

# 비정상 상태의 선접촉 탄성유체윤활 유막두께 및 유막압력 특성연구

장시열 · 조재철\*

국민대학교 기계자동차공학부

## Study on the Film Thickness and Pressure of the Transient Line Contact Elastohydrodynamic Lubrication

Siyoul Jang and Jae Cheol Cho<sup>†</sup>

School of Mechanical and Automotive engineering, Kookmin University

(Received July 28, 2009; Revised October 4, 2009; Accepted October 5, 2009)

**Abstract** –Elastohydrodynamic lubrication (EHL) analysis shows that film thickness is very flat in the contact area and pressure distribution is somehow similar to that of Hertzian contact pressure except the outlet region with pressure spike. These typical patterns of EHL film thickness and pressure are the cases under the steady contact conditions of applied loads and speeds. However, many engineering contacts are rather under the conditions of varying loads and contact speeds, and therefore the predictions for endurance life and performance of machine elements with steady EHL analysis are not suitable in many occasions. This study shows the differences in film thickness formation and pressure distribution between steady and transient contact conditions in several contact cases.

**Key words** - line contact elastohydrodynamic lubrication (line contact EHL/선접촉 탄성유체윤활), transient loading(비정상 상태 하중), transient speed(비정상 상태 속도), film thickness(유막두께), multilevel multigrad method(다중 차원 다중 격자 해석법)

### 기호설명

$A$	matrix containing the discrete operator	$T$	cycle time for applied load and speed variation
$a$	radius of Hertzian contact, $\sqrt{8WR/\pi E^*}$	$t^*$	time ( $tu/2a$ )
$E^*$	reduced modulus of elasticity	$U^*$	dimensionless speed ( $\eta_0 u_s/E^*R$ )
$h$	grid mesh size, film thickness	$u_s$	sliding velocity
$h^*$	dimensionless film thickness ( $hR/a^2$ )	$W$	applied load
$k$	amplitude of applied load and speed variation	$W^*$	dimensionless load ( $W/E^*R$ )
$L$	differential operator	$h$	viscosity
$p$	pressure	$h_0$	viscosity at zero pressure
$p_H$	Hertzian pressure ( $2W/\pi a$ )	$x, y, z$	coordinates
$p^*$	dimensionless film pressure ( $p/p_H$ )	$\omega$	relaxation factor
$R$	curvature of contact radius	$\rho$	density
$r^h$	discrete residual	$\delta$	change due to relaxation

### 1. 서 론

<sup>†</sup>주저자 · 책임저자 :parace@kookmin.ac.kr

탄성유체윤활 현상은 상대하는 두 고체면의 접촉 압

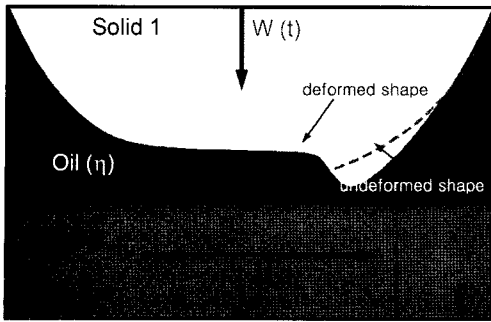


Fig. 1. Fluid film formation in elastohydrodynamic lubrication.

력의 과도한 증가로 접촉면의 탄성 변형을 유발하며 (Fig. 1), 접촉 고체면 사이에 존재하는 윤활유의 고압력에 의한 순간적인 고점도에 의한 전단저항의 급격한 변화가 동시에 나타나는 특이한 점이 있다. 그 동안의 많은 연구결과로 탄성유체윤활에 대한 수학적 모델은 비교적 이러한 윤활영역의 접촉현상에 대하여 신뢰성 있게 정립되어 있다[1,2]. 그리고 여러 가지 공학적 마찰면에 대한 탄성유체윤활의 모델에 대한 수치적인 접근도 다양하게 시도 되고 있으며, 접촉 하중이나 접촉 속도의 크기에 대한 공학적 의미를 갖는 접촉면에 대한 초기연구단계에서 나타났던 안정적 수치해에 대한 불안정성도 최근에는 거의 극복되고 있다[3]. 또한 접촉조건에 대하여 공학적인 다양한 조건으로 표면 거칠기의 형태, 윤활유의 비선형 점도 특성 등을 고려한 해석도 성공적으로 수행되고 있다[4,5].

본 연구는 이러한 다양한 접근 방향 중 하나로 탄성유체윤활에 대한 접촉 조건 중에 접촉하중과 접촉 속도의 변화가 유막 거동에 미치는 영향을 연구하였다. 그 이유는 지금까지 일반적인 탄성유체윤활의 접촉 조건에 대한 고려가 정상상태의 접촉조건만 대부분 다루어 일반적인 요동하중 및 변동속도접촉 조건의 공학적 기계요소의 접촉 현상에는 현실적 의미를 두기에 어려울 때가 있기 때문이다. 접촉 하중과 접촉 속도의 변화에 따라 나타나는 비정상상태의 선접촉 탄성유체윤활의 유막 압력 및 유막 거동의 형태를 비교적 고하중의 경우에 대하여 계산하였으며, 일반적으로 탄성유체윤활에 대한 유막 거동 특성을 판단의 기준으로 제시하는 정상 상태의 결과와 비교하였다.

## 2. 동하중 선접촉 탄성유체윤활의 모델

지금까지 탄성유체윤활에 대한 수치적인 접근법은

초기 해석기술 개발단계에서 수렴성의 어려움으로 작은 작용하중에서 다루어졌으나, 최근에는 작용하중 및 접촉 속도에 대한 현실적인 크기에 대하여 안정적인 해를 얻을 수 있도록 충분히 안정적인 해석법이 개발되었다. 그 중 다중격자 다중차원 (multigrid multi-level method) 수치 해석법은 윤활유의 비선형 점도 특성, 접촉하중과 속도의 크기, 표면 거칠기 등의 많은 경우에서 안정적이고 빠른 계산을 유도할 수 있기 때문에 최근에는 매우 활발하게 이 분야에 적용되고 있다[6,7].

본 연구는 우선 접촉 하중과 접촉 속도의 변화에 따른 탄성유체윤활 유막의 거동을 분석하기 위하여 이상적인 경우의 접촉 표면이 완전 매끄러운(perfectly smooth) 형태에서 선접촉 탄성유체윤활 해석을 수행하였다. 접촉면의 탄성변화를 고려한 경우의 접촉 틈새에서의 윤활유 거동 현상은 시간중속(time dependent) 점접촉 레이놀즈 방정식(Reynold's equation)으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

선접촉의 경우는 식 (1)의 두 번째 항의 의미는 없으며 접촉속도의 방향인  $x$  방향의 공간 좌표계만 고려한다. 표면 거칠기의 영향을 고려한다면 유막 두께  $h$ 에 대한 표면 거칠기의 보정이 필요하다. 그러나 본 연구에서는 우선 접촉 표면이 완전 매끄러운 형태에서 미끄럼 운동을 하고  $\sin$  파형의 주기함수 하중조건에서 유막 두께와 유막 압력의 변화량을 알아본다.

이때 접촉 압력이 매우 크므로 유막 압력에 의한 접촉 표면의 탄성 변형이 일어나며, 그 변형량은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$h^*(x, y) = h_0^*(t) + \frac{x^{*2}}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x^* - x^*| p^* dx^* \quad (2)$$

다음의 무차원 변수를 이용하여 식(1)을 무차원화 하여 선접촉의 윤활유막압력에 대한 레이놀즈 방정식은 식(4)와 같다.

$$x^* = \frac{x}{a}, p^* = \frac{p}{p_h}, h^* = \frac{hR_s}{a^2}, \eta^* = \frac{\eta}{\eta_0}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, t^* = \frac{tu_s}{a} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left( \xi \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial t^*} = 0 \quad (4)$$

여기서

$$\xi = \frac{\rho^* h^{*3}}{\eta^* \lambda} \text{ 이며 } \lambda = \frac{12u_s \eta_0 R_s^2}{a^3 p_H} \text{ 이다.}$$

압력에 대한 윤활유의 점도 변화는 Roleands 압력-점도 변화의 관계식(5)을 사용하였으며, 압력에 대한 윤활유의 밀도 변화는 Dowson-Higgison (6)관계식을 사용하였다.

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = 10^{-(1.2 + \log \eta_0)[1 - (1 + p/2000)^{0.7}]} \quad (5)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0.6p}{1 + 1.7p} \quad (6)$$

유막 압력이 상당히 커지는 Hertz 접촉 부위에서는 접촉압력에 의한 점도의 과도한 증가와 유막두께의 감소로  $\xi$ 의 값이 매우 작은 값으로 접근하게 된다. 이러한 영역에서 수치적으로 불안정한  $\xi$ 값에 의하여 안정적인 수렴해를 구할 수 없게 된다. 특히 동하중 조건에서 접촉 면적에서 나타나는 유막 압력은 하중지력의 시간 변화량에 대한 값 ( $\partial(\rho h)/\partial t$ )도 고려해야 하는데, 이것 또한 안정적인 수렴해를 얻기 어렵게 한다. 하중이 시간  $\Delta t^*$ 의 간격을 갖고 변화에 따라 유막 압력과 유막 두께는  $\partial(\rho h)/\partial t$ 의 이산화를 다음과 같이 함으로써 처리한다.

$$\left. \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial t^*} \right|_{k,i,j} = \frac{(\rho^* h^*)|_{k,i,j} - (\rho^* h^*)|_{k-1,i,j}}{\Delta t^*} \quad (8)$$

각각의 시간 간격에서 비선형적인 요소에 의한 수렴성을 증가 시키기 위한 다중차원 다중격자 방법을 적용하는데[4,5,6], 격자점의 크기를 조정한 격자 차원이 인접한 다른 계산영역에서의 상호연관성을 이용하는 관계를 이용한다[6].

### 3. 고하중 조건에서의 수렴해를 위한 분배 이완법(distributive relaxation)의 적용

Hertz접촉영역 바깥 부분과 안쪽 부분에서의 식(4)의  $\xi$ 의 값은 매우 큰 차이를 보이는데, 이를 위한 수치 해석법은 여러 가지 방법으로 다루어지고 있다. 특히 압력 변화에 의한 윤활유의 비선형 점도 특성 때문에 수렴 안정성이 크게 떨어지게 되어 이를 안정적으로 다룰 필요가 있다. Newton-Raphson 방법도 비교적 수렴성이 좋으나 Hertz 접촉 영역부분과 그렇지 않은 부분의 경계에서처럼 급격한 압력 변화가 있는 부분은

고하중하에서는 수렴성이 매우 떨어진다. 이를 해결하기 위하여 비선형 미분 방정식에 탁월한 수렴 안정성을 보여주는 다중차원 다중격자 방법(multigrid multi-level method)으로 본 연구에서 추구하는 수렴 안정성을 해결한다. 특히 점도의 압력 영향을 많이 받는 Hertz 접촉 부분에서는 Jacobi분배 이완법 (Jacobi distributive relaxation)의 적용으로 수렴 안정성을 더욱 증진하며, 그 이외의 영역에서는 Gauss-Seidel 이완법을 적용한다.

Hertz 접촉 이외의 영역에서는

$$\bar{p}_i^h = \bar{p}_i^* + \left( \frac{\partial L_i^h}{\partial p_i} \right)^{-1} r_i \quad (9)$$

의 형태로 압력 부분을 다루며, 여기서

$$\begin{aligned} r_i = & -(\xi_{i-1,2} \bar{p}_{i-1} - (\xi_{i-1,2} + \xi_{i+1,2}) \bar{p}_i + \xi_{i+1,2} \bar{p}_{i+1}) / \Delta x^{*2} \\ & + (\tilde{\rho}_i^* \tilde{h}_i^* - \tilde{\rho}_{i-1}^* \tilde{h}_{i-1}^*) / \Delta t^* \\ & + (\tilde{\rho}_i^{*new} \tilde{h}_i^{*new} - \tilde{\rho}_i^{*old} \tilde{h}_i^{*old}) / \Delta t^* \end{aligned} \quad (10)$$

이고,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial L_i^h}{\partial p_i} \right) = & -(\xi_{i-1,2} + \xi_{i+1,2}) / \Delta x^* \\ & + \frac{1}{\pi} (\tilde{\rho}_i^* K_{i,i}^{hh} - \tilde{\rho}_{i-1}^* K_{i-1,i}^{hh}) / \Delta x^* \\ & + \frac{1}{\pi} (\tilde{\rho}_i^* K_{i,i}^{hh} - \tilde{\rho}_{i-1}^* K_{i-1,i}^{hh}) / \Delta t^* \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

Hertz 접촉 영역에서는

$$\bar{p}_i^h = \bar{p}_i^* + \left( \frac{\partial L_i^h}{\partial p_i} - \frac{\partial L_{i-1}^h}{\partial p_{i-1}} \right)^{-1} r_i \quad (12)$$

이며, 여기서

$$\begin{aligned} r_i = & -(\xi_{i-1,2} \bar{p}_{i-1} - (\xi_{i-1,2} + \xi_{i+1,2}) \bar{p}_i + \xi_{i+1,2} \bar{p}_{i+1}) / \Delta x^{*2} \\ & + (\tilde{\rho}_i^* \tilde{h}_i^* - \tilde{\rho}_{i-1}^* \tilde{h}_{i-1}^*) / \Delta t^* \\ & + (\tilde{\rho}_i^{*new} \tilde{h}_i^{*new} - \tilde{\rho}_i^{*old} \tilde{h}_i^{*old}) / \Delta t^* \end{aligned} \quad (13)$$

이다.

계산영역에서  $\xi$ 의 값에 따라 유막 압력에 대한 시스템 방정식은 식(9)과 식(12)에 의하여 결정되며, 상대적으로  $\xi$ 가 작은 경우 Jacobi 이완법이 적용되는 점이 기존의 수치 해석 상의 질차와 다르다.

### 4. 결 과

본 연구에서 사용한 입력 조건은 작용하중 및 속도를 일반적인 기계요소들의 접촉조건에 대한 기본적인 크기로 설정하고, 이 기준에서 진폭이 다양하게 변화하는 조건에 대한 탄성유체윤활 유막에 대한 특성을 규명한다. 많은 정밀 기계요소에서는 접촉 작용하중과 속도가 불규칙적으로 나타나지만 본 연구에서는 작용하중과 속도가 sine 파형으로 변함에 따라 나타나는 탄성유체윤활 유막의 크기 및 형태, 그리고 유막 압력의 분포를 알아보았다. 작용하중 및 접촉속도의 변화는 다음과 같이 입력하였다.

$$W^* = W_{base}^* + k \times W_{base}^* \sin(t^*/T) \tag{14}$$

$$U^* = U_{base}^* + k \times U_{base}^* \sin(t^*/T) \tag{15}$$

여기서 작용하중과 속도는 공학적으로 의미가 있을 만큼 충분히 크게 작용하는 영역 ( $p_H > 1.5 \text{ GPa}$ )에서 설정하였으며, 크기 변화폭  $k$ 는  $W_{base}^*$ ,  $U_{base}^*$ 의 20~60% 범위에서 설정하였다.

이렇게 설정한 이유는 이미 알려진 접촉 작용하중 및 속도에 대한 유막 압력 및 유막 두께의 변화를 관찰 하면 동하중에 대한 탄성유체윤활의 특성이 정상상태의 경우와 어떤 경향의 차이점을 보여 주는지 쉽게 알아 볼 수 있기 때문이다. 이러한 계산 결과는 보다 복잡하게 작용하는 접촉 요소의 내구성 및 신뢰성 예측에 중요한 정보를 제공하리라 예상한다.

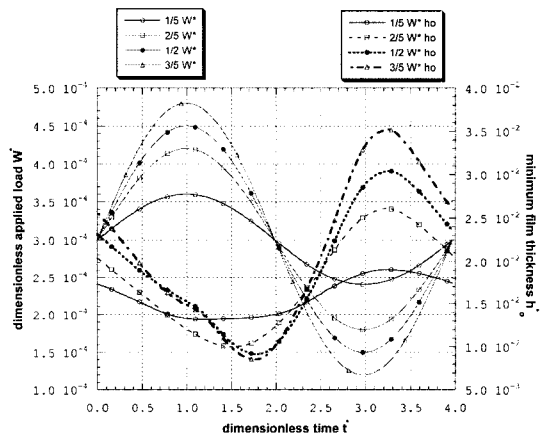
해석결과 동하중 조건과 정하중 접촉에서 동일한 접촉하중 및 접촉 속도일 때 탄성유체윤활 유막 두께와 유막 압력을 서로 비교하였다. 이것은 레이놀즈 방정식에서의 비정상 상태를 나타내는 항인  $\partial(\rho h)/(\partial t)$ 의 영향을 고찰 할 수 있는 부분이며, 많은 연구가 이 부분을 고려하지 않은 조건에서 계산 과정을 수행하고 있다. 따라서 접촉하중 및 속도에 대한 비정상 상태 조건의 영향을 고려하는 것이 실제 운동상황을 고려하는 결과

**Table 1. Material Parameters for line contact EHL analysis**

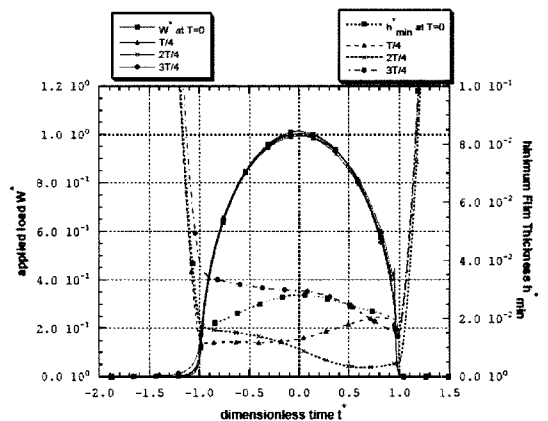
pressure viscosity coefficient	$\alpha = 2.275 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
viscosity at ambient pressure	$\eta_0 = 0.0411 \text{ Pa}$
equivalent modulus	$E^* = 2.20 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
curvature of contact material	$R = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$

를 얻을 수 있게 된다. Table 1은 본 해석에서 사용한 윤활유와 접촉 물질의 형상 및 특성인자의 내용이다.

Fig. 2는 접촉 속도는 일정하게 유지하며 ( $U^* = 1.0 \times 10^{-11}$ ) 기본 하중이 Hertz 접촉압력으로 1.5 GPa 일 때 하중의 크기를 시간에 따라 변화 시킴에 따라 나타나는 최소 유막 두께의 크기 변화를 나타낸 것이다. 하중이 커짐에 따라 최소 유막 두께의 크기는 작아지며, 하중이 작아지면서 최소 유막 두께는 커지는 일반적인 경향을 잘 나타내주고 있다. 그러나 하중의 크기 변화가 커짐에 따라 ( $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ ) 이러한 경향은 규칙적인 형태를 보여주지 않는다. 그 이유는 Fig. 3에서 보이듯이 정상상태의 조건에서 접촉영역부분에 평탄하게 나타나는 유막 두께의 일반적인 현상이 비정상상태의 접촉하중 조건에서는 하중 변화에 따라 최소 유막 두께



**Fig. 2. Variation of minimum film thickness of transient condition under  $p_H = 1.519 \times 10^9 \text{ GPa}$  and  $U^* = 1.0 \times 10^{-11}$ .**



**Fig. 3. Variation of film thickness shape of transient condition under  $p_H = 1.519 \times 10^9 \text{ GPa}$ ,  $W^* + 1/2 W^* \sin(t^*/T)$  and  $U^* = 1.0 \times 10^{-11}$ .**

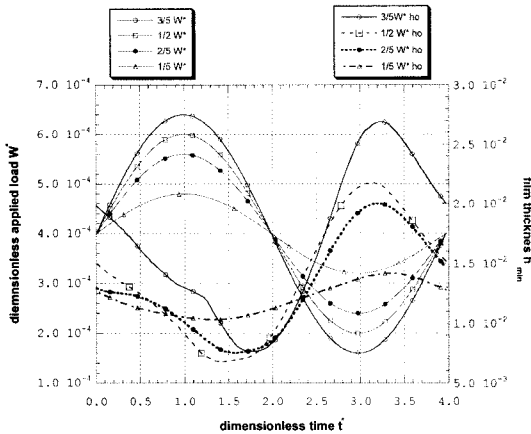


Fig. 4. Variation of minimum film thickness of transient condition under  $p_H=1.759 \times 10^9$  GPa and  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ .

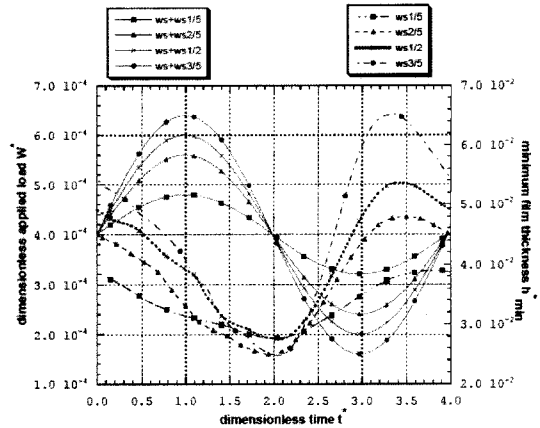


Fig. 6. Variation of minimum film thickness of transient under  $p_H=1.759 \times 10^9$  GPa,  $U^*=5.0 \times 10^{-11}$ .

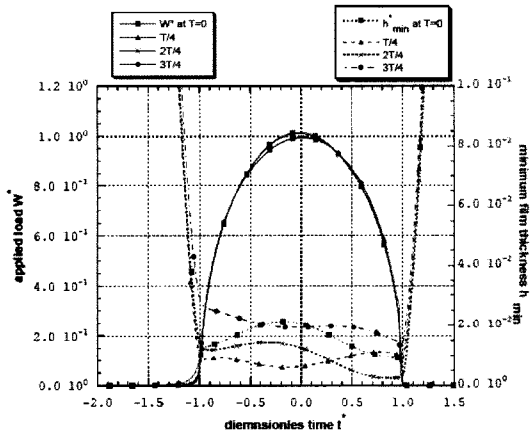


Fig. 5. Variation of film thickness shape of transient condition under  $p_H=1.759 \times 10^9$  GPa,  $W^*=3/5W^* \sin(t/T)$  and  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ .

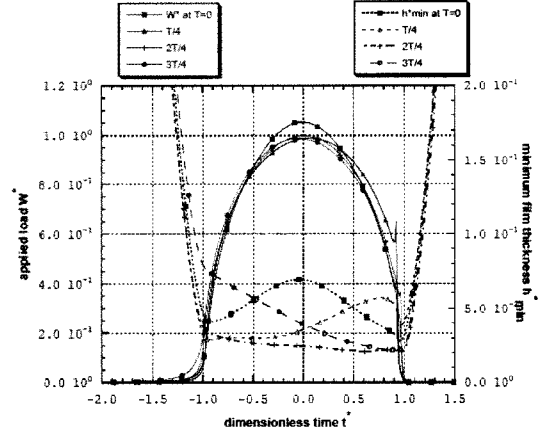


Fig. 7. Variation of film thickness shape transient under  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,  $W^*=1/2W^* \sin(t/T)$  and  $U^*=5.0 \times 10^{-11}$ .

의 위치 및 분포도 매우 다르게 나타나게 때문이다. 이러한 경향은 하중의 변화가 커지는 순간에 특히 두드러지게 나타난다. 하중크기가 변하는 비정상상태의 접촉조건에서는 전체 주기시간 T중에서 처음 ( $T=0, T/4, T/2, 3T/4$ )의 각 순간에 나타나는 유막 두께의 분포 경향을 보면 똑같은 하중크기를 갖지만 하중이 늘어나는 순간의 ( $T=0$ )과 하중이 줄어드는 순간 ( $T/2$ )의 유막 두께 형태는 유막 두께의 크기 뿐만 아니라 분포도 다르게 나타난다. 이러한 경향은 접촉 속도의 크기 및 변화율에도 매우 민감하게 영향을 받는다.

기본 하중의 크기가 커진 경우도(Fig. 4, 5,  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ ) 앞의 설명을 적용할 수 있다. 그리고 속도가 커진 경우(Fig. 6, 7,  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,

$U^*=5.0 \times 10^{-11}$ )에도 접촉 속도가 크기 때문에 전반적으로 유막 두께가 크게 나타나는 경향을 제외하고는 앞의 설명과 같이 유막 거동의 성향은 같다. 그렇지만 정상상태에서처럼 작용하중 및 속도에 따라 최소유막 두께가 점진적으로 변화하는 경향과 유막 분포가 접촉면에 평탄하게 나타나는 경향은 보여지지 않고 있다.

그러나 작용하중을 일정하게 할때 접촉속도의 크기를 변화시킨 경우 (Fig. 8, 9) 작용하중이 변화할 때의 경우와는 다르게 접촉속도의 크기 변화가 최소유막두께에 일정한 형태로 영향을 준다. 이와 같이 작용하중의 크기를 고정하고 접촉속도를 변화시킬 경우 접촉속도 변화 주기의 처음과 끝에는 접촉 속도가 같더라도 속도의 크기 변화가 클 때의 최소유막두께가 속도 변화폭이 커짐에 따라 크게 나타나며 비교적 규칙적인

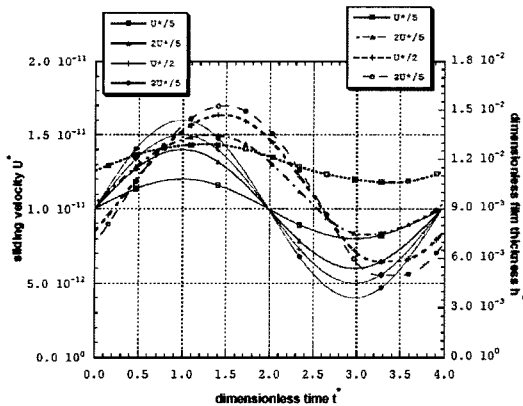


Fig. 8. Variation of film thickness shape transient under  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ .

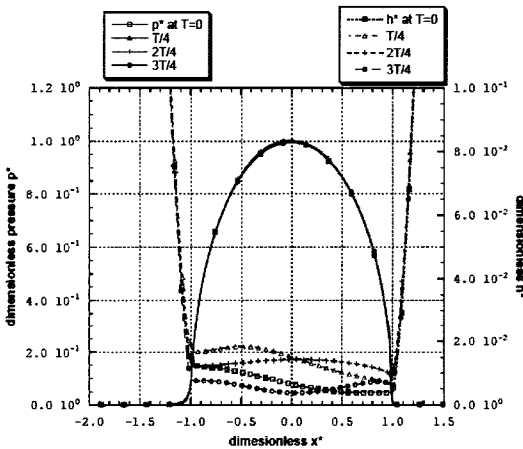


Fig. 9. Variation of film thickness shape transient under  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ ,  $U^*+1/2U^* \sin(t/T)$ .

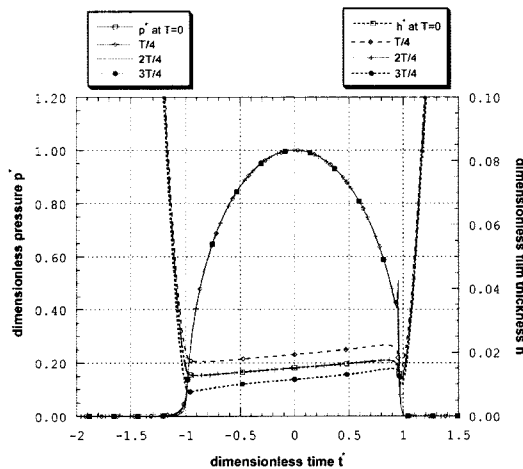


Fig. 10. Variation of film thickness shape steady under  $p_H=1.7549 \times 10^9$  GPa,  $W'+3/5W'$ ,  $U^*=1.0 \times 10^{-11}$ .

경향을 보여준다.

접촉 하중이 변화할 때와 동시에 접촉 속도가 변화하는 경우는 정상상태의 유막두께 형태 및 크기 (Fig. 10)의 경우와 달리 매우 다른 형태를 보여주고 있다. 일반적인 정밀 기계요소s의 접촉 현상은 접촉하중과 접촉속도가 매우 급격하게 동시에 변화하기 때문에 이러한 두 가지 주요 접촉 인자 (접촉 하중, 접촉 속도)를 고려해야 한다.

#### 4. 결 론

본 연구는 일반적인 정상상태의 탄성유체윤활 해석에서 보여지는 윤활유막의 크기 및 분포가 작용하중과 접촉 속도의 크기가 변화할 때 비정상상태의 경우에서는 이들 크기 및 분포가 상이하게 나타나는 특성을 선 접촉 탄성유체윤활 해석을 통하여 규명하였다. 이러한 연구 내용은 가혹하게 불규칙 접촉운동을 하는 정밀기계요소s의 내구성 및 성능향상에 대하여 위한 접촉 요소s의 표면 강도 설계 및 형상, 재질 등의 설계요소와 윤활절도선정에 대한 중요한 정보를 제공한다.

#### 후 기

본 연구는 국제공동연구 협력기관지정연구사업(D00013, GACR) 및 국민대학교 연구지원(2007)으로 수행되었음.

#### 참고문헌

- Houpert, L. and Hamrock, B. J., "Fast Approach for Calculating Film Thickness and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads", *J. of Tribology*, Vol. 108, pp. 411-420, 1986.
- Hamrock, B.J., et al., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication 2<sup>nd</sup> ed.*, Markel Dekker, ISBN 0824753712, 2004.
- Brandt, A., "Multilevel Adaptive Solutions to Boundary Value Problems", *Math. Comp.*, Vol. 31, pp. 333-390, 1977.
- Dowson, D., Taylor, C. M. and Zhu, G., "A Transient Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of a Cam and Follower", *Journal of Physics: Applied Physics*, Vol. 25, pp. A-313-A320, 1992.
- Venner, C. H., Ten Napel, W. E. and Bosma, R., "Advanced Multilevel Solution of the EHL Line Contact Problem", *Journal of Tribology*, pp. 426-432, 1990.

6. Lubrecht, A. A., "The Numerical Solution of Lubricated Line and Point Contact Problem Using multi-grid Techniques", *Ph.D. thesis, University of Twente*, 1987.
7. Ehret, P., Dowson, D., Taylor, C. M. and Wang, D., "Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Point Contact Lubricated by Newtonian Fluids using Multigrid Methods", *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 211, pp. 493-508.