대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 4, 479-491. Nov 2009

영재교육에서 유추를 통한 데카르트 정리의 도입가능성 고찰

최 남 광* · 유 희 찬**

본 논문은 중등 수학영재를 위한 심화학습 주제로서 데카르트 정리의 도입가능성을 고찰하였다. 데카르트 정리는 오일러 정리와 논리적으로 동치관계가 성립할 뿐 아니라, 미분기하의 중요개념인 가우스-보네 정리와도 위계적으로 연결되고 있어 수학적 측면에서 그 가치가 높다. 수학교육적 측면에서도 데카르트 정리는 '다각형의 외각의 합은 360˚이다'라는 평면기하적 성질을 유추적 사고과정을 통해 입체기하적 성질로 일반화하여 지도될 수 있는 주제이다. 이 논문에서는 데카르트 정리의 도입을 위한 방법으로서 엄밀한 증명방법이 아닌 유추적 사고를 통해 재발명할 수 있는 대안적인 방법을 소개하였다.

Ⅰ. 서 론

유추(類推)란 부분적인 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 관계 체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계 체계를 추측하게 하며, 부분적인 닮음을 근거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추론을 말한다(우정호, 1998). 수학적 사고도구로서의 유추의 중요성을 그리스시대 이래 많은 철학자, 과학자, 수학자, 수학교육자들에 의해 강조되어 왔다. Dreyfus와 Eisenberg는 수학적 사고능력의 개발에 있어 가장 중요한 것이 유추라고 하였으며, English와 Halford는 인간의 인지활동에서 매우 중요한 역할을 수행하는 유추를 수학 학습에서도 중요한 의미가 있다고 보았다(이승우, 우정호, 2002에서 재인용). Polya도 유추는 문제해결과 수학적 발견과정에서의 강력한 사고도구라고 하였으며, Kepler의 다음과 같은 말을 인용하면서 개연적 추론으로서의 유추를 강조하였다(우정호, 1998, 2000에서 재인용).

> 나는 그 밖의 다른 어떤 것보다도 나의 가장 신용할 만한 주인인 유추를 소중하게 여긴다. 유추는 자연의 모든 신비를 알고 있으므로 기하에서도 조금도 등한시되어서는 안된다.

역사적으로 이러한 유추적 사고를 통해 다면체의 중요한 성질을 처음으로 발견한 이는 바로 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)였다. 그는 평면도형에서 다각형의 외각의 합이 360˚라는 사실에서부터 입체도형에서 다면체의 외각의 합도 그와 유사한 성질이 성립함을 유추하였다. 그 이전의 다면체에 대한 연구들은 특정 다면체에서만 성립하거나 구체적 예에 한정된 연구였지만 데카르트는 처음으로 일반적인 원리로서 다면체의 성질을 연구한 수학자였다.

* 한국교원대학교 대학원, dclick21@hanmail.net
** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr

하지만, 그의 정리는 논리적으로 동치관계가 성립하면서도 데카르트보다 후대시대의 수학자였던 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)에 의해 다면체에 관한 오일러 정리라는 이름으로 더 많이 세상에 알려져 있다. 현재의 수학교육과정에서도 오일러 정리는 다루고 있는 반면, 데카르트 정리는 다루어지지 않고 있으며, 그 내용을 알고 있는 수학교사들 조차 매우 드물다. 오일러가 '쾨니히스부르그의 다리 건너기 문제' 라는 유명한 문제를 해결하면서 새로운 수학의 한 분야인 위상수학을 개척하였고, 오일러 정리가 위상 불변적 성질로서 수학적으로 매우 중요한 내용이라는 점에서 수학교육적 측면에서도 높은 가치가 인정되는 것이 사실이다. 하지만, 데카르트 정리도 곡면기하학이나 곡률(curvature)과 측지선(geodesic)을 중심으로 다루는 미분기하학, 특히 전곡률에 관한 가우스-보네 정리(Gauss-Bonnet Theorem)와 위계적으로 연결되고 있어 수학적으로 가치가 높다. 수학교육적 측면에서도 '다각형의 외각의 합은 항상 360°이다'라는 평면기하적 성질을 학습자의 유추적 사고능력을 자극하여 입체기하의 성질로 확장 및 일반화하여 교수-학습활동이 가능한 수학적 내용임에도 불구하고 이러한 교육적 활동이 전혀 이뤄지지 않는 현실은 매우 아쉬운 일이다.

따라서, 본 글에서는 중등영재들을 위한 심화학습 주제로 데카르트 정리의 도입가능성에 대해서 구체적으로 살펴보고자 한다. 이를 위하여 먼저 유추적 사고과정을 통해 데카르트 정리를 살펴본 후, 오일러 정리와의 논리적 관계성, 그리고 가우스-보네 정리와의 위계적인 연계성 측면을 통해 데카르트 정리의 수학적 가치를 고찰할 것이다. 또한 교육방법적 측면에서는 어떠한 방법으로 데카르트 정리를 도입하는 것이 수학영재들의 유추적 사고능력을 자극하고, 대 수학자였던 데카르트 자신이 경험했던 사고의 경험과 유사한 경험을 수학영재들도 경험하면서 수학을 재발명할 수 있을지에 대한 교육방법적 시사점을 제시해 줄 것으로 기대한다.

II. 유추적 사고를 통한 데카르트 정리의 이해

1650년 데카르트가 사망한지 210년 후인 1860년에 라이프니츠(Leibniz, G. ; 1646~1716)가 보관했던 데카르트의 연구물의 필사본이 세상에 알려지게 되었다. 이 필사본에는 입체기하와 다면체들에 대한 일반적인 방법의 정리와 성질들이 Progymnasmata de Solidorum Elementis 라고 불리는 논문집에 실려 있었는데 다음과 같은 내용도 함께 포함되어 있다.[1)]

> 입체직각(solid right angle)에는 구(sphere)를 1/8 등분했을 때 해당되는 영역도 포함한다. 비록 입체직각을 세 개의 평면직각에 의해 형성된다고 말할 수는 없지만......(생략) <u>평면도형에서 모든 외각의 합이 4 직각인 것처럼, 입체도형에서 모든 외각의 합을 합하면 8 입체직각과 같다.</u>

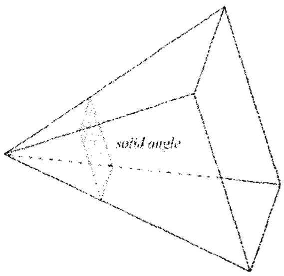
밑줄 친 부분이 바로 오일러 정리와 동형으로 간주되는 데카르트 정리의 내용이다. 그런데, 그가 언급한 입체도형에서의 외각은 무엇을 의미하는 것일까? 또한 평면도형에서의 다각형의 외각과는 어떻게 연결될 수 있을까? 이러한 질문들에 답을 찾기 위해 먼저 입체각(solid angle)의 개념을 자세히 살펴볼 필요가 있다. 유클리드의 <원론>제 XI권에 의하면, 입체각이란 한 평면에 놓여있지 않는 서로 다른 세 평면 이상이 한 점에서 만나게 될 때 생기는 공간영역을 의미한다([그림 II-1] 참조). 또한 구면기하 입장에서 설명하면 입체각은 구의 표면적으

1) Cromwell, P(1997). Polyhedra, Cambridge University Press. pp181~pp217.

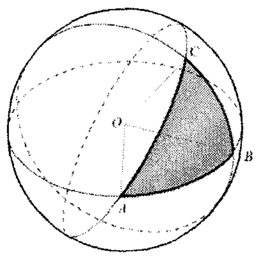
로 표현된다. 즉, 평면의 원에서 반지름의 길이가 1일 때, 호의 길이도 함께 1이 될 때의 각을 1 라디안(radian)으로 정의하듯, 입체의 구에서 구의 반지름의 길이가 1일 때, 구의 표면적(넓이)이 함께 1이 될 때를 1 스테라디안(steradian)이라는 단위로 입체각을 나타낸다. 예를 들어 반지름이 1인 구에서 임의의 세 대원(great circle)의 호가 서로 교차 되도록 구면삼각형 △ABC를 만들면 바로 이 구면삼각형의 표면적이 곧 입체각이다([그림Ⅱ-2] 참조).

반지름이 1인 구를 1/8 등분해서 만든 특별한 입체각을 상상해보자. 이 입체각은 앞의 데카르트의 필사본에 언급된 입체직각(solid right angle)과 같다. 이 각은 면각들이 모두 수직일 뿐 아니라 면과 면이 이루는 각인 이면각(dihedral angle)도 수직이다. 구의 전체 표면적(4π)의 1/8에 해당하므로, 표면적이 쉽게 $\pi/2$라는 것도 확인할 수 있다.

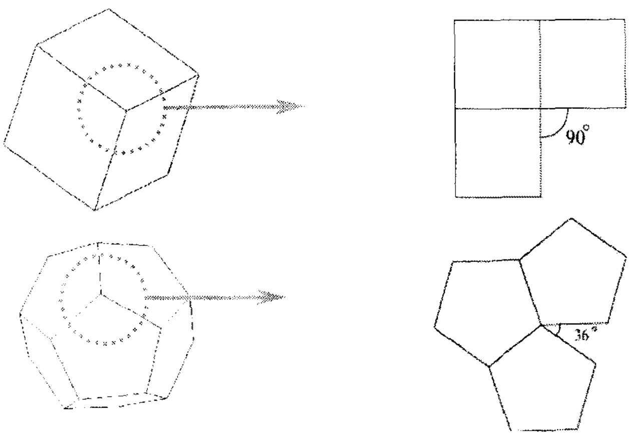
입체직각은 표면적이 $\pi/2$가 되는 구면삼각형이 무따라서 이 입체직각은 평면직각과 매우 유사해 보인다. 그러나 평면직각은 유일하게 존재하지만 수히 많이 존재하므로 유일한 것은 아니다. 이러한 이유로 필사본에는 "비록 입체직각을 세 개의 평면직각에 의해 형성된다고 말 할 수는 없지만......"이라고 언급하고 있는 것이다. 하지만 그는 평면의 직각과 입체의 직각을 유추적으로 연결하고 싶었던 것 같다. 평면에서 "4 직각"은 곧 360° 인데, 이는 반지름이 1인 원을 한 바퀴 회전한 결과이므로 원주 전체의 길이가 바로 다각형의 외각의 합인 것처럼, 입체에서 "8 입체직각"은 곧 720° (혹은, 4π)인데, 이는 반지름이 1인 구에 존재하는 모든 구면삼각형들의 표면적(입체각)의 합이므로 구의 겉넓이가 바로 다면체의 외각의 합이 된다는 것을 의미한다. 그러므로 데카르트는 평면각과 입체각의 범위가



[그림Ⅱ-1] 입체각(solid angle)



[그림Ⅱ-2] 표면적 $\triangle ABC$ 가 곧 입체각이다



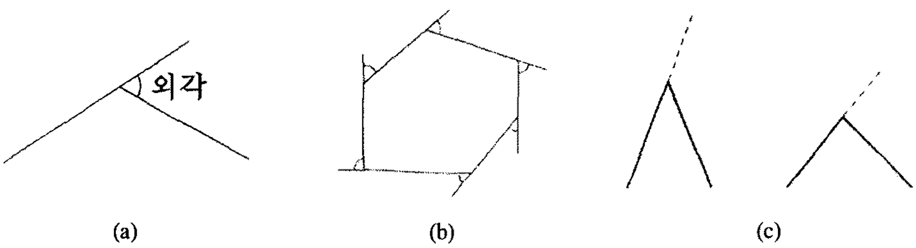
[그림Ⅱ-3] 정육면체와 정십이면체의 한 꼭짓점의 면각들의 합

각각$0 \leq$ (평면각) $\leq 2\pi$, $0 \leq$ (입체각) $\leq 4\pi$인데, 다각형의 외각의 합과 다면체의 외각의 합은 각각 그 범위의 최댓값인, 2π와 4π라는 사실을 유추적으로 연결하길 바랐다고 볼 수 있다.

유클리드는 입체각을 구성하는 모든 면각(face angle)들의 합은 언제나 360˚ 보다 작다는 것을 증명하였다([그림Ⅱ-3] 참조). 비록 유클리드는 입체각의 크기를 비교하거나 그 양을 정하는 것까지 고려하지는 못했지만, 입체각을 구성하는 결정적으로 중요한 요소를 언급하고 있는 셈이다. 즉, [그림Ⅱ-3]와 같이 정육면체와 정십이면체의 한 꼭짓점에서는 각각 3개의 정사각형과 3개의 정오각형이 모여서 입체각을 형성하고 있다. 이들을 한 꼭짓점에 모여 있는 면들만으로 전개도와 같이 펼쳤을 때, 정육면체의 한 꼭짓점에 모여 있는 면각들의 합은 $3\times90^\circ=270^\circ$ 이고, 정십이면체의 경우에는 $3\times108^\circ=324^\circ$ 이듯이 (유클리드가 증명한 내용처럼) 언제나 360˚ 보다 작다. 다시 말하면, 입체각을 형성하는 면각들의 합이 360˚ 보다 얼마나 작은가에 따라 입체각이 결정된다는 사실을 알 수 있다. 이렇게 360˚ 을 채우기 위해 필요한 각을 부족각(deficient angle)이라고 한다. 부족각은 입체각을 구성하는데 필수요소로서 다면체의 뾰족함의 정도(sharpness)를 결정하는 요인이라고 볼 수 있다. 즉, 일반적으로 부족각이 크면 다면체의 입체각은 뾰족해지고, 부족각이 작으면 반대로 무뎌지게 되므로, 부족각의 크기에 따라 입체각도 결정된다고 볼 수 있다.

이제 이러한 내용을 바탕으로 평면에서의 외각(exterior angle)과 연결시켜 보자. 외각은 두 개의 직선이 한 직선과 각각 다른 점에서 만나서 생기는 두 선의 바깥쪽의 각을 의미하며([그림Ⅱ-4(a)] 참조), 다각형에서 외각들의 합은 언제나 360˚ 이다([그림Ⅱ-4(b)] 참조). 이러한 평면의 외각도 [그림Ⅱ-4(c)]에서 보는 것처럼 외각의 크기에 따라 평면에서의 도형의 뾰족함이 결정된다고 볼 수 있다.

따라서 외각이 크면 평면각은 뾰족해지고 반대로 외각이 작으면 평면각은 무뎌진다. 이러한 결과를 입체각을 결정하는 부족각과 의미를 연결하면, 평면에서 외각은 결국 부족각과 동일한 개념으로 해석될 수 있다. 즉, 입체에서 부족각이 360˚ (평면)이 되기 위해 필요한 각이라면, 평면에서 외각은 180˚ (직선)이 되기 위해 필요한 각(즉, 평면의 부족각)을 의미한다고 볼 수 있다. 따라서 데카르트의 필사본에 언급된 '다각형의 외각'은 '평면에서의 부족각'으로, '입체도형의 외각'은 '입체에서의 부족각'이라는 의미로 각각 해석될 수 있다. 이러한 유추적 연결을 통해, 평면에서 다각형의 외각의 합이 언제나 360˚ 인 것처럼 입체에서 다면체의 외각의 합(즉, 부족각의 합) 역시 항상 어떤 특정의 값을 갖지 않을까 하는 유추적 사고로의 자연스러운 연결이 가능하게 된다. 이러한 유추적 사고를 통해 발견해 낸 결과가 다면체의 일반적인 성질인 '다면체의 외각의 합은 720˚ 이다'이며, 데카르트에 의해 최초로 언급되었기에 이 정리를 데카르트 정리(Descartes' theorem)라고 부르고 있다.



[그림Ⅱ-4] 외각(exterior angle)

Ⅲ. 데카르트 정리의 증명

유추적 사고를 통해 데카르트의 정리를 이해할 수 있었지만, 그의 필사본에는 엄밀한 증명이 빠져 있다. 다만 후대의 수학자들에 의해 정리가 증명되었는데, 이 절에서는 Cromwell(1997)의 저서 「Polyhedra」에 제시된 데카르트 정리의 증명을 소개하고자 한다.

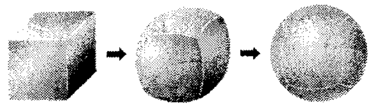
이 증명방법은 논리적인 엄밀성을 강조했다는 점에서 학생들의 유추적 사고능력을 자극하지는 못한다. 그럼에도 불구하고 이 증명방법을 소개하는 이유는 학생들의 유추적 사고능력을 자극할 수 있도록 필자가 고안한 대안적인 방법과 대비시키고자 함이다. 이러한 과정을 통해 데카르트 정리를 교육적 측면에서 학습자들에게 어떻게 도입할 수 있는지에 대한 방법적인 시사점을 줄 것으로 판단된다.

1. 데카르트 정리의 증명과 오일러 정리와의 관계

데카르트 정리의 증명을 위해서는 오일러 정리가 필요하다. 따라서 오일러 정리를 먼저 구면기하적 입장에서 증명할 필요가 있다. 이러한 과정은 데카르트 정리와 오일러 정리간의 관계를 이해하는 데도 도움이 된다. 7-나 단계의 수학교과서에 실린 그림에서부터 실마리를 찾아보자. [그림Ⅲ-1]은 7-나 단계 교과서(양승갑 외, 2002)의 내용 중 한 부분이다. 그림에서는 정육면체를 '부풀려서' 구의 형태로 만들고 있다. 이 때 구면 위의 선들은 변형전의 정육면체의 모서리들의 위치를 나타내는데, 이들의 꼭짓점, 모서리, 면의 수가 변형 전의 정육면체의 그것과 일치하다는 것을 보여준다.

즉, 이렇게 다면체를 구와 관련지어 다면체의 성질을 탐구할 수 있는 것은 다면체가 위상적으로 동형인 구에서도 오일러 수 $V-E+F=2$가 변하지 않는다는 위상적 성질에 바탕을 두고 탐구하고 있기 때문이다. 하지만 위상적 관점이 아닌 구면기하학적 관점에서 생각해 본다면, 데카르트의 정리를 오일러 정리와 서로 연결시킬 수가 있다.

찢어지지 않는 얇은 고무막으로 둘러싸인 정육면체를 부풀리면 구와 모양이 같아지게 할 수 있다.



마찬가지로, 원기둥, 원뿔, 각기둥, 각뿔 등도 적당히 부풀리면 구와 모양이 같아지게 할 수 있다.

앞쪽에서 조사하여 본 바와 같이 일반적으로 다음이 성립한다.

적당히 부풀려서 구와 모양이 같아지게 할 수 있는 다면체에서 꼭지점의 수를 v, 모서리의 수를 e, 변의 수를 f라고 하면

$$v-e+f=2$$

가 성립한다.

[그림Ⅲ-1] 구면체를 이용한 다면체 성질 탐구

1794년 르장드르(Legendre, A.M; 1752~1833)는 구면기하적 입장에서 최초로 오일러 정리를 엄밀한 방법으로 증명하였다. 모든 볼록다면체들은 [그림Ⅲ-1]의 정육면체처럼 구면위에 꼭짓점이 놓이도록 방사사영(radial projection)시킬 수 있다. 이제, 구의 반지름을 1로 생각해보자. 이때, 구의 겉넓이는 4π이며, 구의 겉넓이는 구면다각형의 넓이를 모두 더한 값이므로, 구의 겉넓이를 F개의 구면다각형으로 분할된다고 하면, 이때의 구의 겉넓이는

$$
\begin{aligned}
\text{구의겉넓이} &= 4\pi \\
&= \sum_F (\text{구면다각형의 면적}) \\
&= \sum_F \{(\text{구면다각형의 내각의 합}) - (\text{꼭지점의 수} - 2)\pi\} \cdots\cdots \text{㉠} \\
&= \sum_F (\text{구면다각형의 내각의 합}) - \sum_F (\text{꼭지점의 수})\pi + \sum_F 2\pi \\
&= 2\pi V - \sum_F (\text{꼭지점의 수})\pi + \sum_F 2\pi \cdots\cdots \text{㉡} \\
&= 2\pi V - 2E\pi + F2\pi = 2\pi(V-E+F) \cdots\cdots \text{㉢}
\end{aligned}
$$

이다. 여기서 식 ㉠은 구면다각형의 내각을 α_1; α_2; α_3; $\cdots$ α_n이라 하고, 반지름이 r인 구면n각형의 넓이 S는 $S=r^2\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n-(n-2)\pi\}$라는 Spherical Excess Formula에 의해 성립하고, 식 ㉡은 모든 구면각들의 합은 결국 한 꼭짓점에서

구면각들의 합(2π)과 전체 꼭짓점의 수(V)의 곱으로 나타낼 수 있는데, 그 이유는 한 꼭짓점에서의 구면각들의 합은 한 바퀴 회전한 원주각 2π와 같기 때문이다. 식 ㉢은 (꼭짓점의 수)×(면의 수)=$2E$이므로 성립한다. 위 결과에서 양변을 2π로 나누면 $V-E+F=2$ 이므로 오일러 정리가 성립하게 된다.

이번에는 데카르트 정리를 증명해 보자. 다면체의 면각들의 총합은 그 다면체의 모든 면(다각형)에서의 내각들의 합과 같다. n각형의 내각의 합 공식은 $(n-2)\pi$이므로,

다면체의 면각들의 합

$$=\sum_F(n\text{각형의 내각의 합})$$

$$=\sum_F\{(n-2)\pi\}$$

$$=2E\pi-F2\pi \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

이다. 한편, 부족각을 이용해 면각들의 합을 나타내면,

다면체의 면각들의 합

$$=\sum_V\{2\pi-(\text{부족각})\}$$

$$=\sum_V 2\pi-\sum_V(\text{부족각}) \quad \cdots\cdots \text{㉤}$$

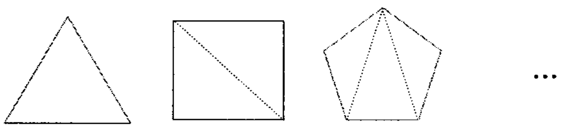
이다. 이때, ㉣과 ㉤의 같은 식이므로,

$$\sum_V(\text{부족각})=2\pi(V-E+F) \quad \cdots\cdots \text{㉥}$$

이 성립하므로 데카르트의 정리를 증명하게 된다. 식 ㉥에서 만약 오일러 정리가 성립하면, $V-E+F=2$ 이므로 식 ㉥의 우변은 4π가 된다. 따라서 $\sum_V(\text{부족각})=4\pi$ 가 되어 데카르트 정리가 성립하게 된다. 역으로, 데카르트 정리가 성립한다고 가정하면, 부족각의 합은 4π이므로, 식 ㉥에서 좌변은 4π가 된다. 따라서 양변을 2π로 나눠 정리하면, 결국 오일러의 공식 $V-E+F=2$ 를 얻게 된다. 이러한 결과는 곧 오일러 정리와 데카르트 정리가 서로 논리적으로 동치관계임을 의미한다. 만약 오일러 수가 $V-E+F=1$이라고 가정해보자. 이 경우에는 평면다각형을 의미하는데, 식 ㉥은 $\sum_V(\text{부족각})=2\pi$ 이므로, 결국 평면도형에서의 외각의 합이 항상 2π가 된다는 내용으로 특수화된다.

2. 유추를 자극할 수 있는 대안적인 데카르트 정리의 증명방법

앞에서 살펴 본 데카르트 정리의 증명은 데카르트 자신이 증명한 것은 아니다. 그럼 데카르트 자신도 앞에서 살펴보았던 방법대로 고안했을까? 하는 의문이 생긴다. 그는 철저하게 유추적 사고에 기반을 두어 그의 정리를 고안했기 때문에 앞에서 살펴본 증명방법과는 다르게 그의 정리를 고안했을 것이다. 필자는 대 수학자 데카르트의 경험했던 사고와 유사한 사고를 하고자 하였다. 그것은 진정 수학을 탐구하고자 한다면 교사나 학생 모두 수학자와 유사한 경험을 하면서 수학을 학습하도록 해야 한다는 구성주의 이론에 따른 것이다. 데카르트 자신은 어떻게 다면체에서 외각(부족각)의 합이 항상 720˚ 임을 알게 됐을까? 유추적 사고를 통해 데카르트 정리를 유도할 수 있는 방법은 없을까? 이러한 질문들에 해법을 찾기 위해 다각형에서 내각의 합 공식의 유도과정을 재음미해 볼 필요가 있다. 역사적으로 다각형의 내각의 합 공식을 최초로 발견한



180˚ ×1 180˚ ×2 180˚ ×3

꼭짓점의 개수	3	4	5	…	n
다각형의 내각의 합	180˚	360˚	540˚	…	180˚ $(n-2)$

[그림Ⅲ-2] 평면에서의 다각형의 내각의 합 공식의 귀납적 결과

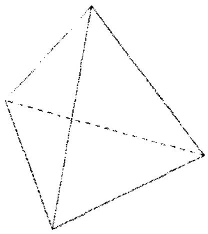
수학자는 프로클루스(Proclus; 410?~485)이다. 그는 "삼각형의 내각의 합이 180° 이다"는 사실을 좀 더 일반화시켜 "n각형의 내각의 합은 $180(n-2)^\circ$ 이다"는 사실을 [그림Ⅲ-2]과 같이 귀납적인 방법으로 증명하였다.

또한, 한 꼭짓점에서 다각형의 외각과 내각을 더하면 항상 평각(180°)이 된다는 사실을 통해 n각형의 내각과 외각의 합이 $180^\circ \times n$이 되므로,

다각형의 외각의 합

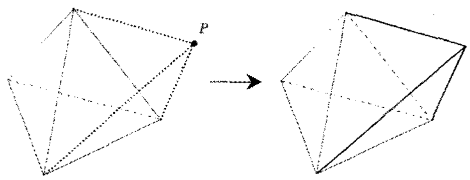
$$= 180^\circ \times n - 180^\circ (n-2) = 360^\circ$$

임을 보였다. 이와 같은 내용은 중학교 수학1 교과서에 그대로 적용되어 지도되고 있다. 이제, 평면에서 다각형의 내각의 합을 구하는 공식을 구하는 방법과 유사하게 공간에서 다면체의 내각[2]의 합을 구하는 공식을 꼭짓점의 수에 초점을 두어 유도해보자. 평면의 최소다각형이 삼각형이듯, 입체의 최소다면체는 사면체라는 사실을 쉽게 유추할 수 있다([그림Ⅲ-3] 참조). 사면체의 꼭짓점의 개수



[그림Ⅲ-3] 꼭짓점이 4개인 사면체

(또는 입체각의 개수)는 4이다. 이 다면체는 면이 모두 4개 있으므로, 면각들의 합은 $180^\circ \times 4 = 720^\circ$ 이다. 이 다면체는 면이 모두 4개 있으므로, 면각들의 합은 $180^\circ \times 4 = 720^\circ$ 이다. 프로클루스가 평면에서 발상했던 방법과 유사하게 입체에서도 꼭짓점 한 개를 추가하여 다면체의 면각의 합을 구해보자. 꼭짓점의 개수가 5개인 다면체는 꼭짓점 4개인 사면체의 외부에 한 꼭짓점을 추가해 가장 가까이 위치한 면의 꼭짓점과 서로 연결하여 만들 수 있다([그림Ⅲ-4] 참조).



[그림Ⅲ-4] 꼭짓점이 5개인 다면체 만들기

이 다면체의 면각의 합은 기존의 사면체에 꼭짓점을 한 개 추가함으로써 실제로 증가한 삼각형 면의 개수는 2개이므로, 꼭짓점 5개로 만들어지는 다면체의 면각의 합은 $720^\circ + 360^\circ = 1080^\circ$ 이다. 마찬가지로 꼭짓점 6개로 만들어지는 다면체는 꼭짓점 5개로 만들어지는 다면체에 비해 면각이 360° 만큼 더 증가한다. 이와 같이 귀납적 과정을 통해 평면에서 프로클루스가 얻은 그것과 유사하게 아래 <표Ⅲ-1>과 같이 얻어낼 수 있다.

따라서 평면에서 다각형의 한 꼭짓점에서 (내각) + (외각) = 180° 이 성립하는 것처럼, 다면체의 한 꼭짓점에서도 (면각의 합) + (부족각) = 360° 임을 유추적으로 연결할 수 있으며, [그림Ⅲ-2]와 <표Ⅲ-1>의 결과를 통해 평면에서 다각형의 내각의 합 공식 $180^\circ(n-2)$에서 180° 의 의미
와 다면체의 내각(면각)의 합 공식 $360^\circ(n-2)$에서 360° 의 의미도 유추적인 사고측면에서 매우 자연스럽게 연결되고 있다. 이러한 결과에 의하면 다각

<표Ⅲ-1> 입체에서 다면체의 내각(면각)의 합 공식의 귀납적 결과

꼭짓점의 개수	4	5	6	…	n
다면체의 내각(면각)의 합	720°	1080°	1440°	…	$360^\circ(n-2)$

2) 다면체에서는 평면각과 달리, 입체각(solid angle), 이면각(dihedral angle), 면각(face angle)들로 구성된다. 문맥상 여기서의 의미는 면각(face angle)을 의미한다.

형의 내각의 합 공식에서 $(n-2)$를 $(V-2)$로 표기하는 것이 학습자의 유추적 사고능력을 자극하는 측면에서 보다 더 자연스러운 표기법이라고 판단된다. 역사적인 증거자료에서도 이와 같은 사실을 찾아볼 수 있다. 오늘날 $V-E+F=2$으로 잘 알려진 오일러 공식은 실제로 오일러 자신은 $S-A+H=2$로 표기하였다(Federico, 1983). 여기서, S는 라틴어로 angulorum solidorum(입체각의 개수)을, A는 acies(모서리의 개수)를, H는 hedrae(면의 수)를 의미하는 첫 글자이다. 그는 오일러 수 이외에도 몇 가지 다면체에 대한 성질을 언급하였는데, 그 중 하나가 "다면체의 면각의 합은 $4S-8$직각이다"라는 내용이 포함되어 있다. 여기서 "$4S-8$직각" 의 의미가 곧 "$360°(S-2)$"를 의미하는 것이므로, $360°(V-2)$와 같다. 이와 같은 내용들에 비추어 판단해본다면, 다각형의 내각의 합 공식 $180°(n-2)$은 $180°(V-2)$로 표기하는 것이 학습자의 유추적 사고 증진을 위해 보다 적절한 표기법이라고 여겨진다. 이제 '다면체에서 부족각의 합은 항상 $720°$ 이다'를 완성해 보자. 앞에서 프로클루스의 다각형의 내각의 합 공식 $180°(V-2)$을 구하는 귀납적 과정을 그대로 입체에서 다면체의 내각(면각)의 합도 귀납적 과정에 의해 $360°(V-2)$라는 공식을 유도할 수 있었다. 아울러, 꼭짓점의 수가 V개인 평면다각형에서

$$(\text{내각의 합}) + (\text{외각의 합}) = V\times 180°$$
$$180°(V-2) + (\text{외각의 합}) = V\times 180°$$
$$\therefore (\text{외각의 합}) = V\times 180° - 180°(V-2) = 360°$$

인 것처럼, 꼭짓점의 수(혹은 입체각의 수)가 V개인 다면체에서는

$$(\text{한 꼭지점에서 면각의 합})+(\text{부족각})=360°$$
$$V\times(\text{한 꼭지점에서 면각의 합}) + V\times(\text{부족각}) = V\times 360°$$
$$(\text{다면체의 면각들의 총합})+(\text{부족각의 합}) = V\times 360°$$
$$360°(V-2) + (\text{부족각의 합}) = V\times 360°$$
$$\therefore (\text{부족각의 합}) = V\times 360° - 360°(V-2) = 720°$$

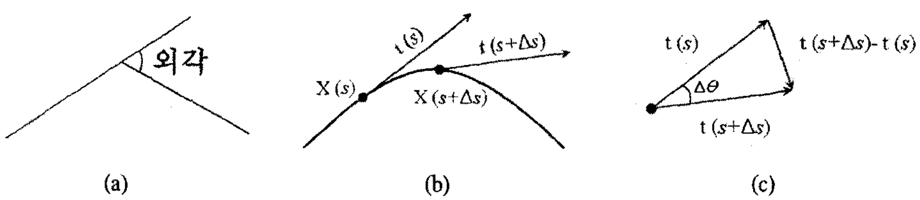
와 같이 증명할 수 있다.

Ⅳ. 유추에 의한 데카르트 정리와 미분기하학적 내용의 연결

미분기하학이란 곡선 및 곡면의 성질과 그것의 일반화를 미적분학을 써서 연구하는 학문을 말한다. 데카르트 정리는 이러한 미분기하학의 중요개념들과도 관계가 깊다. 먼저, 다각형의 외각을 미분기하적 개념인 곡률(curvature)과 연결시켜 보자. 다각형에서 외각은 한 변의 연장선과 이웃하는 다른 한 변이 이루는 각을 의미한다([그림Ⅳ-1(a)] 참조). 곡선에서 곡률은 평면 곡선 위의 한 점 $X(s)$와 X에 가까운 한 점 $X(s+\Delta s)$에 있어서의 접선의 변화율을 의미한다([그림Ⅳ-2(b), (c)] 참조). 즉, 곡률이란

$$\chi = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

로 정의된다. 여기서 $\Delta\theta$는 곡선의 호의 길이가 Δs인 두 접선 사이에 이루는 각을 의미하는데,



[그림Ⅳ-1] 외각과 곡률(curvature)의 정의

이러한 곡률의 정의를 다각형의 외각의 개념과 직관적으로 관계를 짓는다면, 곡률은 다각형의 외각의 개념을 순간변화율을 통해 연속적인 성질로 일반화한 개념이며, 다각형의 외각은 연속적인 성질인 곡률의 개념을 이산적인 개념으로 특수화시켰다고 볼 수 있다. 예를 들어, 다각형의 외각의 합은 2π인데, 앞에서 살펴보았던 [그림Ⅱ-4(b)]와 같이 변의 연장선에 의해 이뤄지는 외각들의 합은 변을 따라 한 바퀴 회전한 결과이므로 외각의 합은 원주 전체인 2π가 된다. 이러한 내용은 평면 위의 단순폐곡선 C에 대하여, 접선이 곡선 C의 둘레를 한 번 순회하여 원래 위치로 되돌아오므로 '$\int_C kds = 2\pi$'와 일치되는 내용이다. 결국 다각형의 외각의 합은 이산적 성질이므로 '$\sum_V$(외각)$=2\pi$ (V는 꼭짓점의 수)'와 같이 나타낼 수 있으며, 단순폐곡선에서의 곡률은 연속적 성질이므로 '$\int_C kds = 2\pi$'와 같이 나타낼 수 있다. 그러므로 '$\int_C kds = 2\pi$'는 '$\sum_V$(외각)$=2\pi$'를 일반화한 개념이고, '$\sum_V$(외각)$=2\pi$'는 '$\int_C kds = 2\pi$'의 특수화된 개념이다.

앞에서 다각형의 외각의 합의 개념을 유추적 사고를 통해 다면체의 부족각의 합의 개념으로 연결하였고, '다각형의 외각의 합이 360°이다'도 미분기하학적 개념인 '$\int_C kds = 2\pi$' 로 일반화시켰다. 그렇다면 '다면체에서의 부족각의 합은 720°이다'도 또 다른 어떤 미분기하적 개념으로 일반화시킬 수 있지 않을까 하는 유추적 사고가 가능하게 된다. 실제로 이러한 사고를 가능하게 하는 미분기하적 개념은 전곡률(total curvature)에 관한 가우스-보네의 정리이다. 가우스-보네의 정리의 내용은 다음과 같다.

일반적으로, 꼭짓점의 수 V, 모서리의 수 E, 면의 수가 F 인 곡면R에서

$$\int_R KdA = 2\pi(V-E+F) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

가 성립한다. ㉠에서 $\int_R KdA$를 전곡률(total curvature)이라고 부른다. 식 ㉠에서 직접적으로 확인 수 있듯이, 전곡률은 데카르트 정리의 표현 '$\sum_V$(부족각)$=2\pi(V-E+F)$'와 매우 유사하다. 이러한 표현을 통해 데카르트 정리와 가우스-보네 정리가 서로 밀접한 관계가 있음을 유추할 수 있다. 실제로 데카르트 정리는 다면체의 꼭짓점에서 부족각에 관한 이산적인 개념이고, 가우스-보네 정리는 곡면에서 전곡률에 관한 연속적인 개념이다. 그러므로 가우스-보네 정리는 데카르트 정리의 부족각에 관한 이산적인 성질을 전곡률에 관한 연속적인 성질로 일반화한 고등 수학적 내용이며, 역으로 데카르트 정리는 가우스-보네의 정리를 특수화한 내용이다. 많은 사람들이 ㉠의 식의 우변이 오일러 정리와 관계가 있음을 강조한다. 즉, 위상적 성질임을 강조하고 있다. 그러나 좌변의 전곡률이 데카르트 정리로부터 일반화할 수 있는 고등 수학적 개념이라는 사실에는 그다지 주목하지 않는다.

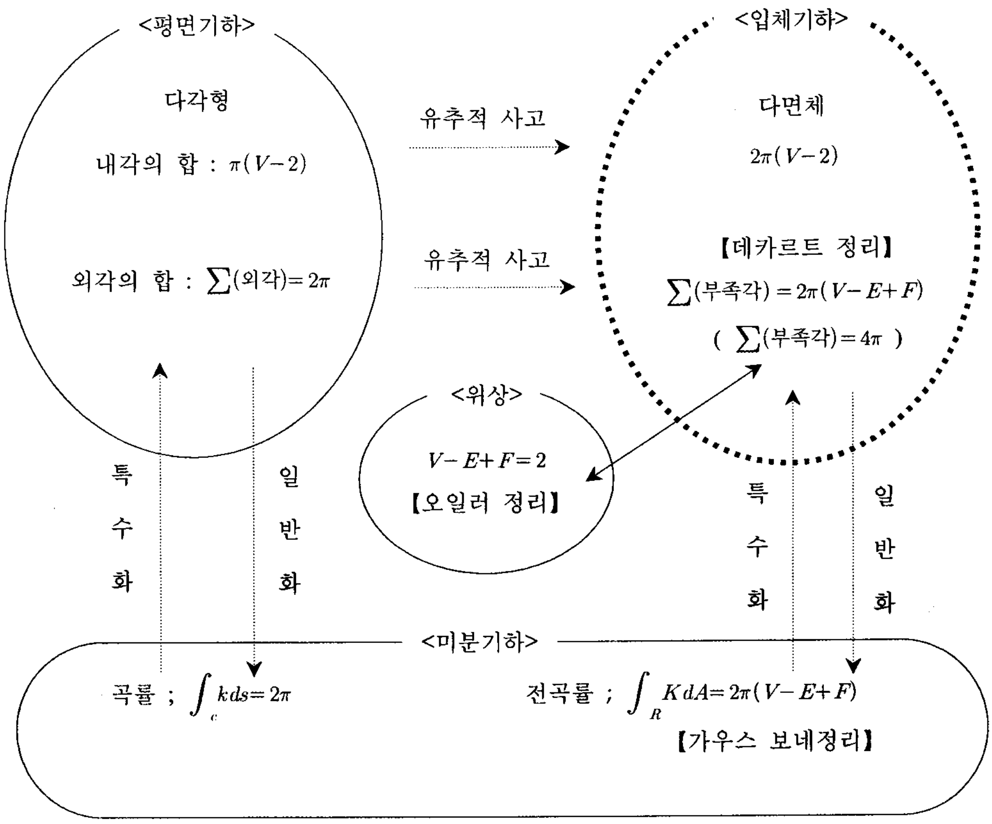
Ⅴ. 결론 및 제언

앞에서 우리는 데카르트 정리가 논리적으로 오일러 정리와도 동치관계이며 구면기하학 및 미분기하학과 매우 밀접하게 연결되어 있다는 사실을 확인하였다. 또한, 오늘날 대학 학부과정에서 학습하는 미분기하학의 핵심적 내용인 가우스-보네 정리와도 서로 위계적으로 연결된다는 사실도 확인하였다. 사실, 대학 학부과정에서 배우는 가우스-보네 정리는 대학생조차 학습하기가 쉽지 않은 내용이다. 이러한 현실 속에서 데카르트 정리는 학생들의 유추적 사고를 촉진할 뿐 아니라, 고대 그리스 시대의 수학자인 프로클루스가 고안했던 평면다각형의 성질에서 근현대의 수학자인

가우스의 곡면이론에 이르기까지 역사-발생적으로 연결하는 가교(架橋)의 역할을 충실히 해낸다 ([그림V-1] 참조).

이렇게 다양한 수학적 내용들과 계열상 직·간접적으로 연결되며 수학사적, 수학적, 수학교육적으로 가치가 높다는 점에서 수학영재를 위한 심화교수-학습주제로 적절하다고 판단된다.

현재, 우리나라 중학교 1학년 수학 기하영역에서는 평면도형의 성질인 '다각형의 외각의 크기의 합은 항상 360˚이다'와 입체도형의 성질로서 정다면체에 대한 내용이 지도되고 있다 따라서 본 내용은 중학교 1학년 이후의 학년에서 심화학습 주제로 활용가능하다. 유추적 사고와 귀납적인 사고를 통해 입체도형에서도 평면에서와 유사한 성질을 발견해 낼 수 있지 않을까 하는 발상에서 출발하여 볼록다면체의 일반적 성질인 데카르트 정리를 재발명하는 수학화 활동은 영재들을 위한 심화주제로 적절하다고 하겠다. 특히, 수학에 소질이 있는 수학영재들은 대부분 기존의 문제에 익숙하므로 보다 새롭고 도전적인 과제를 갈망하고, 아직 알려지지 않은 새로운 부분에까지 도전해 보면서 수학하는 즐거움을 찾고자 한다(송상헌, 2004). 이경화(2009)는 영재교육에서 강조해야 할 세 가지 유형의 기회로 상위지식을 학습할 기회(Johnson & Sher, 1997), 도전적인 수학문제를 접할 기회(Johnson, 1993), 창의적 사고를 발전시킬 수 있는 기회(Sheffied, 1999)를



[그림V-1] 데카르트 정리와 관련 수학적 개념간의 관계도

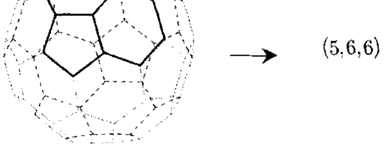
들면서, 유추적 사고는 패턴을 발견하여 문제를 해결하게 할 뿐 아니라, 새로운 영역으로 이미 알고 있던 지식을 확장하여 보다 발전시키는 기능을 한다는 점에서 이 세 가지 기회를 제공하는데 적합한 사고유형이라고 보았다. 그러므로 데카르트 정리는 이러한 세 가지 기회를 경험할 수 있는 적절한 교수-학습주제로 판단된다.

마지막으로 데카르트 정리의 활용방안을 소개하고자 한다(Scott, Paul, 2006). 5개의 정다면체와 13개의 준정다면체는 한 꼭짓점에 모여 있는 면의 배열이 항상 일정하다. 즉, 모든 꼭짓점에서 부족각이 동일하므로 데카르트 정리 $\sum(\text{부족각}) = 4\pi$를 적용하면,

$$V = \frac{4\pi}{(\text{부족각})} = \frac{720^\circ}{(\text{부족각})}$$

을 통해 다면체의 꼭짓점의 개수를 얻을 수 있다. 이 결과는 정다면체나 준정다면체의 모든 구성요소들을 투명하게 드러내는데 활용할 수 있다. 예를 들어, 축구공으로 잘 알려진 깎은 정이십면체(truncated icosahedron)는 준정다면체의 한 종류인데, [그림V-2]와 같이 모든 꼭짓점에서 정오각형, 정육각형, 정육각형인 면들이 동일하게 배열되어 있으므로 기호적 표현으로 나타내면 $(5,6,6)$이다.

따라서 이 다면체의 한 꼭짓점에서 부족각을



[그림V-2] 깎은 정이십면체

구해보면, $360^\circ - 108^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 12^\circ$ 이므로, 깎은 정이십면체의 전체 꼭짓점의 수 V는

$$V = \frac{720^\circ}{12^\circ} = 60$$

의 결과를 얻게 되어 축구공의 꼭짓점의 수가 60개임을 알 수 있다. 또한,

$$(\text{모서리의 개수}) = \frac{(\text{한꼭지점에 모여있는 면의 개수}) \times (\text{꼭지점의 개수})}{2}$$

이므로,

$$E = \frac{3 \times 60}{2} = 90$$

을 얻을 수 있으며, 오일러 정리를 이용해서, 면의 개수 $F = 2 - V + E = 2 - 60 + 90 = 32$도 구할 수 있다. 또한, 축구공의 오각형인 면의 개수와 육각형인 면의 개수를 각각 p, h라 놓고 다음과 같은 연립방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{cases} p + h = 32 \ (\text{면의 수}) \\ 5p + 6h = 180 \ (\text{모서리의수 의 2배}) \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면, $p = 12$, $h = 20$이다. 결국, 데카르트 정리와 오일러 정리를 함께 이용하면 축구공의 기호적 표현 $(5,6,6)$만으로도 축구공의 모든 구성요소들(꼭짓점의 개수, 모서리의 개수, 면의 개수, 정오각형인 면의 개수, 정육각형의 면의 개수)을 자명하게 구할 수 있다(최남광, 2008).

참고문헌

송상헌(2004). 수학 영재 교수・학습자료개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. 과학교육논총, 16 pp67~86.

양승갑・박영・수박원・선배종숙・성덕현・이성김・홍우철(2002). 수학 7-나. (주)금성출판사.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교 출판부.

______(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울 : 서울대학교 출판부.

이경화(2009). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결. 수학교육연구, 19(1), 45-61.

이승우, 우정호(2002). 학교수학에서의 유추와 은유. 수학교육학연구, 12(4), 523-542.

최남광(2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

Cromwell, P. (1997). *Polyhedra,* Cambridge University Press.

Federico, P. J. (1983). *Descartes on polyhedra,* New York. Springer-Verlag.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery.* New York. JOHN WILEY & SONS, Inc.

Scott, Paul. (2006). Angle Defect and Descartes' Theorem. ATM 62(1), 2-4.

A Study on Possibility of Introducing Descartes' Theorem to Mathematically Gifted Students through Analogical Reasoning

Choi, Nam-Kwang (Graduate School, Korea National University of Education)
Lew, Hee-Chan (Korea National University of Education)

This paper researches the possibility of introducing Descartes' theorem to mathematically gifted students. Not only is Descartes' theorem logically equivalent to Euler's theorem but is hierarchically connected with Gauss-Bonnet theorem which is the core concept on differential geometry. It is possible to teach mathematically gifted students Descartes' theorem by generalizing mathematical property in solid geometry through analogical reasoning, that is, so in a polyhedrons the sum of the deficient angles is 720° as in an polygon the sum of the exterior angles is 360°. This study introduces an alternative method of instruction that we enable mathematically gifted students to reinvent Descartes' theorem through analogical reasoning instead of deductive reasoning.

* **Key Words** : Mathematically Gifted Students(수학영재), Descartes' Theorem(데카르트 정리), Analogical Reasoning(유추적 사고), Deficient Angle(부족각),

논문접수: 2009. 5. 30.
논문수정: 2009. 8. 18.
심사완료: 2009. 8. 25.