

논문 2009-46SP-6-17

# 최대 다위상 분해 부밴드 인접투사 적응필터의 수렴거동 해석

## (Convergence Behavior Analysis of The Maximally Polyphase Decomposed SAP Adaptive Filter)

최 훈\*, 배 현 덕\*\*

(Hun Choi and Hyeon-Deok Bae)

### 요 약

부밴드 구조에서 적응필터에 최대 다위상 분해와 노블아이덴티티를 적용함으로써 전밴드 인접투사 알고리즘은 부밴드 인접투사 알고리즘으로 변환된다. 최대 다위상 분해된 부밴드 인접투사 (Maximally Polyphase Decomposed Subband Affine Projection: MPDSAP) 알고리즘은 각 부밴드의 적응 부필터에서 사용되는 투사차원이 1인 부밴드 인접투사 알고리즘의 특별한 형태다. MPDSAP 알고리즘의 계수갱신식은 NLMS 알고리즘과 유사한 형식을 갖기 때문에 실제 구현관점에서 보다 좋은 알고리즘 선택이 될 수 있다. 본 논문은 MPDSAP 알고리즘의 새로운 통계적 해석을 제시한다. 해석적 모델은 정규직교 분해필터를 갖는 부밴드 구조에서 Autoregressive (AR) 입력과 임의의 적응이득에 대해 유도된다. 정규직교 분해필터에 의한 사전 백색화는 AR 입력과 임의의 적응이득에 대한 MPDSAP 알고리즘의 간단한 해석적 모델의 유도를 가능하게 한다.

### Abstract

Applying the maximally polyphase decomposition and noble identity to the adaptive filter in subband structure, the conventional fullband affine projection algorithm is translated to the subband affine projection (SAP) algorithm. The Maximally polyphase decomposed SAP (MPDSAP) algorithm is a special version of the SAP algorithm, and its adaptive sub-filters have unity projection dimension. The weight updating formular of the MPDSAP is similar to that of the NLMS algorithm, so it may be more proper algorithm than other AP-type algorithms for many practical applications. This paper presents a new statistical analysis of the MPDSAP algorithm. The analytical model is derived for autoregressive (AR) inputs and the nonunity adaptive gain in the subband structure with the orthonormal analysis filters (OAF). The pre-whitening by the OAF allows the derivation of a simple-analytical model for the MPDSAP with the AR inputs and the nonunity adaptive gain.

**Keywords :** Adaptive filter, Subband affine projection, Autoregressive inputs, Statistical analysis, MSE

### I. 서 론

다양한 적응 필터링 응용에서 LMS (least mean square) 알고리즘과 NLMS (normalized LMS) 알고리즘은 안정성과 실제 구현의 간단함으로 널리 사용되고 있다<sup>[1]</sup>. 그러나 입력신호의 상관도가 크거나 사용되는

적응 필터의 길이가 긴 응용에서 적응필터의 수렴 성능이 저하되는 단점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 인접투사 (affine projection : AP) 알고리즘이 제안되었다<sup>[2]</sup>. 투사차원이  $P$ 인 AP 알고리즘은 잘 알려져 있듯이 NLMS 알고리즘의 일반형으로 과거입력을 포함한  $P$ 개의 입력신호 벡터가 생성하는 인접 부평면 (affine subspace)으로의 투사 (projection)를 통해 AR (autoregressive) 입력신호를 사전에 백색화 (pre-whitening) 한다. 이러한 사전 백색화를 통한 입력 상관도 감소는 AP 알고리즘의 수렴속도를 빠르게 하지만 투사차원  $P$ 에 의존하는 데이터 행렬의 역행렬 연산 (matrix inversion)을 필요로 한다. 그러나 역행렬 연산

\* 평생회원, 동의대학교 전자공학과  
(Dept. of Electronic Eng., Dong-Eui University)

\*\* 평생회원, 충북대학교 전기공학과  
(Dept. of Electrical Eng., Chungbuk Nat'l. University)

접수일자: 2009년6월11일, 수정완료일: 2009년8월13일

은 많은 계산량이 요구되므로 하드웨어 구현 시 큰 문제점이 된다. 최근 최대 속음과정(maximal decimation)과 다위상 분해 (polyphase decomposition) 및 노블아이덴티티(noble identity)<sup>[3]</sup>를 적용한 부밴드 구조<sup>[4]</sup>에서 부밴드 적응필터링 (subband adaptive filtering : SAF) 기법과 전밴드 AP (fullband AP) 알고리즘의 장점을 결합한 부밴드 AP (subband AP : SAP) 알고리즘이 발표되었다<sup>[5]</sup>. 길이가  $N$ 인 전밴드 AP 적응필터는 부밴드 수가  $M$ 인 SAP ( $M$ -SAP) 알고리즘에서 다위상 분해와 노블아이덴티티를 이용한 등가변환에 의해  $N_s = N/M$  길이를 갖는  $M$ 개의 적응 부필터 (adaptive sub-filter)로 다위상 분해된다. 또한 SAP 알고리즘에서 충분한 수의 직교분해 필터 (orthonormal analysis filter : OAF)를 통한 입력신호의 직교분해는 전밴드 AP 알고리즘에서 투사에 의한 입력신호의 백색화 효과를 대신할 수 있다. 따라서 입력 상관도 제거를 위해 사용되는 AP 적응필터의 투사차원  $P$ 를  $M$ -SAP 적응 부필터에서  $P_s \approx P/M$ 으로 낮출 수 있다<sup>[5]</sup>. 결과적으로  $P$ 차원 전밴드 AP 알고리즘에 투사차원에 해당하는 부밴드 수를 갖는  $P$ -부밴드 분해기법을 적용하면 부밴드 투사차원은  $P_s = P/M|_{M=P} = 1$ 이 되어 추가 계산량 없이 NLMS 알고리즘과 유사한 형태로 변환될 수 있다. 이처럼 투사차원과 동일한 수의 부밴드 수를 갖는 최대 다위상 분해된 SAP(Maximally Polyphase Decomposed SAP : MPDSAP) 알고리즘은 AP 알고리즘의 최대 단점인 역행렬 연산을 피할 수 있으므로 실제 구현에 있어 매우 유리하다. 그러나 AP 알고리즘의 투사와 SAP 알고리즘의 부밴드 분해에 의한 상관제거 효과는 등가 변환되지 않으므로 부밴드 수가 충분하지 않을 경우 ( $M \leq 2$ ) 알고리즘의 성능은 다소 저하될 수 있다.

반향 및 잡음제거 (echo and noise cancellation)와 같은 실제 응용에서 AP 알고리즘은 시스템 향상을 위해 좋은 수렴성능을 가지므로 매력적이다. 따라서 AP 알고리즘의 성능을 통계적으로 해석하고자 하는 관심이 증가하였다. 그러나 행렬기반의 입력데이터를 사용하는 AP 알고리즘에 내재된 미결정 최소자승해 (under-determined least square solution) 때문에 AR 가우시안 입력 (autoregressive Gaussian input)에 대한 양적인 통계 해석 (quantitative statistical analysis)은 매우 복잡하다. Rupp<sup>[6]</sup>는 행렬기반의 AP 알고리즘에 단위 적응이득을 적용함으로써 계수갱신 방향벡터가 입력데이터에 의해 생성되는 부공간 (subspace)에 직교 투영

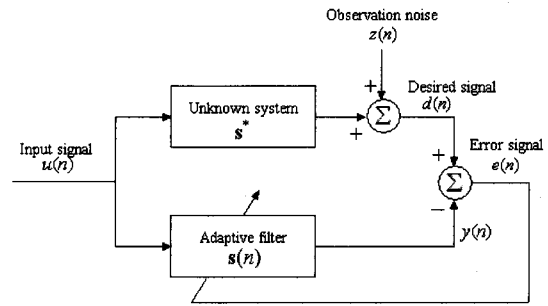


그림 1. 전밴드 구조의 적응 시스템 식별 모델  
Fig. 1. Adaptive system identification model in fullband structure.

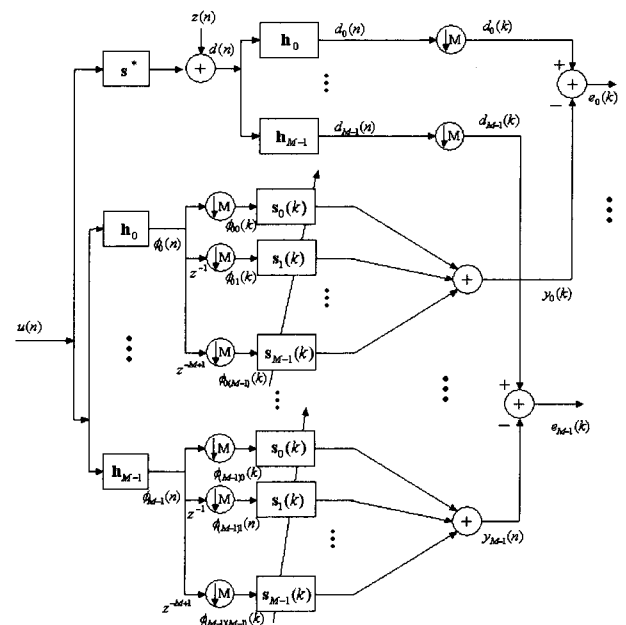


그림 2. 부밴드 구조의 적응 시스템 식별 모델  
Fig. 2. Adaptive system identification model in subband structure.

(orthogonal projection)을 이루도록 하여 행렬기반의 AP 알고리즘을 벡터기반의 NLMS 알고리즘과 같이 해석할 수 있음을 보였다. 최근 Rupp의 결과를 활용하여 단위 적응이득 (unity adaptive gain)과 AR 입력을 갖는 AP 알고리즘의 수렴성능에 대해 벡터기반으로 양적인 통계 해석을 한 결과가 발표되었다<sup>[7]</sup>. 그러나 많은 실제 응용에서 입력신호 전력에 따른 경사 잡음증폭의 영향 및 자기상관행렬의 조건 수 (condition number)에 의한 영향을 줄여주고 정상상태의 오차와 알고리즘의 안정성을 보장하기 위해 임의의 값을 갖는 적응이득 파라미터의 사용이 필요하다<sup>[1]</sup>.

본 논문에서는 AR( $q$ ) 입력과 임의의 적응이득을 사용하는 최대 다위상 분해된 부밴드 인접투사 (MPDSAP) 알고리즘의 평균계수벡터 (mean weight vector)와 평균

자승오차 (mean square error : MSE)에 대한 통계적 해석을 제시한다. 해석 결과는 역행렬 연산이 존재하지 않아 하드웨어 구현이 용이한 MPDSAP 알고리즘의 장점을 이론적으로 뒷받침 한다.

## II. SAP 및 MPDSAP 알고리즘

그림 1의 일반적인 전밴드 적응 시스템 식별 모델에서 입력신호  $u(n)$ 이 0 (zero) 평균이며 WSS (wide sense stationary)인  $AR(q)$  프로세스라 가정하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(n) = \sum_{i=1}^q a_i u(n-i) + f(n) \quad (1)$$

$$d(n) = u(n)^T s^* + z(n) \quad (2)$$

여기서  $a_i$ 는  $AR(q)$  프로세스의 계수이고  $f(n)$ 은 평균이 0 (zero)이고 분산이  $\sigma_f^2$ 인 WSS 백색 프로세스 (white process)이다.  $s^*$ 는 길이  $N$ 의 미지시스템 (unknown system)의 계수벡터 그리고  $z(n)$ 은 iid (independent identically distribution) 특성을 갖는 평균이 zero이며 분산이  $\sigma_z^2$ 인 랜덤 프로세스 (random process)로서 입력  $u(n)$ 과 통계적으로 독립이다.  $z(n)$ 은 측정잡음 (measurement noise) 또는 모델링 오차 (modeling error)로 생각할 수 있다.

그림 2는 그림 1로부터 등가 변환된 OAF를 사용하는  $M$ -부밴드 구조의 적응시스템 식별 모델이다<sup>[4]</sup>. 입력  $u(n)$ 과 원하는 신호  $d(n)$ 은 OAF에 의해 각각 부밴드 입력신호인  $\phi_i(n)$ 와 부밴드 원하는 신호  $d_i(n)$  (for  $i=1, 2, \dots, M-1$ )로 분해되며 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_i(n) = h_i^T(n)u(n) \quad (3)$$

$$d_i(n) = h_i^T(n)[d(n) + z(n)] = \tilde{d}_i(n) + z_i(n) \quad (4)$$

여기서  $u(n) = [u(n) u(n-1) \dots u(n-L+1)]^T$ ,  $d(n) = [d(n) d(n-1) \dots d(n-L+1)]^T$ ,  $z(n) = [z(n) z(n-1) \dots z(n-L+1)]^T$ ,  $L$ 은 OAF  $h_i$ 의 길이이다.

그림 2에서 ( $\downarrow M$ )는  $M$ -fold 데시메이터(decimator)를 의미하며 노블아이덴티티와 다위상 분해 기법에 의해  $\phi_i(n)$ 과  $d_i(n)$ 는 각각 다음과 같이 다위상 성분으로

분해된다.

$$\phi_{ij}(k) = \phi_i(Mk-j) \quad (5)$$

$$d_i(k) = d_i(Mk) \quad (6)$$

여기서  $i$ 와  $j=0, 1, \dots, M-1$ 이고  $k=0, 1, \dots$ 이다.

이때 적응필터를 다위상 성분으로 표현하면  $S(z) = S_0(z^M) + z^{-1}S_1(z^M) + \dots + z^{-M+1}S_{M-1}(z^M)$ 와 각 부밴드에서 적응필터의 출력  $y_i(k)$ 은 적응 부필터 (adaptive sub-filter)의 출력의 합으로  $y_i(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k)s_j(k)$ 와 같이 표현되며 부밴드 오차신호는  $e_i(k) = d_i(k) - \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k)s_j(k)$ 와 같이 표현된다.

그림 2에서  $M$ -SAP 알고리즘은 다음과 같이 주어진다<sup>[5]</sup>.

$$s(k+1) = s(k) + \mu X(k)[X^T(k)X(k)]^{-1}\epsilon(k) \quad (7)$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_{00}(k) & X_{10}(k) & \dots & X_{(M-1)0}(k) \\ X_{01}(k) & X_{11}(k) & \dots & X_{(M-1)1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{0(M-1)}(k) & X_{1(M-1)}(k) & \dots & X_{(M-1)(M-1)}(k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\epsilon(k) = [\epsilon_0^T(k), \epsilon_1^T(k), \dots, \epsilon_{M-1}^T(k)]^T \quad (9)$$

여기서 적응필터는  $s(k) = [s_0^T(k) s_1^T(k) \dots s_{M-1}^T(k)]^T$ 와 같이 다위상 분해된  $M$ 개의 적응 부필터  $s_i(k)$ 로 표현된다. 입력데이터 행렬  $X_{ij}(k) = [\phi_{ij}(k), \phi_{ij}(k-1), \dots, \phi_{ij}(k-P_s+1)]$ 는 부밴드 분해된 입력신호의 다위상 성분으로 구성된  $N_s \times 1$  벡터 ( $N_s = N/M$ )  $\phi_{ij}(k) = [\phi_{ij}(k) \phi_{ij}(k-1) \dots \phi_{ij}(k-N_s+1)]^T$ 로 구성된다. 그리고  $\epsilon_i(k) = [e_i(k), e_i(k-1), \dots, e_i(k-P_s+1)]^T$ 이다.

AP 알고리즘의 투사차원  $P=2$ 일 때  $M=P$ 인 최대 다위상 분해된 부밴드 인접투사 (MPDSAP) 알고리즘의 각 적응 부필터 계수갱신식은 식 (7)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>[5]</sup>.

$$s_j(k+1) = s_j(k) + \mu \sum_{i=0}^{P-1} \left( \frac{\phi_{ij}(k)}{\sum_{i=0}^{P-1} \phi_{ij}^T(k)\phi_{ij}(k)} e_i(k) \right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
e_i(k) &= d_i(k) - \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) s_j(k) \\
&= \tilde{d}_i(k) + z_i(k) - \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) s_j(k) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) s_j^*(k) + z_i(k) - \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) s_j(k) \quad (11)
\end{aligned}$$

여기서  $s_i^*$ 는 다위상 성분으로 표현된 미지시스템 계수벡터  $s^* = [s_0^{*T}(k) \ s_1^{*T}(k) \ \dots \ s_{M-1}^{*T}(k)]^T$ 의  $i$  번째 다위상 성분벡터이다.

식 (10)의 MPDSAP 알고리즘은 역행렬 연산이 필요하지 않으며 NLMS 알고리즘의 계수갱신식과 유사하다.  $M$ -부밴드( $M=P$ )의 경우 식 (10)은 다음과 같이 일반식으로 쓸 수 있다<sup>[5]</sup>.

$$s(k+1) = s(k) + \mu \Phi(k) [\Phi(k) \Phi^T(k)]^{-1} \epsilon(k) \quad (12)$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \phi_{00}(k) & \phi_{10}(k) & \dots & \phi_{(M-1)0}(k) \\ \phi_{01}(k) & \phi_{11}(k) & \dots & \phi_{(M-1)1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{0(M-1)}(k) & \phi_{1(M-1)}(k) & \dots & \phi_{(M-1)(M-1)}(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon(k) &= [e_0(k), e_1(k), \dots, e_{M-1}(k)]^T \\
&= \Phi^T(k) s^* + \zeta(k) - \Phi^T(k) s(k) \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\zeta(k) = [z_0(k), z_1(k), \dots, z_{M-1}(k)]^T \quad (15)$$

여기서  $\Phi(k)$ 는  $MN_s \times M$  행렬이고  $\epsilon(k)$ 와  $\zeta(k)$ 는 모두  $M \times 1$  크기의 벡터이다.

### III. MPDSAP 알고리즘의 평균 계수오차거동

MPDSAP 적응필터의 계수오차벡터(weight error vector)를  $v(k) = s(k) - s^*$ 라 하면 식 (12)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
v(k+1) &= v(k) - \mu \Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k) v(k) \\
&\quad + \mu \Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \zeta(k) \quad (16)
\end{aligned}$$

위의 MPDSAP 적응필터의 계수오차식으로부터 MPDSAP의 수렴성능은 상관행렬 (correlation matrix)  $E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\}$ 에 의존함을 알 수 있다. MPDSAP 적응필터의 수렴성능에 대한 통계적 해석을 위해 다음과 같이 대부분의 통계적 알고리즘의 해석에서 사용되는 독립가정 (independence assumption)과 유

사한 가정을 사용한다.

가정 1 :

AR( $q$ ) 프로세스인 입력  $u(n)$ 이 OAF에 의해 충분히 분해되었다고 가정하면 부밴드 입력신호  $\{\phi_i(n)\}$ 와  $\{\phi_j(n)\}$ 는  $i \neq j$ 에 대해 확률적으로 직교 (statistically orthogonal)인 WSS 백색 가우시안 랜덤 프로세스 (white Gaussian random process)로서 평균은 0이며 분산은  $\sigma_i^2$ 이다.

가정 2 :

부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력행렬  $\Phi(n)$ 와 적응필터 계수벡터  $s(k)$ 는 통계적으로 독립이다.

가정 1로부터 OAF에 의해 부밴드 분해된 입력신호  $\{\phi_i(n)\}$ 와 다위상 성분  $\{\phi_{ij}(k)\}$ 와  $\{\phi_{kl}(k)\}$ 는  $i \neq j$  or  $k \neq l$ 에 대해 확률적으로 직교 (stochastically orthogonal)인 백색 가우시안 랜덤 프로세스로서 평균과 분산은 각각 0과  $\sigma_{ij}^2$ 이다. 이때 다위상 분해된 부밴드 입력신호의 분산은  $\sigma_{ij}^2 \approx \sigma_i^2$ 이다.

식 (16)의 기댓값 (expectation)의 두 번째 항은 가정 2로부터  $E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} E\{v(k)\}$ 와 같이 되며  $E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\}$ 에서  $\Phi(k)$  또는  $\Phi^T(k)$ 의 각 성분들과  $[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}$ 의 각 성분간의 종속성 (dependency) 평가하기 위해  $[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}$ 의 구조를 살펴본다. 표현의 간단함을 위해  $[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}$ 의  $(i, i)$ 번째 성분을 고려하면,  $\left( \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \phi_{ij}^2(k-l) \right)^{-1}$ 와 같다. 이 성분은  $\Phi(k)$ 의  $i$ 번째 열 성분들 또는  $\Phi^T(k)$ 의  $i$ 번째 행 성분들에 상관이 있으며 각 행 또는 열 성분들에 대해 단지 2개만 영향을 준다. 이러한 종속성은  $M$ 이 증가할수록 무시할 만큼 작아지므로  $E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
&E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\
&\approx E\{\Phi(k) E\{[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}\} \Phi^T(k)\} \quad (17)
\end{aligned}$$

여기에서  $E\{[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}\}$ 는  $M \times M$  크기의 상관행렬로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{[\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}\} = R_{\Phi}^{-1}(k) \quad (18)$$

식 (18)에서  $R_{\Phi}^{-1}(k)$ 은 가정 2로부터 주대각 성분 (diagonal elements)을 제외한 나머지 성분들은 모두 0

인 대각행렬이 되며  $\{\Phi(k)\}$ 가 에르고딕 프로세스 (ergodic process)라 하면 식 (13)을 사용하여  $i$ 번째 주 대각 성분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{(i,i)}^{-1}(k) &= E\left\{\left[\sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k)\phi_{ij}(k)\right]^{-1}\right\} \\ &= E\left\{\left[\sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N_s-1} \phi_{ij}^2(k-l)\right]^{-1}\right\} \\ &\approx \frac{1}{MN_s\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (19)$$

따라서 식 (19)는 다음과 같이  $i$ 번째 주대각 성분들이 해당 부밴드 신호의 분산으로 구성된 대각행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\} &= \frac{1}{MN_s} \Lambda^{-1}(k) \\ &= \frac{1}{MN_s} \begin{bmatrix} 1/\sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_1^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sigma_{M-1}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 결과를 이용하여 식 (17)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ = \frac{1}{MN_s} E\left\{\begin{bmatrix} G_0^{-1}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_1^{-1}(k) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_{M-1}^{-1}(k) \end{bmatrix}\right\} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$E\{G_j^{-1}(k)\} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\} \approx MI_{N_s} \quad (22)$$

이때  $E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\} = R_{\phi_{ij}\phi_{ij}}(k)$ 은  $N_s \times N_s$  행렬로서  $R_{\phi_{ij}\phi_{ij}}(k) = \sigma_{ij}^2 I_{N_s} = \sigma_i^2 I_{N_s}$ 이다. 따라서 식 (17)은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} = \frac{1}{N_s} I \quad (23)$$

식 (16)의 우측변 세 번째 항에서  $\zeta(k)$ 는 평균이 0이고 다른 어떤 신호와도 상관도가 없으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\zeta(k)\} \\ = \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\} E\{\zeta(k)\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

위의 결과들로부터 평균계수오차 (mean weight error)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{v(k+1)\} = \left(1 - \frac{\mu}{N_s}\right) E\{v(k)\} \quad (25)$$

식 (16)의 MPDSAP 적응알고리즘의 계수오차 반복 식은  $\left(1 - \frac{\mu}{N_s}\right)^k$ 의 함수가 되며 수렴하기 위한 조건은 식 (25)의 결과로부터  $\left|1 - \frac{\mu}{N_s}\right| < 1$ 이다.

#### IV. MPDSAP 알고리즘의 평균자승오차거동

MPDSAP 알고리즘에서 평균자승오차 (MSE)는 식 (14)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J(k) &= E\{\epsilon^T(k)\epsilon(k)\} \\ &= E\{v^T(k)\Phi(k)\Phi^T(k)v(k)\} - E\{\zeta^T(k)\Phi^T(k)v(k)\} \\ &\quad - E\{v^T(k)\Phi(k)\zeta(k)\} + E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)의 우측변 두 번째와 세 번째 항은 식 (24)의 결과를 사용하여 제거가 가능하다. 따라서 식 (26)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$J(k) = E\{v^T\Phi(k)\Phi^T(k)v(k)\} + E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} \quad (27)$$

식 (17) ~ 식 (22)에서 사용했던 유사한 가정과 방법에 의해 식 (27)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J(k) &\approx E\{v^T(k)E\{\Phi(k)\Phi^T(k)\}v(k)\} + E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} \\ &= \text{tr}[R_{\Phi\Phi}(k)K(k)] + E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서  $K(k) = E\{v(k)v^T(k)\}$ 이다.

가정 2로부터 식 (28)에서  $R_{\Phi\Phi}(k)$ 는 주대각 성분을 제외한 나머지 성분들이 모두 영인 대각행렬이며,  $j$ 번째 주대각 성분  $R_{(j,j)}(k)$ 는 식 (22)의 결과를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{(j,j)}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\}$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} R_{\Phi_{ij}\Phi_{ij}}(k) = \sigma_u^2 I_{N_s} \quad (29)$$

여기서  $\sigma_u^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_{M-1}^2$ .

식 (29)로부터  $R_{\Phi\Phi}(k) = \sigma_u^2 I$ 이므로 식 (26)의 MSE는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J(k) = \sigma_u^2 \text{tr}[\mathbf{K}(k)] + E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} \quad (30)$$

$\text{tr}[\mathbf{K}(k)]$ 을 구하기 위하여 식 (16)으로부터 계수오차 벡터의 상관행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & E\{v(k+1)v^T(k+1)\} \\ &= E\{(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k) \\ & \quad \times v(k)v^T(k)(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \quad + \mu E\{(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k) \\ & \quad \times v(k)\zeta^T(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \quad + \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\zeta(k)v^T(k) \\ & \quad \times (I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \quad + \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\zeta(k)\zeta^T(k) \\ & \quad \times [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (31)$$

가정 3 :

부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력행렬  $\Phi(k)$ 와  $\zeta(k)$ 는 통계적으로 독립이다.

가정 3로부터 식 (31)의 우측변 마지막 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\zeta(k)\zeta^T(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ &= \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\} \\ & \quad \times [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)에서  $E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\}$ 는  $M \times M$  행렬로서 식 (15)에서와 같이  $z(n)$ 의 부밴드 분해 후 ( $\downarrow M$ )에 의해 다운 샘플링(down sampling)된 성분  $z_i(k)$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\} &= [z_0(k) \ z_1(k) \ \dots \ z_{M-1}(k)]^T \\ & \quad \times [z_0(k) \ z_1(k) \ \dots \ z_{M-1}(k)] \end{aligned} \quad (33)$$

식 (33)의 평가를 위해 다음과 같은 가정을 한다.

가정 4 :

$z_i(k)$ 와  $z_j(k)$ 는  $i \neq j$ 에 대해 확률적으로 직교이고

각 부밴드에서의  $E\{z_i^2(k)\}$ 는  $i \neq j$ 에 대해  $E\{z_i^2(k)\} = E\{z_j^2(k)\}$ 이며  $E\{z_i^2(k)\} = \frac{1}{M}\sigma_z^2$  (for  $i=0, \dots, M-1$ )이다.

가정 4로부터  $E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\}$ 는 대각성분을 제외하고 모두 0이 되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\} = \frac{\sigma_z^2}{M} I_M \quad (34)$$

식 (20) ~ 식 (23) 그리고 식 (34)의 결과를 사용하여 식 (31)의 마지막 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu^2 E\{\Phi(k)E\{\Phi^T(k)\Phi(k)\}^{-1}E\{\zeta(k)\zeta^T(k)\} \\ & \quad \times E\{\Phi^T(k)\Phi(k)\}^{-1}\Phi^T(k)\} \\ &= \mu^2 \frac{\sigma_z^2}{M^3 N_s^2} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} I \end{aligned} \quad (35)$$

식 (31)의 두 번째 항은 가정 2과 가정 3을 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu E\{(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k) \\ & \quad \times v(k)\zeta^T(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ &= \mu E\{(I - \mu\Phi(k))E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \quad \times E\{v(k)\zeta^T(k)\}E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\}E\{\Phi^T(k)\}\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 가정 2에 의해  $E\{\Phi(k)\} = 0$ 이다. 또한 식 (24)의 결과로부터 식 (31)의 우측변 두 번째 항과 세 번째 항은 제거가 가능하다.

식 (31)의 첫 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & E\{(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k) \\ & \quad \times v(k)v^T(k)(I - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ &= E\{v(k)v^T(k)\} - \mu E\{v(k)v^T(k)\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \quad - \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)v(k)v^T(k)\} \\ & \quad + \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)v(k)v^T(k)\Phi(k) \\ & \quad \times [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (37)$$

식 (37)의 첫 번째 항은  $E\{v(k)v^T(k)\} = \mathbf{K}(n)$ 이고 두 번째 항과 세 번째 항은 가정 2과 식 (23)의 결과에 의해 각각  $\frac{\mu}{N_s}\mathbf{K}(k)$ 임을 알 수 있다.

식 (37)의 마지막 항은 랜덤변수 (random variable)의 고차 통계 (high order statistics)를 포함하고 있으며

로 2차 모멘트(second moment) 계산을 통해 상관성(correlation property)을 확인하기 쉽지 않다. 이를 해석하기 위해 식 (17) ~ 식 (23)에서 사용했던 근사방법을 적용하면 식 (37)의 마지막 항은 다음과 같이 쓸 수 있다 (자세한 증명은 Appendix 참조).

$$\begin{aligned} & \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)v(k)v^T(k)\Phi(k) \\ & \quad \times [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & = \frac{\mu^2}{N_s^2} \text{tr}[\mathbf{K}(k)]\mathbf{I} \end{aligned} \quad (38)$$

위의 결과들로부터 식 (31)은 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{K}(k) - 2\alpha\mu\mathbf{K}(k) + \beta\mu^2\text{tr}[\mathbf{K}(k)]\mathbf{I} + \tau\mu^2\mathbf{I} \quad (39)$$

$$\text{여기서 } \alpha = \frac{1}{N_s}, \beta = \frac{1}{N_s^2}, \tau = \frac{\sigma_z^2}{M^3 N_s^2} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

식 (39)에 대각합(trace)을 취하고 정리하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{tr}[\mathbf{K}(k+1)] = (1 - 2\alpha\mu + N\beta\mu^2)\text{tr}[\mathbf{K}(k)] + N\tau\mu^2 \quad (40)$$

식 (40)은 간단한 연산에 의해 다음과 같이  $\text{tr}[\mathbf{K}(k)]$ 으로 정리할 수 있다.

$$\text{tr}[\mathbf{K}(k)] = \psi^k \text{tr}[\mathbf{K}(0)] + N\tau\mu^2 \sum_{l=0}^{k-1} \psi^l \quad (41)$$

여기서  $\psi = 1 - 2\alpha\mu + N\beta\mu^2$ 이고  $\text{tr}[\mathbf{K}(0)] = v^T(0)v(0)$ 이다.

식 (30)에서  $E\{\zeta^T(k)\zeta(k)\} = \sigma_z^2$ 이므로 식 (30)에 위의 결과를 대입하면 MPDSAP의 MSE를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathcal{J}(k) = \sigma_u^2 \psi^k \text{tr}[\mathbf{K}(0)] + N\tau\sigma_u^2 \mu^2 \sum_{l=0}^{k-1} \psi^l + \sigma_z^2 \quad (42)$$

정상상태에서 MPDSAP 적응필터의 MSE를 구하기 위해  $k \rightarrow \infty$ 일 때의 극한 개념을 도입하면 식 (30)은 다음과 같이 된다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(k) = \sigma_u^2 \text{tr}[\mathbf{K}_\infty] + \sigma_z^2 \quad (43)$$

식 (43)의  $\text{tr}[\mathbf{K}_\infty]$ 을 구하기 위해 식 (39)에  $k \rightarrow \infty$ 일 때의 극한 개념을 적용하면  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_\infty$ 이므로 대각합을 적용하여 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\text{tr}[\mathbf{K}_\infty] = \frac{\mu\sigma_z^2}{M^2(2-\mu M)} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (44)$$

식 (44)의 결과를 사용하여 식 (43)을 다시 쓰면

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(k) = \left(1 + \frac{\mu\sigma_u^2}{M^2(2-\mu M)} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2}\right) \sigma_z^2 \quad (45)$$

식 (42)가 수렴할 조건은  $|\psi| < 1$ 이므로 적응이득 파라미터의 범위는  $0 < \mu < 2/M$ 이다. 이때  $M \geq 2$ 이므로  $0 < \mu < 1$ 이다.  $\mathcal{J}(k)$ 는  $\psi^k$ 의 함수이므로  $\psi$ 가 작을수록 수렴속도는 증가한다.  $\mu$ 가  $1/M$ 에 가까운 값일 경우, OAF에 의해 각각의 부밴드 입력신호의 에너지 비가 1에 가까울수록 적응필터가 수렴하였을 때 즉, 정상상태에서 식 (45)로부터 MSE는 부밴드 수  $M$ 이 증가할수록 감소하게 된다. 그러나 각각의 부밴드 입력신호의 에너지 비가 1보다 클수록 식 (45)의  $\sum_{i=0}^{M-1} 1/\sigma_i^2$ 로부터 부밴드 수  $M$ 이 증가할수록 MSE는 증가하게 된다. 반면  $\mu$ 가 작을수록 식 (45)의 우측변 두 번째 항은 무시될 수 있으므로 최소자승오차  $\sigma_z^2$ 에 접근하게 됨을 알 수 있다.

### V. Simulations

이 장에서는 시스템 식별모델을 고려한 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 앞장에서 해석한 결과의 유효성을 확인하였다. 미지시스템은 그림 3의 임펄스 응답을 갖는 차량 내에서 측정된 반향경로를 길이  $N$ 으로 잘라서 사용

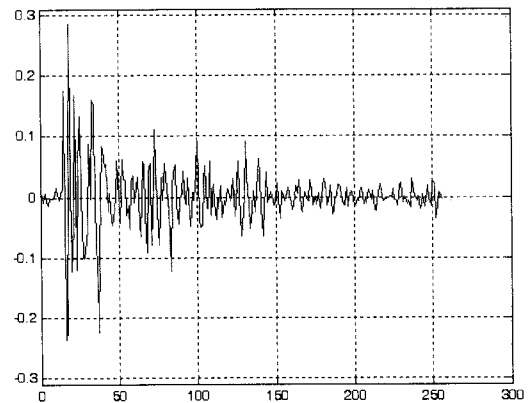


그림 3. 미지시스템의 임펄스응답  
Fig. 3. Impulse responses of the unknown system.

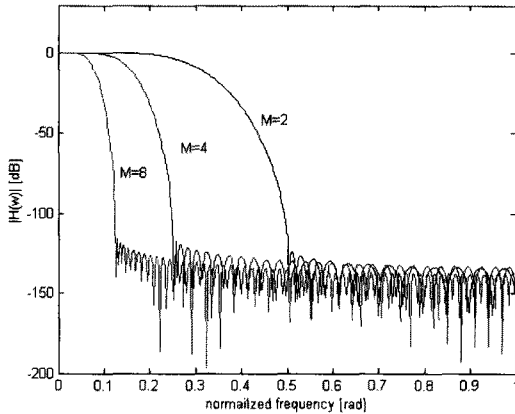


그림 4. Prototype filter의 주파수 응답  
 Fig. 4. Frequency responses of the prototype filters. ( $M = 2, M = 4, M = 8$ )

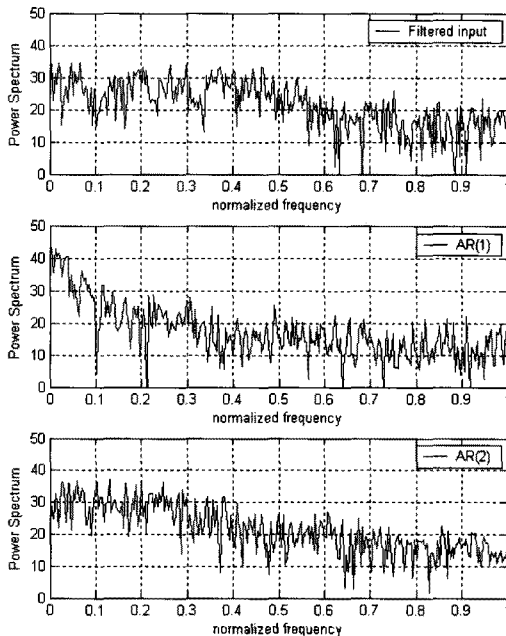


그림 5. 시뮬레이션을 위한 유색 입력신호의 스펙트럼  
 Fig. 5. Spectrums of colored input signals for simulations.

하였다. 알 수 있다. 부밴드 분해를 위해 사용한 정규직 교필터는 그림 4와 같은 원형필터 (prototype filter)의 주파수 응답을 갖는 여현변조필터뱅크 (cosine modulated filter banks)<sup>[3]</sup>를 사용한다. 입력신호로 가정과 유사하도록 각 부밴드에서 평탄한 스펙트럼을 가질 수 있도록 평균이 0인 백색 가우시안 랜덤 프로세스를  $H(z) = 1 + 0.6713z^{-1} - 0.3407z^{-2}$ 의 전달함수를 갖는 FIR 필터를 통과시켜 얻은 임의의 신호를 사용하였고

실제 응용에서의 입력신호 환경을 고려하여 계수  $a = [0.9]^T$ 와  $a = [0.95 - .035]^T$ 를 갖는 AR(1)와 AR(2) 프로세스를 사용하였다.  $\sigma_f^2$ 는  $\sigma_u^2 = 1$ 이 되도록 조정하였고 모든 실험에서 신호대잡음비 (signal-to-noise ratio, SNR)는  $SNR = 10\log_{10}(\sigma_u^2/\sigma_z^2)$  dB로 주어진다. 그림 5는 시뮬레이션에서 입력으로 사용된 FIR 필터  $H(z)$ 를 통과한 신호, 그리고 AR(1)과 AR(2) 프로세스의 스펙트럼을 나타내고 있다. FIR 필터를 통과한 신호와 AR(2) 프로세스의 스펙트럼은 AR(1)에 비해 각 부밴드에서 평탄한 스펙트럼을 갖는다. 반면 AR(1) 프로세스는 특정 부밴드에 에너지 분포가 높은 협대역 (narrow band) 유색신호이다.

그림 6~그림 8은 그림 5의 스펙트럼을 갖는 입력신호들에 대한  $M=2, 4, 8$  MPDSAP의 이론적 MSE (theoretical MSE)와 실험적 MSE (simulated MSE)를 나타낸다. 미지시스템의 시스템 파라미터로 그림 3의 임펄스 응답을  $N=64$ 로 잘라서 사용하였다.

MPDSAP 알고리즘에서 적응이득 파라미터는  $\mu = 0.1/M$ 을 사용하였다. 그림 5로부터 그림 6과 그림 8에서 사용된 입력신호는 부밴드 필터링에 의한 사전백색화가 충분히 이루어질 수 있으므로 이론적 MSE와 실험적 MSE는 일치하며 새로운 해석모델을 이용하여 MPDSAP 알고리즘의 수렴성능에 대한 정확한 예측이 가능함을 알 수 있다. 그림 7은 협대역 신호인 AR(1)을 입력에 대한 MSE이다. 결과에서 이론적 MSE와 실험적 MSE와의 차이가 발생하나 부밴드 수  $M$ 이 증가함에 따라 그 차이가 줄어들을 볼 수 있다. 또한 적응 초

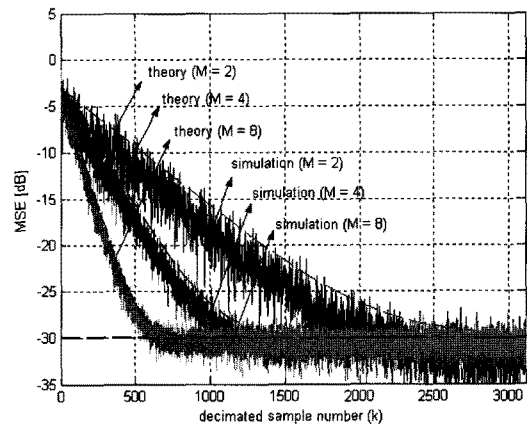


그림 6. MSE curves  
 Fig. 6. MSE curves. (input = the filtered signal by  $H(z)$ ,  $N = 64$ ,  $\mu = 0.1/M$ , SNR = 30dB)



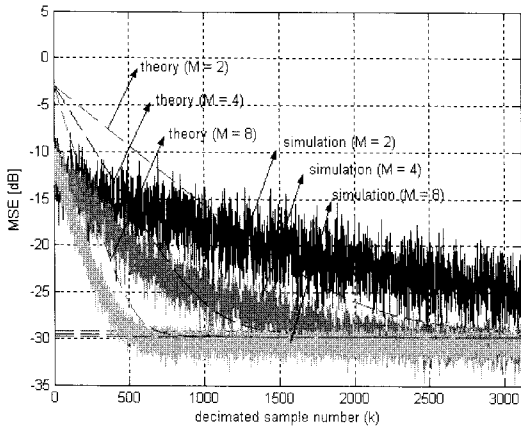


그림 7. MSE curves  
 Fig. 7. MSE curves (input = AR(1) with  $a = [0.9]^T$ ,  $N = 64$ ,  $\mu = 0.1/M$ , SNR = 30dB).

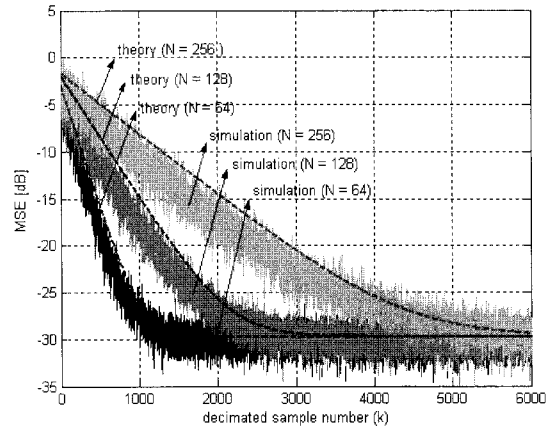


그림 10. MPDSAP 적응필터 길이 별 MSE curves  
 Fig. 10. MSE curves for the different length of the MPDSAP adaptive filter (Input = AR(2) with  $a = [0.95 - .035]^T$ ,  $N = 64, 128, 256$ ,  $\mu = 0.1/M$ , SNR = 30dB).

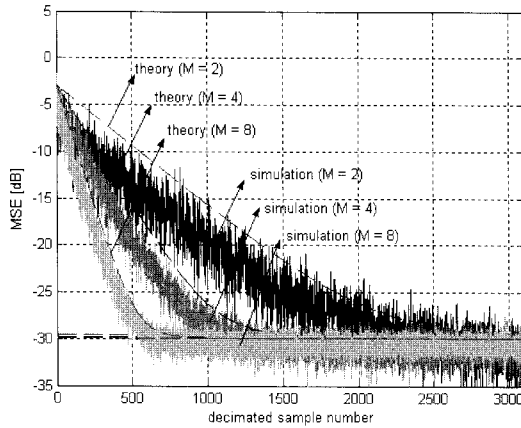


그림 8. MSE curves  
 Fig. 8. MSE curves (input = AR(2) with  $a = [0.95 - .035]^T$ ,  $N = 64$ ,  $\mu = 0.1/M$ , SNR = 30dB).

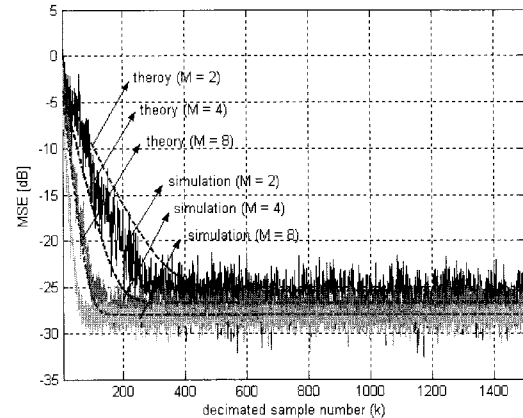


그림 11. 부밴드 수 별 MSE curves  
 Fig. 11. MSE curves for the different number of subbands (Input = AR(2) with  $a = [0.95 - .035]^T$ ,  $M = 2, 4, 8$ ,  $\mu = 1/M$ , SNR = 30dB).

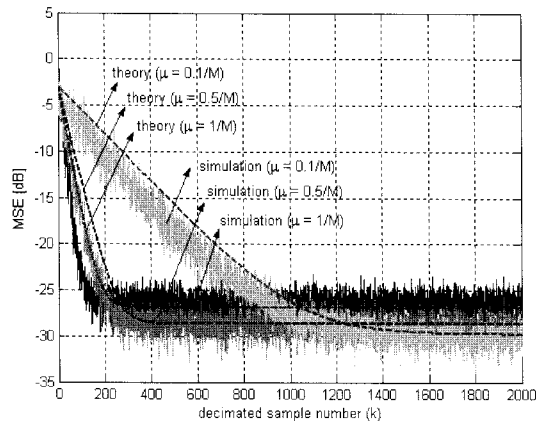


그림 9. M = 4 MPDSAP 알고리즘의 서로 다른 적응이득파라미터 별 MSE  
 Fig. 9. MSE curves for the different adaptive gain parameters ( $M = 4$ , input signal : AR(2) with  $a = [0.95 - .035]^T$ ,  $N = 64$ ,  $\mu = 1/M, 0.5/M$ , and  $0.1/M$ , SNR = 30dB).

기의 MSE 레벨 (level)의 차이는 대부분의 에너지가 특정 부밴드에 분포함에 따라 발생하게 된다. 그림 9와 그림 10은 각각  $M=4$  MPDSAP 알고리즘의 적응이득 파라미터 별 MSE와 적응필터 길이 별 MSE이다. 그림 9에서 적응이득 파라미터가 증가할수록 이론적 MSE와 실험적 MSE의 차이가 발생하지만  $\mu \leq 0.5/M$ 에 대해서는 이론적 MSE와 실험적 MSE는 매우 유사함을 알 수 있다. 그림 10에서 적응필터 길이가 증가함에 따라 MPDSAP 알고리즘의 수렴속도는 감소하며 적응필터의 길이  $N$ 에 상관없이 이론적 MSE는 실험적 MSE를 정확히 해석함을 알 수 있다. 그림 11은 부밴드 수  $M=2, 4, 8$ 에 대한 MPDSAP 알고리즘의 MSE를 나타

낸다. 사용한 적응이득 파라미터는  $\mu = 1/M$ 이며 입력 신호는 AR(2), SNR = 30dB이다.  $\mu$ 가  $1/M$ 에 가까운 값일 때 부밴드 수  $M$ 이 증가할수록 MSE는 감소하게 됨을 확인할 수 있다.

## VI. 결 론

본 논문은 최대 다위상 분해된 부밴드 인접투사 (MPDSAP) 알고리즘의 수렴거동에 대한 벡터 및 행렬 기반의 통계적 해석을 제시하였다. MPDSAP 알고리즘은 정규직교분해필터(OAF)를 사용하는 부밴드 구조에서 AR( $q$ ) 입력과 임의의 적응이득 파라미터를 갖도록 하였다. OAF를 이용한 부밴드 구조에서 AR( $q$ ) 입력의 사전-백색화 (pre-whitening)는 MPDSAP 적응필터의 MSE 행동의 통계적 해석을 위한 간단하고 유효한 근사화를 제공한다. 해석 결과에서 큰 스텝사이즈를 사용할 경우( $\mu = 1/M$ ), 부밴드 수의 증가는 수렴속도 및 정상상태 오차성능을 개선한다. 반면 작은 스텝사이즈를 사용할 경우 ( $\mu \ll 1/M$ ) 부밴드 수에 상관없이 정상상태 오차는 최소자승오차  $\sigma_2^2$ 에 접근하며 부밴드 수가 증가함에 따라 수렴성능은 개선된다. 또한 적응이득 파라미터의 범위가  $0 < \mu < 2/M$ 이며 수렴성능 향상을 위해 수렴상태에 따른  $\mu$ 의 조정이 필요함을 유추할 수 있다.

## Appendix

식 (37)의 마지막 항에서 가정 2로부터 각각의 다위상 성분은 서로 확률적으로 직교이므로  $M$ 이 증가할수록  $\Phi(k)$ 의 성분들과  $E\{\Phi^T(k)\Phi(k)\}^{-1}$ 의 성분들의 종속성이 감소한다. 따라서 대각행렬  $\Lambda^{-1}(k)$ 을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>[6]</sup>.

$$\begin{aligned} & \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)v(k)v^T(k)\Phi(k) \\ & \quad \times [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ & \approx \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\{\Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)v(k)v^T(k)\Phi(k) \\ & \quad \times \Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)\} \\ & = \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\{tr[\Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)v(k)v^T(k)]\Phi(k) \\ & \quad \times \Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (A1)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(k) &= \Lambda_\sigma^{-1}(k)\Lambda_\sigma^{-1}(k) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_{M-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_{M-1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A2)$$

식 (A2)에서  $\Lambda^{-1}(k)$ 의 대각성분  $1/\sigma_i^2$ 의 분모는 식 (19)과 같이 해당 부밴드의 다위상 성분들에 대한 전력 합에 관련된다. 따라서 식 (A1)은  $\Gamma(k) = \Phi(k)\Lambda_\sigma^{-1}(k)$ 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\{tr[\Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)v(k)v^T(k)] \\ & \quad \times \Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)\} \\ & = \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\{tr[\Gamma(k)\Gamma^T(k)v(k)v^T(k)] \\ & \quad \times \Gamma(k)\Gamma^T(k)\} \end{aligned} \quad (A3)$$

식 (A3)의 ( $l, m$ )번째 성분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\left[\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(q)}(k)v_{(q)}(k)v_{(p)}(k)\right] \gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\right\} \\ & = \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(q)}(k)E\{v_{(q)}(k)v_{(p)}(k)\}\right\} \\ & \quad \times E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \end{aligned} \quad (A4)$$

여기서  $\gamma_{(l)}(k)$ 는  $\Gamma(k)$ 의  $l$ 번째 행 성분들(row elements)로 구성된  $M \times 1$  열벡터(column vector)을 의미하고  $\gamma_{(m)}(k)$ 은  $\Gamma^T(k)$ 의  $m$ 번째 열 성분들(column elements)로 구성된  $M \times 1$  열벡터(column vector)를 의미한다. 그리고  $v_{(p)}(k)$ 는  $v(k)$ 의  $p$ 번째 성분이다.

식 (A4)의 우측 변을  $l=m$ 과  $l \neq m$ 의 항으로 구분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E\{v_{(p)}^2(k)\}\right\} E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \\ & \quad + \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq p}}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(q)}(k)E\{v_{(q)}(k)v_{(p)}(k)\}\right\} \\ & \quad \times E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \end{aligned} \quad (A5)$$

식 (A2)로부터  $p \neq q$ 에 대해  $E\{\gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(q)}(k)\} = 0$ 이므

로 식 (A3)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\{tr[\Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)v(k)v^T(k) \\ & \quad \times \Phi(k)\Lambda^{-1}(k)\Phi^T(k)]\} \\ &= \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E\{v_{(p)}^2(k)\}\right\} \\ & \quad \times E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \end{aligned} \quad (A6)$$

식 (A6)에서  $v(k)$ 의 통계적 분포 (statistical distribution)를 알 수 없으므로  $v_{(l)}(k)$ , (for  $l=0, \dots, N-1$ )의 모든 성분의 평균 (mean)의 변동 (fluctuations)이 모두 같다 (즉, 분산이 모두 같다)고 가정하면  $E\{v_{(p)}^2(k)\}$ 는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{v_{(p)}^2(k)\} &= E^2\{v_{(p)}(k)\} + \sigma_{v_{(p)}(k)}^2 \\ &\approx E^2\{v_{(p)}(k)\} + \frac{tr[\mathcal{C}(k)]}{N} \end{aligned} \quad (A7)$$

여기에서  $\mathcal{C}(k)$ 는  $v(k)$ 의 공분산 행렬 (covariance matrix)이며 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(k) &= E\{[v(k) - E\{v(k)\}][v^T(k) - E\{v^T(k)\}]\} \\ &= E\{v(k)v^T(k)\} - E\{v(k)\}E\{v^T(k)\} \\ &= \mathbf{K}(k) - E\{v(k)\}E\{v^T(k)\} \end{aligned} \quad (A8)$$

이 결과를 식 (A7)에 적용하여 정리하면

$$\begin{aligned} E\{v_{(p)}^2(k)\} &= \frac{1}{N} [tr[\mathbf{K}(k)] - E\{v^T(k)\}E\{v(k)\}] \\ & \quad + E^2\{v_{(p)}(k)\} \end{aligned} \quad (A9)$$

이 결과를 사용하여 식 (A6)의 우측변을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E\{v_{(p)}^2(k)\}\right\} E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \\ &= \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\frac{1}{N} [tr[\mathbf{K}(k)] - E\{v^T(k)\}E\{v(k)\}] \right. \\ & \quad \times \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k) + \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E\{v_{(p)}^2(k)\} \\ & \quad \left. \times E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\}\right\} \\ &= \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} \left\{\frac{1}{N} [tr[\mathbf{K}(k)] - E\{v^T(k)\}E\{v(k)\}] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \times tr[E\{\Gamma(k)\Gamma^T(k)\}] + E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E^2\{v_{(p)}(k)\}\right\}\right\} \\ & \quad \times E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \end{aligned} \quad (A10)$$

$\gamma(k)$ 가 통계적으로 정제적 (stationary)인 랜덤 프로세스이고 식 (19)~식 (23)으로부터  $E\{\gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)\}=M$  (for  $k=0, \dots, N-1$ )이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$tr[E\{\Gamma(k)\Gamma^T(k)\}] = NM \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} & E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E^2\{v_{(p)}(k)\}\right\} \\ &= ME\{v^T(k)\}E\{v(k)\} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} = M \quad (A13)$$

식 (A10)~식 (A13)의 결과를 사용하여 식 (A6)을 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{(MN_s)^2} E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p)}^T(k)\gamma_{(p)}(k)E\{v_{(p)}^2(k)\}\right\} E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\} \\ &= \frac{\mu^2}{N_s^2} tr[\mathbf{K}(k)] \end{aligned} \quad (A14)$$

식 (A13)에서  $E\{\gamma_{(l)}^T(k)\gamma_{(m)}(k)\}$ 는  $E\{\Gamma(k)\Gamma^T(k)\}=MI$ 의  $(l, m)$ 번째 성분이므로 식 (A14)의 결과를 사용하여 식 (38)과 같이 쓸 수 있다.

## 참고 문헌

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th Ed., NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [2] K. Ozeki and T. Umeda, "An Adaptive Filtering Algorithm using an Orthogonal Projection to an Affine Subspace and Its Properties," *Electron. Comm. Jap.*, vol 67-A, no. 5, pp. 19-27, 1984.
- [3] P. P. Vaidyanathan, *Multirate System and Filter Banks*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [4] S. S. Pradhan and V. U. Reddy, "A new approach to subband adaptive filtering", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 45, no. 3, pp. 655-664, Mar. 1999.
- [5] H. Choi and H. D. Bae, "Subband affine projection algorithm for acoustic echo cancellation system," *Eurasip Jour. on ASP*, vol. 2007, Article ID 75621, doi: 10.1155/2007/75621, 2007.
- [6] M. Rupp, "A family of adaptive filter algorithms

with decorrelating properties," IEEE Trans. Signal Proc., vol. 46, pp. 771-775, Mar. 1998.

- [7] S. M. Almeida, and et. al., "A statistical analysis of the affine projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs," IEEE Trans. on Circuits and Systems I, vol. 52. no. 7, July 2005.

---

저 자 소 개

---



최 훈(평생회원)

1996년 충북대학교 전자공학과  
학사 졸업.

1995년~1998년 LG반도체

2001년 충북대학교 전자공학과  
석사 졸업.

2006년 충북대학교 전자공학과  
박사 졸업.

2008년~현재 동의대학교 전자공학과 전임강사  
<주관심분야 : 적응신호처리, 멀티레이트 신호처  
리, 음향 신호처리, 신호처리 알고리즘 실현>



배 현 덕(평생회원)

1977년 한양대학교 전자공학과  
학사 졸업.

1980년 서울대학교 전자공학과  
석사 졸업.

1992년 서울대학교 전자공학과  
박사 졸업.

1987년 3월~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터  
공학부 교수

<주관심분야 : 적응신호처리, 멀티레이트 신호처  
리, 음향 신호처리, 신호처리 알고리즘 실현>