

# 가중함수이론을 이용한 선형이방성재료에서의 Mode III 균열해석

안득만\* · 권순홍\*\*

\*부산대학교 공과대학 기계공학부

\*\*부산대학교 공과대학 조선해양공학과

## Weight Function Theory for a Mode III Crack In a Rectilinear Anisotropic Material

Deuk-Man An\* and Sun-Hong Kwon\*\*

\*Mechanical Engineering Department, Pusan National University Busan, Korea

\*\*Naval Architecture and Ocean Engineering Department, Pusan National University Busan, Korea

**KEY WORDS:** Weight function theory 가중함수이론, Stress intensity factor 응력확대계수, Fundamental field 기초장, Regular field 정상장, Reciprocal theorem 상반정리, Anti-plane strain 비평면변형률

**ABSTRACT:** In this paper, a weight function theory for the calculation of the mode III stress intensity factor in a rectilinear anisotropic body is formulated. This formulation employs Lekhnitskii's formalism for two dimensional anisotropic materials. To illustrate the method used for the weight function theory, we calculated the mode III stress intensity factor in a single edge-notched configuration.

### 1. 서 론

Bueckner의 가중함수이론은 응력확대계수를 계산하는 하나의 방법으로 잘 알려져 있다.

가중함수이론은 주어진 균열 형태의 구조물에서 임의 하중에 의한 응력확대계수가 식 (1)과 같이 경계를 따른 적분으로 표현된다(An, 1987).

$$K_i = \int_s \vec{t} \cdot \vec{u}_i ds \quad (i = I, II, III) \quad (1)$$

여기서  $K_i$ 는 Mode I, II, III에서의 응력확대계수이고,  $\vec{t}$ 는 경계에 작용하는 면력이며,  $\vec{u}_i$ 는 Mode I, II, III에서의 가중함수로서  $x, y, z$ 방향의 변위 성분을 갖는 변위 벡터이다. 본 연구에서는 Lekhnitskii formalism을 이용하여 직선 균열을 가지는 선형 이방성 재료의 비평면 변형률 상태에서의 응력과 변위를 구하였고, Betti의 상반정리를 적용하여 Bueckner의 가중함수이론을 유도하였다.

### 2. 비평면 변형률

$x-y$  평면을 대칭면으로 하는 선형이방성재료(Rectilinear anisotropic material)의 응력-변형률관계를 행렬로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12}c_{22}c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13}c_{23}c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}c_{55} & 0 \\ c_{16}c_{26}c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

비평면 변형률 상태에서의 변위조건은

$$u = v = 0, w = w(x, y) \quad (3)$$

와 같이 주어진다. 여기서  $u, v, w$ 는 각각  $x, y, z$ 방향의 변위이다. 식 (3)에 의하여 변형률은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)로부터 응력은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} &= c_{45}\gamma_{yz} + c_{55}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz} + c_{45}\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (5)$$

비평면 변형률 상태에서 평형방정식(Equilibrium equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

식 (4)와 (5)를 조합하여 식 (6)에 대입하면  $w$ 에 미분 방정식이 얻어 진다.

$$c_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

식 (7)은 선형 이방성 재료의 비평면 문제에 대한 지배방정식이다. 식 (7)의 해를 다음과 같이 가정하자.

$$w = w(x + sy) \quad (8)$$

위와 같은 가정에 의하여  $s$ 는 식 (7)에 의하여 아래 특성방정식 (Characteristic equation)을 만족 하는 근이 된다.

$$c_{44}s^2 + 2c_{45}s + c_{55} = 0 \quad (9)$$

여기서 식 (9)의 해는

$$s_1 = \alpha + i\beta, s_2 = \alpha - i\beta = \bar{s}_1 \quad (10)$$

와 같이 되고  $\alpha, \beta$ 는 다음과 같다.

$$\alpha = -\frac{c_{45}}{c_{44}}, \beta = \frac{1}{c_{44}}(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2} \quad (11)$$

따라서 실수함수인  $w$ 는 다음과 같이 쓸 수 있고

$$w(x, y) = V_1(z_1) + \overline{V_1(1)}, z_1 = x + s_1y \quad (12)$$

함수  $V_1(z_1)$ 은  $z_1$ 에 대해 해석적(Analytic)이다. 다음과 같은 복소 퍼텐셜 함수를 도입하면(Liebowitz, 1968)

$$\phi'(z_1) = i(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2} \frac{dV_1}{dz_1} \quad (13)$$

응력은 아래와 같이 되고

$$\sigma_{xz} = -2\text{Re}[s_1\phi'(z_1)] \quad (14)$$

$$\sigma_{yz} = 2\text{Re}[\phi'(z_1)]$$

변위는

$$w = 2(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} \text{Im}[\phi(z_1)] \quad (15)$$

와 같이 쓸 수 있다.

### 3. 응력확대계수

Fig. 1과 같은 모양의 선형 이방성체에서 균열선단(Crack tip)이 원점에 위치하고 음의  $x$ 축을 따라 균열이 있을 때 균열 끝 부분에서의 복소 퍼텐셜 함수의 거동은 다음과 같다.

$$\phi(z_1) = a_r \sqrt{z_1} \quad (16)$$

$a_r$ 는 복소상수(Complex coefficient)이다.

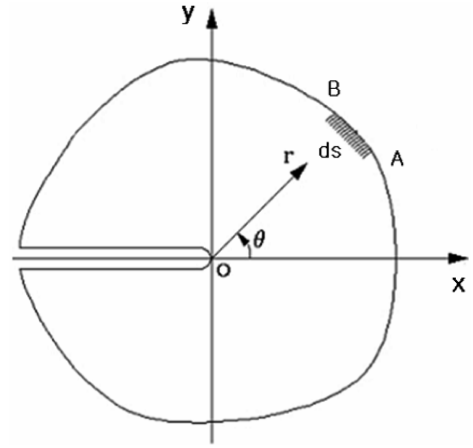


Fig. 1 Polar coordinates  $r, \theta$  and convention for traction vector

여기서 양의  $x$ 축에서 제곱근이 양의 값을 가지도록  $y = \pm 0$ 일 때  $\sqrt{z_1}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\sqrt{z_1} = \begin{cases} \sqrt{x}; x > 0 \\ \pm i\sqrt{-x}; x \leq 0, y = \pm 0 \end{cases} \quad (17)$$

호 AB에 작용하는  $z$ 방향의 힘  $P$ 는 다음과 같다.

$$P = \int_A^B t_3 ds = \int_A^B \sigma_{xz} dy - \sigma_{yz} dx = -2\text{Re}[\phi(z_1)]_A^B \quad (18)$$

여기서  $t_3$ 는  $z$ 방향의 면력을 나타낸다. 균열면에 면력이 없다는 조건에 의해 복소 퍼텐셜 함수는 다음과 같이 주어지고

$$\phi(z_1) + \overline{\phi(z_1)} = 0 \quad (19)$$

식 (16), (17)을 식 (19)에 대입하면

$$a_r - \bar{a}_r = 0 \quad (20)$$

식 (20)은 아래와 같이 실수상수  $K_{III}$ 를 정의하면 자동적으로 만족하게 된다.

$$a_r = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \quad (21)$$

여기서  $K_{III}$ 를 Mode III에서의 응력확대계수라고 한다. 식 (16), (21)을 식 (14), (15)에 대입하면 균열선단부근에서의 응력은 다음과 같이 되고

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \text{Re} \frac{s_1}{\sqrt{z_1}} \quad (22)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \text{Re} \frac{1}{\sqrt{z_1}}$$

$z$  방향의 변위는

$$w = 2(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \text{Im} \sqrt{z_1} \quad (23)$$

와 같이 된다.

식 (22)에서 균열선단에서의 응력은  $r^{-1/2}$ 의 특이성을 가지며 구조물의 기하학적 형상과 하중 그리고 재료의 특성에 관계됨을 알 수 있다.

균열부근의 위치를 극좌표(Polar coordinate)로 나타내면  $z_1 = r(\cos\theta + s_1\sin\theta)$ 에 의해 응력은 아래와 같이 되고

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} Re \frac{s_1}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}} \quad (24)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} Re \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}}$$

변위는 다음과 같다.

$$w = 2(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} Im \sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta} \quad (25)$$

등방성 재료인 경우 탄성계수가  $c_{44}=c_{55}=\mu$ ,  $c_{45}=0$ 와 같이 되므로  $s_1=i$ 가 되어 식 (24), (25)는 부터 등방성 재료에서의 응력과 변위로 된다(Anderson, 1995).

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (26)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (27)$$

### 4. 가중함수이론

Fig. 2와 같이 원점으로부터 음의 x축을 따라  $x = -1 \pm i0$ 점까지의 균열을 가진 단일 연결 영역(Simply connected domain)이 있다. 이때 영역 A에서 함수  $V_1(z_1)$ 과 복소 퍼텐셜 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V_{1s} = \frac{1}{i(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}} a_f \frac{1}{\sqrt{z_1}} \quad (28)$$

여기서  $a_f$ 는 실수상수(Real constant)이다.

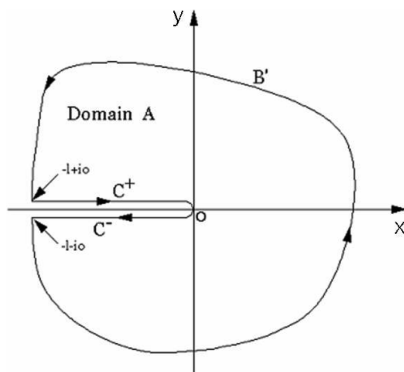


Fig. 2 A simply connected domain with an open crack

$$\phi_s(z_1) = a_f \frac{1}{\sqrt{z_1}} \quad (29)$$

식 (28), (29)는 균열면에서 다음과 같이 된다.

$$V_{1s}(x \pm i0) = \frac{1}{i(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}} a_f \frac{1}{\sqrt{|x|}} i \quad (30)$$

$$\phi_s(x \pm i0) = \pm a_f \frac{1}{\sqrt{|x|}} i \quad (31)$$

함수  $\phi_s(z_1)$ 에 의해 정의된 장(Field)은 균열면에서는 면력이 존재하지 않지만 외부 경계부분인  $B'$ 에서는 면력이 서로 평형을 이루며 존재하고 있다.  $B'$ 부분에서 함수  $\phi_s(z_1)$ 에 의해 유발된 면력과 반대방향인 힘에 의한 정상장을  $\phi(z_1)$ 으로 정의하여 이 두개의 장을 합성하면 외부경계에서의 면력은 없어진다.

여기서 균열선단에서 변위가  $r^{-1/2}$ 의 특이성을 가지는  $\phi(z_1)$ 와 균열선단에서 변위가  $r^{1/2}$ 의 특이성을 가지는 정상장인  $\phi(z_1)$ 를 합하여 다음과 같이 기초장(Fundamental field)을 정의한다.

$$\phi(z_1) = \phi_s(z_1) + \phi(z_1) \quad (32)$$

기초장에서는 외부 경계부분인  $B'$ 와 균열면에 면력이 존재하지 않는다. 또한 균열선단에서의 변위가 무한대로 되므로 기초장에서 탄성에너지는 무한대가 된다. 따라서 탄성론에서의 유일성(Uniqueness)의 정리를 사용할 수 없다(Muskhelishvili, 1977). 체적력을 무시한 Betti의 상반정리는 다음과 같다.

$$\int_s \vec{t}' \cdot \vec{u}'' ds = \int_s \vec{t}'' \cdot \vec{u}' ds \quad (33)$$

여기서  $\vec{t}', \vec{t}'', \vec{u}'$  및  $\vec{u}''$ 는 평형방정식을 만족하는 각각의 장에서 경계를 따라 작용하는 면력과 변위 벡터이다.

기초장은 균열선단에서의 특이성(Singularity)을 가지므로 Fig. 3과 같이 영역 A에서 균열선단 부분을 제거하여 얻어진 영역  $A'$ 를 고려한다.

이 영역에 Betti의 상반정리를 체적력이 존재하지 않는 정상장과 기초장을 적용하면 식 (33)은 다음과 같이 표현된다. 여기서 아래첨자  $r$ 은 정상장을  $f$ 는 기초장을 의미한다.

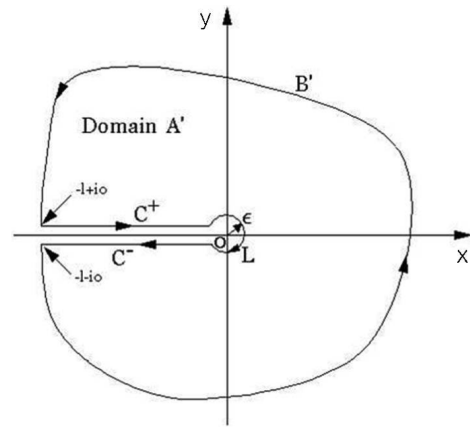


Fig. 3 A simply connected domain which deleted the crack tip

$$\int_{B+L} t_f w_r ds = \int_{B+L} t_r w_f ds \quad (34)$$

경로 B는 경로 L을 제외한 B', C<sup>+</sup>, C<sup>-</sup>로 구성된 경로이다. 기초장에서 경로 B부분에서는 표면력이 존재하지 않으므로 식 (34)는 다음과 같이 된다(An and Son, 2007).

$$\int_L (t_f w_r - t_r w_f) ds = \int_B t_r w_f ds \quad (35)$$

식 (35)의 양변을 K로 정의하면

$$K = \int_B t_r w_f ds \quad (36)$$

$$K = \int_{-L} (t_r w_f - t_f w_r) ds \quad (37)$$

와 같이 되고 식 (37)은 식 (18)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K = \int_{-L} (w_f dP_r - w_r dP_f) \quad (38)$$

식 (38)의 두 번째 항은 다음과 같다

$$w_r dP_f = d(w_r P_f) - P_f dw_r \quad (39)$$

식 (39)의 첫 번째 항은

$$\int_{-L} d(w_r P_f) = 0 \quad (40)$$

이므로 식 (38)은 다음과 같다.

$$K = \int_{-L} (w_f dP_r + P_f dw_r) \quad (41)$$

식 (15), (18)을 이용하면 식 (41)의 성분들은 다음과 같이 되어

$$\int_{-L} w_f dP_r = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} (\phi_f - \bar{\phi}_f) d - (\phi_r + \bar{\phi}_r) \quad (42)$$

$$\int_{-L} P_f dw_r = -(\phi_f + \bar{\phi}_f) d (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} (\phi_r - \bar{\phi}_r) \quad (43)$$

식 (41)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$K = \int_{-L} -2(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} \phi_f d\phi_r + 2(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} \bar{\phi}_f d\bar{\phi}_r \quad (44)$$

A<sub>1</sub>을 다음과 같이 정의하면

$$A_1 = 2 \int_{-L} \phi_f d\phi_r, \bar{A}_1 = 2 \int_{-L} \bar{\phi}_f d\bar{\phi}_r \quad (45)$$

식 (44)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = -(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} 2ImA_1 \quad (46)$$

식 (16), (29)에 의해 A<sub>1</sub>은

$$A_1 = a_r a_f \int_{-L} \frac{dz_1}{z_1} = 2\pi i a_r a_f \quad (47)$$

와 같이 된다.

여기서  $\varepsilon \rightarrow 0$  일 때의 K는 식 (46), (47)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K = K_0 = -(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} 2Im2\pi i(a_r a_f) \quad (48)$$

식 (21)을 식 (48)에 대입하면 K<sub>0</sub>는

$$K_0 = -2\sqrt{2\pi} (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} K_{III} a_f \quad (49)$$

와 같이 되고 식 (36)에 의해 K<sub>0</sub>는 다음과 같이 된다.

$$K_0 = \int_B t_r w_f ds \quad (50)$$

따라서 식 (49)과 식 (50)으로부터 아래와 같은 식을 얻을 수 있고

$$\int_B t_r w_f ds = -2\sqrt{2\pi} (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} K_{III} a_f \quad (51)$$

a<sub>f</sub>를 아래와 같이 두면

$$a_f = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2} \quad (52)$$

mode III에서의 응력확대계수는 다음과 같이 주어진다.

$$K_{III} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_B t_r w_f ds \quad (53)$$

여기서 w<sub>f</sub>가 mode III에서의 가중함수이다.

### 5. 수치예제

Fig. 4와 같은 SEN(Single edge notch) 시편에서 Mode III에서의 가중함수를 구하고 이것을 이용하여 응력확대계수를 계산해보고자 한다.

탄성계수는 다음과 같은 값을 가지는 재료를 선택 하였다.

$$\begin{aligned} c_{44} &= 3.38GPa \\ c_{55} &= c_{66} = 5.65GPa \\ c_{45} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

식 (10), (11)로부터 s<sub>1</sub>는 다음과 같이 주어지고

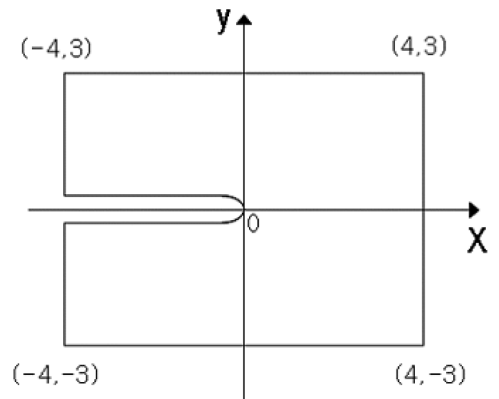


Fig. 4 Specimen

$$s_1 = 1.2929i \tag{55}$$

식 (28), (29)와 식 (52)를 이용하여 함수  $\phi$ 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\phi_s = 4.37 \cdot 10^6 \frac{1}{\sqrt{z_1}} \tag{56}$$

Fig. 4와 같은 도형에서 함수  $\phi$ 에 의하여 경계에서 발생하는 힘에 의한 변위를 해석적으로 구하는 것은 매우 어렵다. 따라서 Paris 등에 의하여 제안된 방법을 이용하여 수치해석으로 가중 함수를 구하고자 한다(An, 1987; Paris et al., 1976). 수치해석은 유한요소법(Finite element method)을 사용하였다.

유한요소해석에는 ANSYS 10.0을 이용하였으며 절점(Node) 2511개와 사각형 특이요소 2400개를 사용하여 시편상부를 모델링 하였다.

먼저 식 (56)에 의해 경계를 따라 표면력을 계산하고, 방향이 반대인 표면력을 경계를 따라서 적용시킨 후 최종적으로  $\phi_s, \phi$ 의 변위를 합해줌으로써 가중함수  $w_f$ 를 구할 수 있다.

Table 1은 경계에 있는 각 절점에서의 가중 함수이다.

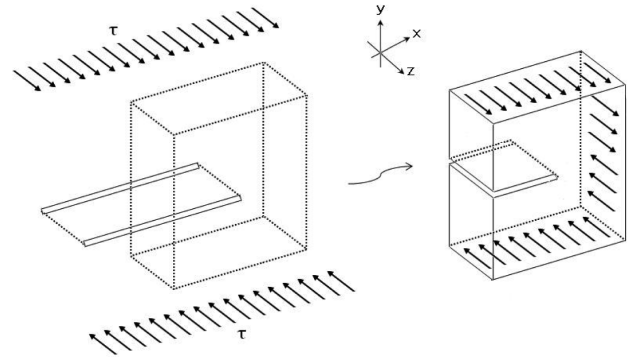
Table 1에서 구한 가중함수를 이용하여 시편의 경계에 무한체에 존재하는 균열에 무한대에서 전단응력이 작용하는 경우와 같은 응력확대계수를 주는 면력이 작용하는 경우에서의 응력확대계수를 구하여 보자. 즉, Fig. 5와 같은 선형 이방성재료로 된 Griffith 균열에 무한대에서 균일한 전단응력이 작용할 때 점선을 따라 전단하중을 계산하여 점선으로만 된 물체의 경계를 따라 전단 하중을 주게 되면 무한체 안에 있을 때와 변형상태와 응력상태가 같게 되며 균열 끝에서의 응력확대계수도 같아진다.

Griffith 균열에서 균일한 전단하중  $\tau$ 가 무한대에서 작용할 때  $\phi(z_1)$ 는 다음과 같이 주어진다(Xu and Rajapakse, 2001).

$$\phi(z_1) = \frac{\tau}{2} z_1 - \frac{\tau}{2} (z_1 - \sqrt{(z_1^2 - a^2)}) \tag{57}$$

**Table 1** Normalized mode III weight function along the boundary for an orthotropic edge crack

x	y	w <sub>f</sub>	x	y	w <sub>f</sub>
4	0	0	-0.5	3	3.454
4	0.5	-2.693	-1	3	5.237
4	1	-5.3009	-1.5	3	7.091
4	1.5	-7.695	-2	3	9.054
4	2	-9.799	-2.5	3	11.16
4	2.5	-11.666	-3	3	13.43
4	3	-13.397	-3.5	3	15.84
3.5	3	-11.491	-4	3	18.36
3	3	-9.567	-4	2.5	23.189
2.5	3	-7.63	-4	2	28.371
2	3	-5.693	-4	1.5	34.061
1.5	3	-3.78	-4	1	40.339
1	3	-1.906	-4	0.5	47.148
0.5	3	-0.083	-4	0	54.3506
0	3	1.695			



**Fig. 5** Infinite anisotropic medium with Griffith crack

여기서  $a$ 는 4이고  $\tau$ 는 1이며,  $\sqrt{z_1^2 - a^2}$ 의 값은  $\lim_{z_1 \rightarrow \infty} z_1^{-1} \sqrt{z_1^2 - a^2} = 1$ 로 선택했다. 이때  $z_1 = \pm a$ 에서의  $K_{III}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$K_{III} = r \sqrt{\pi a} \tag{58}$$

Fig. 5의 점선부분이 Fig. 4의 시편과 같을 때 경계에서의 표면력을 구한 후, Table 1에 주어진 가중함수와 식 (53)을 이용하면  $K_{III}=3.4608$  되고, 식 (58)을 이용하여  $K_{III}$ 를 구하면  $K_{III}=3.5449$ 가 된다.

## 6. 결 론

본 연구에서는  $x$ - $y$  평면이 대칭면인 선형이방성 재료에서 직선균열에 Mode III 하중이 작용하는 경우에 대하여 가중함수 이론을 Lekhnitskii formalism을 이용하여 유도하였다. 가중함수 이론을 이용한 응력확대계수 계산의 예로 SEN시편에서의 가중 함수를 구하였고, 이것을 이용하여 SEN 시편의 경계에 Griffith 균열과 같은 응력 상태를 주는 하중이 작용하는 경우에 대한 응력확대계수를 구하였다.

## 후 기

이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

## 참 고 문 헌

An, D.M. (1987). "Weight Function Theory for a Rectilinear Anisotropic Body", International Journal of Fracture, Vol 34, pp 85-109.

An, D.M. and Son, I.H. (2007). "Weight Functions for Notched Structures with Anti-Plane Deformation", International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol 8, pp 60-63.

Anderson, T.L. (1995). Fracture Mechanics, CRC Taylor &

- Francis.
- Liebowitz, H. (1968). *Fracture, an Advanced Treatise*, Academic Press, Inc.
- Muskhelishvili, N.I. (1977). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing.
- Paris, P.C., McMeeking, P.C. and Tada, H. (1976). "The Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors", ASTM-STP 601, pp 471-489.
- Xu, X.-L. and Rajapakse, R.K.N.D. (2001). "On a Plane Crack in Piezoelectric Solids", *International Journal of Solids and Structures*, Vol 38, pp 7643-7658.
- 
- 2008년 9월 22일 원고 접수  
2009년 1월 16일 최종 수정본 채택