 기존의 상용 LP 소프트웨어를 이용하여 쉽게 최적해를 구할 수 있다. (P)에서 최적해 $\overline{x_i^s}$을 구하면, i번째 여정에 할당할 좌석수는 $x_i^* = \sum_{s=1}^{K_i} \overline{x_i^s}$로 얻어진다. 따라서 x_i^*를 이용하여 각 요금수준별 최적 좌석할당을 결정하고 할당된 각 요금수준 좌석에 대해 네스팅 구조를 고려하여 예약 통제를 실시할 수 있다.

(P)는 선형계획 모형임으로 제약식 (14)와 같이 특정 요금수준에 대한 좌석할당에 제약이 필요한 경우를 쉽게 고려할 수 있고, 추가적인 제약조건에 대하여도 제약식의 추가로 모형에 쉽게 반영할 수 있다. 추가되는 제약조건이 선형관계를 유지할 수 있는 한 제약식이 추가된 (P)는 선형계획모형을 계속 유지할 수 있음으로 쉽게 최적해를 얻을 수 있다. 또한 각 요금수준별 요금의 변동에 따른 최적 좌석할당의 변동 여부를 민감도 분석을 통하여 쉽게 확인할 수 있는 장점도 있다.

항공사의 좌석예약 통제과정에서 발생하는 중요한 문제의 하나가 일정 수준의 좌석이 판매 된 이후 남겨진 좌석의 한계수익에 대한 평가이다. 즉, 전통적인 좌석할당 모형에서 낮은 요금수준의 수요가 먼저 발생한다고 가정했지만, 현실적으로는 각 요금수준별 수요가 확률적으로 무작위하게 발생하게 된다. 따라서 예약이 개시되고 일정 시점이 경과하면 모든 요금수준에 일정한 좌석판매가 이루어져 있고, 아직 판매되지 않은 좌석이 남아 있게 된다. 이 경우에 남겨진 좌석의 가치를 확인하여 최대의 수익이 얻어지도록 좌석할당을 조정할 필요가 있다. 특히, 남겨진 좌석의 한계수익은 비드가격(bid price)[3]으로 사용될 수 있어, 제시된 요금수준 이외의 가격으로 좌석 예약요청이 발생한 경우 예약 허용여부의 기준으로 사용될 수 있다.

남겨진 좌석을 X라 할 때 모형 (P)로부터 얻어지는 최대 수익을 $Z_p^*(X)$라 하면, 남겨진 좌석의 한계수익 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\Pi_X(1) = Z_p^*(X) - Z_p^*(X-1). \tag{17}$$

식 (17)의 $\Pi_X(1)$가 남겨진 좌석용량이 X일 때의 비드가격으로 사용될 있어, $\Pi_X(1)$이상의 가격을 제시하는 예약수요는 예약을 허용하는 것이 총 수익을 최대화하게 된다. 특히, 항공사에서 사전에 정해 놓은 요금수준 이외의 가격으로 예약 요구가 발생한 경우 비드가격은 예약의 허용여부를 결정

3) 비드가격(bid price)는 남겨진 좌석으로부터 얻어지는 한계수익으로 평가되는데, 이는 고객이 남겨진 좌석에 대하여 제시하는 구매가격에 대한 예약허용 여부를 결정하는 최소기준으로 사용될 수 있다. 비드가격에 대한 자세한 내용은 Talluri and Van Ryzin[26]을 참조.

ㅣ우 유용하게 활용될 수 있다. 특히, 일시 생하는 일시단체(Ad Hoc Group) 수요에 할당이 요구되었을 경우 비드가격은 좌 매우 유용하게 활용될 수 있다. 즉, 일시 의 요구를 S라 하면 S에 대한 한계수익 $= Z_p^*(X) - Z_p^*(X-S)$으로 산출될 수 있다. 시단체수요로부터 얻어지는 수익을 $\Lambda(S)$ $\Lambda(S)$와 $\Pi_X(S)$를 비교하여 일시단체수요 용여부를 결정할 수 있다.

$\Pi_X(S) > \Lambda(S)$: 일시단체 수요의 예약 기각,
$\Pi_X(S) \leq \Lambda(S)$: 일시단체 수요의 예약 허용.

따라서 모형 (P)는 기대수익을 최대화하는 각 요금수준별 좌석할당을 결정할 수 있을 뿐만 아니라, 좌석운영 제약의 고려가 용이하고, 선형계획모형의 민감도 분석을 실시하여 요금수준의 변화에 따른 좌석 조정여부를 쉽게 결정할 수 있다. 특히, 비드가격의 산출이 용이하여 일시단체 수요 등을 위한 좌석통제에도 유용하게 활용될 수 있는 장점을 가지고 있다.

3. 모의실험 및 분석

본 연구에서 제시된 선형완화 기법을 적용한 좌석할당 모형의 타당성을 분석하기 위하여 요금수준 및 수요분포 함수를 가정하여 요금수준별 좌석할당을 구하고, 이 결과를 $EMSR_b$ 모형의 결과와 비교하기 위해 모의실험을 실시한다. 본 연구에서는 수요에 대한 임의의 확률분포를 가정하여 모의실험을 실시하여 본 연구에서 제시된 모형의 일반적인 성과를 비교해 보고, 항공사의 운용자료를 이용한 모의실험 결과를 비교하고자 한다. 임의 확률분포에 대한 모의실험을 위하여 4개의 요금수준을 고려하고[4], 각 요금수준에서 발생하는 수요분포는 <표 1>과 같이 각 요금수준별 계단형 수요분포를 가정 하였다. 요금수준은 50, 60, 80, 100으로 가정한다.

항공사에서 발생수요의 규모와 공급좌석의 규모에 따라 좌석통제 방식의 성과가 다르게 나타난다. 발생수요에 비하여 공급좌석이 많은 경우는 예약한계를 설정하지 않고 선착순 판매방식이 효과적일 수 있고, 반면에 공급좌석에 비하여 발생수요가 많은 경우는 요금수준의 적절한 믹스가 효과적일 수 있기 때문이다.

요금이 증가할수록 평균 발생 수요는 감소하는 것이 일반적임으로, <표 1>에서도 이 같은 특성을 고려하여 수요분포를 가정하였고, 평균수요는 202로 나타나고 있다. <표 1>의 수요분포 및 요금수준에 대한 가정을 바탕으로, 모형 (P)와 $EMSR_b$ 모형을 적용하여 각 요금수준별 좌석할당을 결정하고, 네스팅 방식을 고려하여 각 요금수준의 예약한계를 결정하여 모의실험을 통한 총 수익을 분석하였다. 특히, 요금수준에 따른 예약통제 방식을 적용하지 않고 수요발생 순서에 따라 선착순 판매하는 경우의 결과와도 비교하여 최적화 기반의 예약통제 방식의 효과를 분석하였다. 모형 (P)를 통한 최적 좌석할당은 개인용 컴퓨터(Pentium, 2.8GHz)에서 CPLEX6.0 프로그램을 이용하여 구하였고, 계산에 소요된 시간은 수초 이하로 나타나고 있다.

$EMSR_b$ 모형에 의한 예약한계 설정을 위한 결합분포함수는 상위 수요의 합의 평균이 표준정규분포를 갖는 다는 가정을 이용하여 산출하였다.

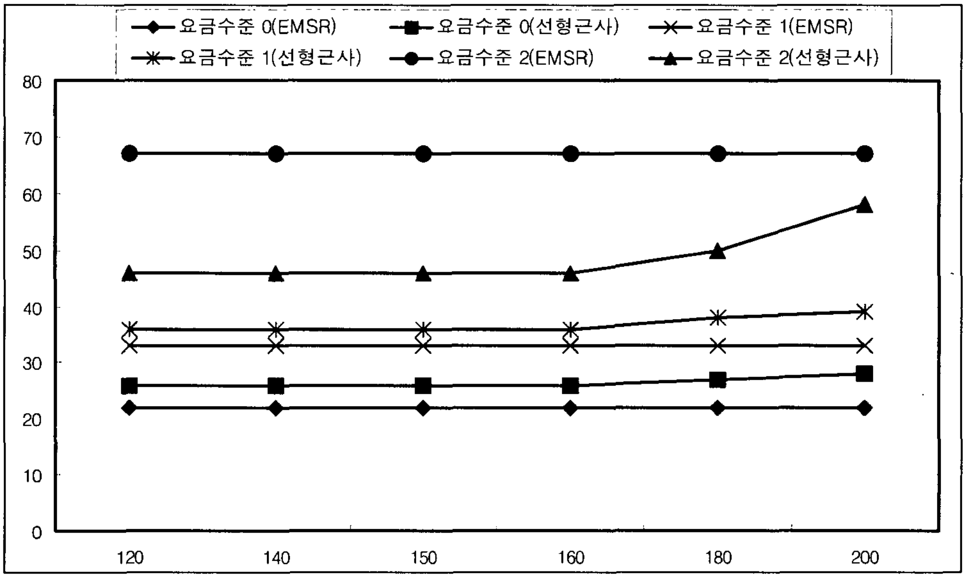
모형 (P)와 $EMSR_b$ 모형을 적용한 요금수준별 좌석할당은 <그림 3>과 같이 나타나고 있다. 모의실험은 모형 (P)와 $EMSR_b$ 모형에 의해 산출된 예약한계를 이용하여 <표 1>의 요금수준별 수요분포를 이용하여 무작위로 수요를 발생시켜 요금수준별 예약통제를 실시하였다. 좌석용량이 120인 경우부터 200인 경우까지 총 6가지 유형으로 공급좌

4) 국내 K항공사의 개인수요의 경우는 한국발 수요를 항공권 유효기간에 따라 1년 유효기간, 6개월 유효기간, 3개월 유효기간으로 구분하여 요금수준을 정의하고, 인터넷 요금수준을 고려하여 4개로 운영하고 있다.

<표 1> 요금수준 별 수요분포

구분		구간별 수요발생 확률(%)																						
0	구간	0 10	10 11	11 12	12 13	13 14	14 15	15 16	16 17	17 18	18 19	19 20	20 21	21 22	22 23	23 24	24 25	25 26	26 27	27 28	28 29	29 30		
	확률	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	8	8	8	9	11	10	20	6		
1	구간	0 20	20 21	21 22	22 23	23 24	24 25	25 26	26 27	27 28	28 29	29 30	30 31	31 32	32 33	33 34	34 35	35 36	36 37	37 38	38 39	39 40	40 45	45 50
	확률	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	15	20	10
2	구간	0 40	40 41	41 42	42 43	43 44	44 45	45 46	46 47	47 48	48 49	49 50	50 52	52 54										
	확률	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5										
	구간	54 56	56 58	58 60	60 62	62 64	64 66	66 68	68 70	70 75	75 80	80 85	85 90	90 95	95 100									
	확률	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5	5	3	2									
3	구간	0 60	60 65	65 70	70 75	75 80	80 85	85 90	90 95	95 100	100 105	105 110	110 115	115 120										
	확률	0	15	15	12	13	13	12	5	5	3	2	3	2										

주) 구간의 $[{a \atop b}]$에서 a는 구간 하한 값, b는 구간 상한 값을 각각 나타냄.



<그림 3> 요금수준별 좌석할당 결과

〈표 2〉 요금수준별 예약한계에 따른 모의실험 결과

좌석 용량	120			140		
구분	$EMSR_b$	선형근사	선착순	$EMSR_b$	선형근사	선착순
기대 수익	**8,415**	8,412	7,740	9,372	**9,412**	9,033
탑승률	94.3	95.8	100.0	94.3	96.4	100.0

좌석 용량	150			160		
구분	$EMSR_b$	선형근사	선착순	$EMSR_b$	선형근사	선착순
기대 수익	9,872	**9,918**	9,685	10,372	**10,429**	10,324
탑승률	94.7	96.7	100.0	95.0	96.9	100.0

좌석 용량	180			200		
구분	$EMSR_b$	선형근사	선착순	$EMSR_b$	선형근사	선착순
기대 수익	11,377	11,368	**11,499**	12,249	12,112	**12,384**
탑승률	95.4	95.6	99.2	94.2	92.9	96.2

석 수를 변화시키면서 각각 500회의 모의실험을 실시하여 평균수익과 평균 탑승률을 비교하였다. 모의실험은 C 언어를 이용한 프로그램을 작성하여 개인용 컴퓨터(Pentium, 2.8GHz)에서 실시하였다.

$EMSR_b$ 모형은 특성상 공급좌석수와 관계없이 최하위 요금수준을 제외하고 여타 요금수준별 할당좌석수는 동일하게 나타난다. 따라서 <그림 3>과 같이 공급좌석의 변화에도 불구하고 동일한 할당좌석수를 나타내고 있음을 알 수 있다. 이에 비하여 선형근사 모형 (P)는 공급석이 일정 수준(180) 이상이 되면 요금수준별 할당좌석수를 기대이익이 최대가 되도록 재조정하게 된다.

<그림 3>에서 $EMSR_b$ 모형이 모형 (P)에 대하여 상위요금수준의 할당좌석수가 적게 나타나고 있고, 하위 요금수준의 할당좌석수가 많게 나타나고 있다. 이 같은 요금수준별 할당좌석수를 기반으로 네스팅을 적용한 모의 실험결과의 기대수익은 <표 2>와 같이 나타나게 된다. <표 2>에서는 공급좌석수가 적을수록(수요가 많을수록) $EMSR_b$ 모형의 평균 수익이 다소 작게 나타나고 있다. 그러나 전체적으로 $EMSR_b$ 모형과 선형근사 모형 (P)의 평균수익에는 유의적인 차이를 나타내지 않고 있다.

<표 2>의 모의실험 결과는 수요에 비하여 공급석이 적은 경우(공급석에 비하여 수요가 많은 경우)에는 요금수준별로 발생하는 수요 중에서 높은 수익을 가져오는 수요를 보호하면서 전체 수익을 최대화하기 위한 좌석통제 방식이 효과적임을 알 수 있다. 즉, 좌석 용량 120인 경우에는 좌석통제를 실시하지 않는 선착순 판매방식에서는 평균수익이 7,740이지만, $EMSR_b$ 모형과 모형 (P)에서는 이보다 약 10% 가량 높은 수익을 나타나고 있음을 알 수 있다. 그러나 수요에 비하여 공급좌석이 상대적으로 많은 경우(공급좌석에 비하여 수요가 상대적으로 적은 경우)에는 요금수준별로 수요를 선택적으로 판매하는 것 보다는 선착순으로 판매하는 것이 더 효과적임을 알 수 있다. 즉, 좌석용량 180, 200인 경우에는 선착순 판매의 경우가 가장 높은 평균 수익을 나타내고 있음을 알 수 있다.

따라서 수익경영에서는 좌석용량에 대하여 발생하는 수요의 규모가 상대적으로 많은 경우에는 수익최대화를 위하여 좌석통제 방식이 효과적이지만, 좌석용량에 비하여 수요 규모가 상대적으로 작게 나타나는 경우에는 좌석통제 방식 보다는 가격조정 방식이 효과적일 수 있음을 알 수 있다. 이 같은 결과는 일반적인 상식과 같이 하는 결과로 수요가 충분하지 않은 경우에는 가격조정을 통하여 수

〈표 3〉 요금수준별 좌석 판매 현황

요금수준		모형(*P*)			
		Q = 150			
요금	평균수요	좌석할당#	초기 예약한계*	판매좌석	잔여 예약한계
100	24	26	150	16	22
80	37	36	124	24	12
60	61	46	88	50	0
50	80	0	42	38	0

주) # 좌석할당은 모형 (*P*)로부터 얻어진 요금수준별 할당 좌석수.
* 예약한계는 좌석할당을 바탕으로 네스팅을 고려한 각 요금수준별 최대 예약허용 좌석수.

요발생을 촉진시키고, 수요가 충분히 할생하는 경우에는 주어진 좌석용량을 적적히 통제하여 수익을 최대화해야 함을 나타내고 있다. 즉, 항공사에서 일반적으로 높은 수요가 나타나는 성수기에는 좌석통제가 효과적이며, 수요발생이 저조한 비수기에는 좌석통제 보다는 가격조정을 우선하여 적용하는 것이 효과적인데, 이 같은 현상을 모의실험의 결과로도 확인할 수 있다. 따라서 항공사에서는 노선별 수요발생 규모와 투입 항공기 좌석규모에 따라, 또는 동일 노선에서도 발생 요일별, 계절별 발생 수요의 규모에 따라 수익경영의 초점을 좌석통제에 둘 것인지 가격조정에 둘 것인지를 결정하여 운영해야 할 것이다.

수익면에서 모형 (*P*)가 $EMSR_b$ 모형과 거의 동일한 결과를 나타나고 있지만, 모형 (*P*)는 $EMSR_b$ 모형에서 다루지 못하는 여러 가지 문제를 해결할 수 있는 장점을 가지고 있다. 첫째, 가격변동에 따른 요금수준별 예약한계 재 조정문제이다. 좌석용량 150인 경우 두 번째 요금수준이 80에서 85로 변경된 경우를 예를 들어보자. $EMSR_b$ 모형은 변동된 요금수준을 대상으로 모든 요금수준에서의 보호수준 결정을 위한 계산과정이 필요하다. 그러나 모형 (*P*)에서는 민감도 분석을 통하여 86.96[5])까지 요금수준이 증가되어도 최적해가 변화되지 않음을 알 수 있다. 따라서 모형 (*P*)를 이용하는 경우에는 두 번째 요금수준이 86.96까지 증가하는 경우에도 좌석 재조정 없이 현재의 예약한계를 이용하는 것이 최적해임을 쉽게 확인할 수 있다.

둘째, 남겨진 좌석에 대한 한계가치를 확인할 수 있다. 예를 들어 <표 1>의 수요분포에 대하여 현재 판매된 좌석이 <표 3>과 같이 주어졌다고 가정해보자. 이 경우에 판매가능한 잔여좌석은 22가 된다. 이때 일시단체 수요[6])로 10석의 예약요구가 발생하였다면, 이 예약요구를 허용하기 위한 최소 판매요금수준은 얼마로 해야 할 것인가를 결정해야 한다.

$EMSR_b$ 모형에서는 이 같은 일시수요에 대한 예약요구를 처리하는 방법을 제시하지 못하고 있다. 이에 비하여 모형 (*P*)에서는 향후의 수요발생 분포를 고려하여 잔여좌석 22로부터 얻어지는 기대수익과 잔여좌석 12로부터 얻어지는 기대수익을 계산함으로써 일시수요 요구 10석에 대한 요금수준을 쉽게 결정할 수 있다. 즉, $z_p^*(22) = 1{,}988$, $z_p^*(12) = 1{,}104$임으로, $\Pi_{22}(10) = Z_p^*(22) - Z_p^*(12) = 894$가 잔여좌석 22석인 경우의 10석에 대한 기대가치가 된다. 따라서 일시수요 10석에 대한 최소 요금수준은 좌석당 89.4가 되어야 하고, 10석에 대한 지불요금수준이 894 이하가 되는 경우에는 일시수요의 예약을 거절하는 것이 기대이익을 높일 수 있게 된

5) CLPEX를 적용하여 최적해를 구하는 과정에서 민감도 분석결과로 얻어진 두 번째 요금수준의 요금변동에 대한 상한값 임.

6) 동일한 여정을 가지고 일시적으로 발생하는 단체수요.

다. 이 밖에 모형 (P)는 특정 요금수준에 대한 좌석운영 제약 등을 모형에 추가하여 쉽게 고려할 수 있는 장점도 가지고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 항공사에서 단일 비행구간을 대상으로 복수 요금수준이 고려되는 항공편에 대한 좌석할당 문제를 다루었다. 문제의 단순화를 위하여 요금수준간의 수요가 상호 독립적인 가정하에서 최대수익을 위한 좌석할당 문제를 정태적 의사결정 모형으로 다루었다. 본 연구에서 다루는 문제는 Littlewood 이래로 많은 연구들이 행해졌고, 효과적인 해법인 $EMSR_b$ 모형이 개발되어 활용되고 있다. 그러나 기존의 연구에서는 각 요금수준별 수요분포와 요금수준 만을 고려하여 좌석할당을 결정할 뿐, 현실적으로 해결해야할 많은 부수적인 의사결정에는 활용할 수 없는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 기존 연구가 가지고 있는 단점을 보완할 수 있도록 개인수요에 대한 단일 비행구간의 정태적 좌석할당 문제를 수리계획 모형을 이용하여 제시함으로써, 좌석할당에 따른 기대수익 산출, 가격변동에 따른 민감도분석, 좌석운용에 따른 제약요인 등을 효과적으로 처리할 수 있도록 하였다. 특히, 요금수준별 수요분포를 고려하여 용량제약과 좌석운용제약을 고려한 확률계획모형을 수립하고, 수요분포에 대한 가정을 통해 선형근사 방법을 적용함으로써 복잡한 확률계획모형을 단순한 선형계획 모형으로 변환할 수 있음을 보였다. 변환된 선형계획 모형을 이용하여 각 요금수준별 최적 좌석할당 결과를 얻을 수 있다. 특히, 동일한 수요분포에 대하여 $EMSR_b$ 모형과 본 연구의 좌석할당 모형 (P)를 적용한 좌석할당 결과에 대한 모의실험을 실시한 결과 두 모형에서 기대수익의 차이가 거의 없음을 확인할 수 있었다. 그러나 모형 (P)는 요금수준에 대한 민감도 분석이 가능하여 요금변동에 따른 좌석 재조정의 의사결정이 손쉽게 이루어질 수 있을 뿐만 아니라, 잔여좌석에 대한 기대수익 산출이 가능하여 일시단체 수요에 대한 예약통제도 쉽게 해결할 수 있는 장점을 가지고 있음을 확인하였다.

따라서 본 연구에서 제시한 모형 (P)는 기존 좌석할당 모형이 해결하지 못했던 문제점을 해결할 수 있는 유연성과 확장성을 가지고 있어 개인수요의 좌석통제에 효과적으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 그러나 본 연구결과를 현실적인 문제에 활용하기 위해서는 예약부도, 해지 및 수요이동 등에 대한 요인을 추가한 모형으로 확장될 필요가 있다. 또한 낮은 수요가 예상되는 경우에는 좌석통제가 효과적이지 못함을 확인할 수 있음으로, 이 경우에 기대수익 증대에 효과적인 동적 가격통제 방법으로의 확장된 연구가 진행되어 수익경영 연구영역을 확장할 필요가 있다.

참 고 문 헌

[1] 윤문길, 이휘영, "요금수준간 수요의 이동을 고려한 항공사 수익경영 모형,"「한국항공경영학회지」, 제1권, 제1호(2003), pp.27-38.

[2] 윤문길, 이휘영, "항공사 수익경영모형에 관한 조사 연구",「한국경영과학회지」, 제30권, 제2호(2005), pp.41-62.

[3] 윤문길, 이휘영, 송윤숙, 양해운, "선형완화 기법을 이용한 복수 비행구간의 좌석할당에 관한 연구",「생산성논집」, 제21권, 제4호(2007), pp.221- 240.

[4] 송윤숙, 이휘영, 윤문길, "항공사 패키지 여행 단체수요의 좌석할당 문제",「경영과학」, 제25권, 제1호(2008), pp.93-106.

[5] Belobaba, P., "Airline Yield Management : An Overview of Seat Inventory Control," *Transportation Science*, Vol.21(1987), pp.63-73.

[6] Belobaba, P., "Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control," *Operations Research*, Vol.37(1989), pp.183-197.

[7] Belobaba, P. and L.R. Weatherford, "Comparing

Decision Rules that Incorporate Customer Diversion in Perishable Asset Revenue Management Situations," *Decision Science*, Vol.77 (1996), pp.343-363.

[8] Bodily, S. and L. Weatherford, "Perishable-Asset Revenue Management : Generic and Multiple-Price Yield Management with Diversion," *Omega*, Vol.23(1995), pp.173-185.

[9] Brumelle, S., J.I. McGill, T.H. Oum, K. Sawaji and M.W. Tretheway, "Allocation of Airline Seats between Stochastically Dependent Demands," *Transportation Science*, Vol.24(1990), pp.183-192.

[10] Burumelle, S. and J.I. McGill, "Airline Seat Allocation with Multiple Nested Fare Classes," *Oprations Research*, Vol.41(1993), pp.127-137.

[11] Brumelle, S. and D. Walczak, "Dynamic Airline Revenue Management with Multiple Semi-Markov Demand," *Operations Research*, Vol.51 (2003), pp.137-148.

[12] Chatwin, R.E., "Multiperiod Airline Overbooking with a Single Fare Class," *Operations Research*, Vol.46(1999), pp.805-819.

[13] Chiang, W.C., J.C.H. Chen and X. Xu, "An overview of research on revenue management : current issues and future research," *International Journal of Revenue Management*, Vol.1, No.1(2007), pp.97-128.

[14] Curry, R., "Optimal Seat Allocation with Fare Classes Nested by Origins and Destinations," *Transportation Science*, Vol.24(1990), pp.193-204.

[15] Feng, Y. and B. Xiao, "A dynamic airline seat inventory control model and its optimal policy,"l*Operations Research* Vol.49, No.6 (2001), pp.938-949.

[16] Feng, Y. and B. Xiao, "A continuous-time seat control model for single-leg flights with no-shows and optimal overbooking upper bound," *European Journal of Operational Research* Vol.174(2006), pp.1298-1316.

[17] Gallego, G. and G. van Ryzin, "A Multi-Product Dynamic Pricing Problem and Its Applications to Network Yield Management," *Operations Research*, Vol.45(1997), pp.24-41.

[18] Hersh, M. and S.P. Ladany, "Optimal Seat Allocation for Flights with Intermediate Stops," *Computers and Operations Research*, Vol.5 (1978), pp.31-37.

[19] Lauthenbacher, J. and S.J. Stidham, "The Underlying Markov Decision Process in the Single-Leg Airline Yield Management Problem," *Transportation Science*, Vol.33(1999), pp.136-146.

[20] Lee, T.C. and M. Hersh, "A Model for Dynamic Airline Seat Inventory Control with Multiple Seat Bookings," *Transportation Science*, Vol.27(1993), pp.252-262.

[21] McGill, J.I. and G.J. Ryzin, "Revenue Management : Research Overview and Prospects," *Transportation Science*, Vol.33(1999), pp.233-256.

[22] Pak, K. and N. Piersma, "Overview of OR techniques for airline revenue management," *Statistica Neerlandica*, Vol.56, No.4(2002), pp.479-495.

[23] Pfeifer, P.E., "The Airline Discount Fare Allocation Problem," *Decision Science*, Vol.20 (1989), pp.149-157.

[24] Subramanian, J., S. Stidham Jr. and C.J. Lautenbacher, "Airline Yield Management with Overbooking, Cancellations, and No-Shows," *Transportation Science*, Vol.33(1999), pp.147-167.

[25] Szwarc, W., "The transportation problem with stochastic demand," *Management Science*

Vol.11(1964), pp.33-50.

[26] Talluli, K.T. and G. van Ryzin, The theory and practice of revenue management, Springer, New York, 2005.

[27] Tcha, D.W. and M.G. Yoon, "A dual-based heuristic for the simple facility location problem with stochastic demand," *IIE Transactions* Vol.17(1985), pp.364-369.

[28] Weatherford, L. and S. Bodily, "A Taxonomy and Research Overview of Perishable-Asset Revenue Management," *Operations Research*, Vol.40(1992), pp.831-844.

[29] Wollmer, R.D., "An Airline Seat Management Model for a Single Leg Route when Lower Fare Classes Book First," *Operations Research*, Vol.40(1992), pp.26-37.

[30] Zhao, W. and Y.-S. Zheng, "A Dynamic Model for Airline Seat Allocation with Passenger Diversion and No-shows," *Transportation Science*, Vol.35(2001), pp.80-98.