

## 민감도 함수의 최대치 제어를 통한 강인제어

## Robust Control via Peak Control of Sensitivity Function

서 상 민\*  
(Sang Min Suh)

**Abstract:** This article describes a robust control method by using peak control of a sensitivity function in the state-feedback control systems. This method apparently reduces the peak, and as a result makes closed loop systems more stable. The designed closed loop systems also make the response to an external step disturbance more fast with a lower undershoot. At the conclusion, it is verified that the proposed method enhances robust stability and robust performance to parametric uncertainties through  $\mu$ -plot.

**Keywords:** maximum peak criteria, robust performance, robust stability, stability margin, transient response, voice coil motor

## I. 서론

여러 제어 기법들 중에서 상태 추정기(state estimator)를 이용한 상태 궤환 제어기는 널리 사용되고 있는 방법중의 하나이다. 그 이유는, 이 방법이 트래킹 제어(tracking control)뿐만 아니라, 생성된 상태변수를 사용하면, 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control)나 PTOS (Proximate Time Optimal Servo mechanism)와 같은 탐색 제어(seek control), 또는 ILC (Iterative Learning Control)등과 같은 상태변수를 기반으로 하는 여러 제어기법들을 동시에 사용할 수 있게 하기 때문이다[6].

이 논문에선, 여러 가지 장점을 갖는 상태 궤환 제어시스템을 그대로 유지하면서도 모델 불확실성에 대하여 강인성(robustness)을 증가시키는 새로운 방법을 제시한다. 이를 위하여 병렬제어구조[2,5,6]를 사용한다. 이 구조에서는, 전체 페루프 시스템은 두 개의 독립적인 함수로 표현될 수 있는데 [2], 이러한 특징을 이용하여 대수적인 방법(algebraic method)을 이용한 새로운 외란 제거 방법[5]과 안정도 여유가 고려된 주파수 가중함수 설계 방법과 등가 루프 형성법(equivalent loop shaping)[6]이 제시되었다. 기존의 방법[5,6]들과는 다르게, 여기서는 모델 불확실성이 존재하는 플랜트에 대하여 강인한 시스템을 설계하는 방법을 제시한다. 우선, 최대치정리(maximum peak criteria)[4]를 도입하여, 민감도 함수의 최대값을 낮춤으로써 안정도 여유(stability margin)를 근본적으로 증가시킬 수 있다는 것을 보이며, 최대값을 낮추기 위한 방법으로 선형 행렬 부등식을 기반으로 하는  $H_\infty$  제어기[1]를 제안한다. 모의실험을 통하여, 안정도 여유가 증가함에 따라, 외란에 대한 응답의 언더슈트가 작아지며 더욱 빠르게 정상 상태에 도달함을 보임으로써, 과도응답이 개선됨을 보인다. 마지막으로, 플랜트에 모델 불확실성이 존재할 때, 제안하는 방법을 이용하면 강인안정(robust stability)과 강인성능(robust performance)이 동시에 개선된다는 것을  $\mu$ -선도를 이용하여 증명한다.

## II. 모델링과 상태 궤환 제어기 설계

플랜트의 주파수특성은 LDV (Laser Doppler Vibrometer)과 동적 신호 분석기(dynamic signal analyzer)를 이용하여 측정하

고, 이를 이용하여 플랜트의 전달함수를 구한다. 여기서 사용된 플랜트는 하드디스크에서 사용되는 VCM (Voice Coil Motor) 구동기로서 다음과 같이 모델링이 된다.

$$G(s) = \frac{K_t}{J_a} \frac{1}{s^2 + (B_d/J_a)s + K_s/J_a} \cdot \frac{\omega_r^2}{s^2 + 2\zeta_r\omega_r s + \omega_r^2} \quad (1)$$

식 (1)에서 우측 첫째 항과 둘째 항은 그림 1에서 2차 모델인 강성체(rigid body)  $G_{nom}$  을 나타내며, 이것은 제어기 설계에 사용된다. 그리고, 셋째 항은 플랜트의 진동모드를 표현하는 것으로서, 응답을 분석하고 해석할 때는 이 진동모드까지 고려한 4차 모델을 사용한다. 여기서,  $K_t$ ,  $J_a$ ,  $B_d$ ,  $K_s$ ,  $\zeta_r$ ,  $\omega_r$  은 각각 토크상수, 관성, 저주파 영역의 제동상수, 스프링상수, 고주파 공진모드의 제동상수와 그 공진주파수를 나타낸다.

우선, 상태 추정기 기반의 상태 궤환 제어기를 설계하기 위하여  $G_{nom}$  을 다음과 같은 상태공간 표현식으로 표현한다.

$$G_{nom} := \begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (2)$$

여기서,  $G_{nom}$  은 2차 강성체이므로  $A_p \in R^{2 \times 2}$ ,  $B_p \in$

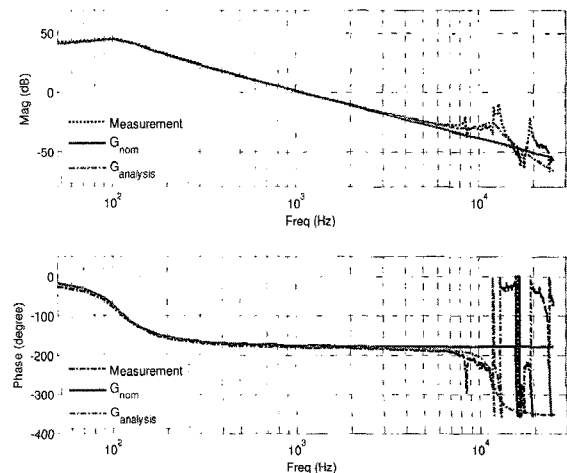


그림 1. 플랜트 모델링.

Fig. 1. Plant modeling.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 3. 6., 수정: 2009. 4. 27., 채택확정: 2009. 9. 30.

서상민: 삼성전자 스토리지 사업부(sangminsuh@hanmail.net)

$R^{2 \times 1}$ ,  $C_p \in R^{1 \times 2}$  이다. 그러면, 연속시간영역에서 추정기는 다음과 같이 주어진다[3].

$$K := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) + L(y(t) - C_p \hat{x}(t)) \\ u(t) = -F \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

여기서,  $L, F$  는 각각 추정기 이득과 상태 궤환 제어기 이득이며, 극점 배치법을 이용하여 구한다. 그러나, 여기서 설계된 추정기 이득과 제어기 이득은 공칭 모델인  $G_{nom}$  에 대한 이득 값이기 때문에, 모델 불확실성이 존재하는 경우 어떠한 성능이 나올 지는 일반적으로 알 수가 없다.

### III. 민감도 함수의 최대치 제어

이 장에선, 기존의 자료를 이용하여 민감도 함수의 최대값과 안정도 여유와의 관계를 설명한다. 그리고, 그 최대값을 낮춤으로써 안정도 여유도 증가시켜, 모델 불확실성에 대한 강인 제어시스템을 설계 할 수 있음을 보인다. 그리고 마지막으로, 민감도 함수의 최대값을 낮추기 위한 방법을 제시한다.

#### 1. 민감도 함수와 안정도 여유와의 관계

두 파라미터 사이의 관계는 아래의 식으로 간단히 요약된다[4].

$$GM \geq \frac{M_s}{M_s - 1}, PM \geq 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{1}{2 \cdot M_s} \right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4)$$

여기서,  $GM$ ,  $PM$ ,  $M_s = \max |S(j\omega)|$  은 각각 계인여유, 위상여유, 그리고 민감도 함수의 최대값을 나타낸다. 즉, 식 (4)는  $M_s$  가 작을수록, 안정도 여유는 증가한다는 것을 의미한다. 예를 들어서, 최대 안정도 여유는  $M_s = 1$  일 때이며, 안정도 여유로서 최소한  $GM = \infty$ ,  $PM = 60^\circ$  를 보장한다. 따라서, 만약  $M_s$  를 낮춘다면, 안정도 여유는 본질적으로 증가할 것이며, 플랜트 불확실성에 대한 강인한 시스템을 설계할 수 있게 된다.

#### 2. 민감도 함수의 최대값 감소 제어

이 논문에서는  $K_1$  이라는 새로운 동적 제어기를 추가하여 전체 민감도 함수의 최대치를 낮추고, 이것을 통하여 안정도 여유를 증가시키고자 한다.

그림 2에서 민감도 함수( $S = z/d$ ) 는 다음과 같이 계산된다.

$$S = \frac{1}{1+GK} \cdot \frac{1}{1+G_1K_1} = S_0 \cdot S_1 \quad (5)$$

여기서  $S_0$  는  $K$  만으로 제어할 때의 민감도 함수를 나타내

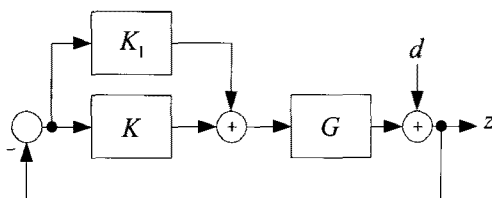


그림 2. 병렬 제어 구조.  
Fig. 2. Parallel control structure.

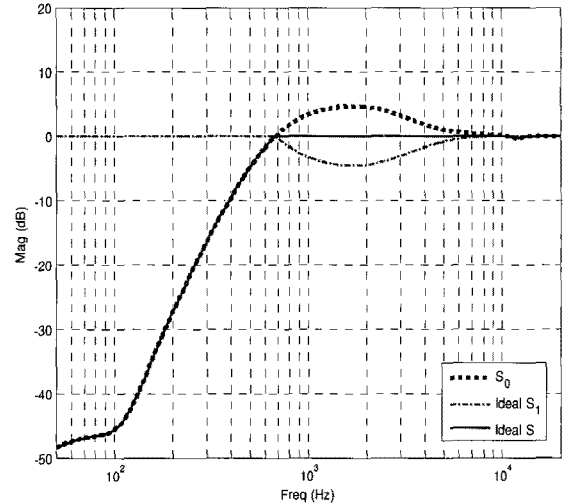


그림 3.  $S_0$ , 이상적인  $S_1$ 과  $S$ .  
Fig. 3.  $S_0$ , ideal  $S_1$  and  $S$ .

고,  $S_1$  은 새로운 동적제어기 ( $K_1$ ) 을 추가함으로써 생기는 부가적인 함수이다. 그리고  $G_1$  은  $G_1 = (1+GK)^{-1}G$  으로 표현된다. 식 (5)가 의미하는 것은  $S_1$  을 이용하여  $S_0$  를 원하는  $S$  로 변형할 수 있음을 의미한다. 그림 3은 더 낮은 최대치를 갖는  $S$  를 만들기 위한  $S_1$  의 설계 방향을 도식적으로 보여주고 있다.

즉,  $S_0$  의 주파수 응답에서  $|S_0| > 0dB$  인 주파수 영역만을 추출하여 새로운 주파수 함수로 정의한 후, 그 함수의 역(inverse)과  $S_1$  이 일치하도록  $G_1$  설계한다. 그러면, 최종적으로 설계된  $S$  는  $S_0$  보다 분명히 낮은 최대치를 가질 수 있다. 그림 3은 이상적인 경우의 설계 개념을 보여주고 있다. 이제, 민감도 함수의 최대치를 낮추는 문제는  $S_1$  을 어떻게 설계하느냐의 문제로 귀결된다. 그리고, 이것은  $S_1 = 1/(1+G_1K_1)$  을 설계하는 것을 의미하며, 등가적으로 그림 4의 가상적인 시스템을 설계하는 것과 동일하다.

이 논문에서는 전체 페루프 시스템을 항상 안정화시키는 [6] 선형 행렬 부등식 기반의  $H_\infty$  제어기를 사용한다. 그리고, 그림 4의  $1/(1+G_1K_1)$  이 ‘이상적인  $S_1$  ’의 형상을 갖기 위해선,  $W_1^{-1} = \text{ideal } S_1$  이 되도록  $W_1^{-1}$  을 설계하여야 한다.

그런데, 만약에 정확히  $W_1^{-1} = \text{ideal } S_1$  이 되도록 설계하려

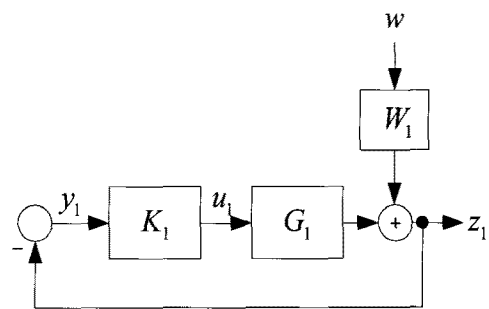


그림 4.  $S_1$  설계를 위한 가상 제어 구조.  
Fig. 4. Fictitious control structure for  $S_1$  design.

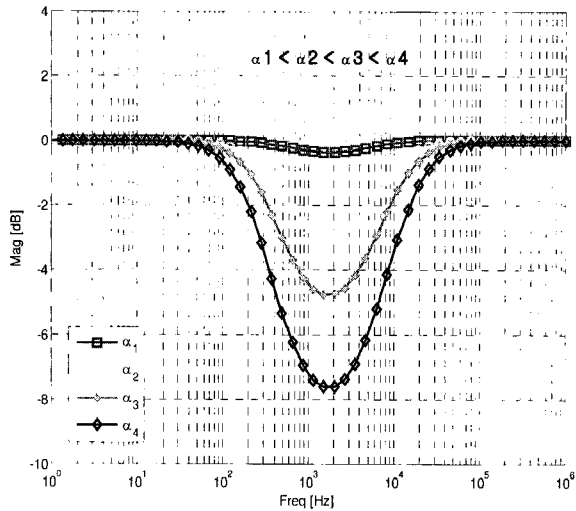


그림 5.  $\alpha$ 의 변화에 따른  $W_1^{-1}$ .

Fig. 5.  $W_1^{-1}$  with various  $\alpha$ 's.

고 한다면, 설계된  $W_1^{-1}$ 은 거의 무한대 차수(order)의 전달 함수가 생성되어  $K_1$ 도 무한대 차수의 제어기가 설계되어야만 한다. 그러나, 이러한 고차의 주파수 가중함수를 이용하면  $H_\infty$  제어기 합성은 실제로 이루어지지 않는다. 그러므로, 0dB 이상인  $S_0$  부분을 정확하게 0dB로 만들 수 없고 또한 만들 필요도 없다. 즉, III장 1절에서 보인 원래의 설계방향을 고려할 때, 민감도 함수의 최대치만 낮추면 된다. 최적화 시간과  $K_1$ 의 차수를 고려할 때 주파수 가중함수의 차수는 작을수록 좋다. 그러므로, 차수는 최소가 되면서도 민감도 함수의 최대치와 형상이 매개변수화(parameterization)되어 있는 주파수 가중함수의 수식이 필요하다. 그림 3에서 표현된 '이상적인  $S_1$ '의 형상은 대역제거필터(band rejection filter)와 유사한 형상을 갖는다. 따라서,  $W_1^{-1}$ 은 최소 차수인 2차 대역제거필터로 표현할 수 있고, 또한 민감도 함수의 최대치가 매개변수화 되어 있는 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$W_1 = \alpha \cdot \frac{s + \omega_{c1}}{s + \omega_{c1} \cdot \alpha} \cdot \frac{s/\alpha + \omega_{c2}/\alpha}{s + \omega_{c2}/\alpha} \quad (6)$$

여기서,  $\omega_{c1}, \omega_{c2}$  ( $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ )은  $S_0$ 가 0dB를 만나는 두 실수 주파수를 의미하며,  $\alpha$ 는  $W_1$ 의 최대치를 조절할 수 있는 개인 변수이다.

그림 5는 고정된  $\omega_{c1}, \omega_{c2}$ 에 대하여  $\alpha$ 의 값을 변동시켰을 때  $W_1^{-1}$ 의 형상을 그린 것으로, 이 논문에선  $S_0$ 의 최대치에 해당하는  $\alpha_3$ 을 선택하였다.  $\alpha$ 가 변하면 주파수 가중함수인  $W_1^{-1}$ 의 특성도 변하며, 결과적으로  $S_1$ 의 형상도 변화시킬 수가 있다. 그리고,  $S_1$ 의 형상이 변화한다는 것은, 식 (5)에 의하여 최종적으로  $S$ 의 최대치를 조절할 수가 있음을 의미한다. 즉, 식 (6)은 민감도 함수를 낮추기 위한 최소 차수의 가중함수이다. 게다가,  $\omega_{c1}, \omega_{c2}$ 은 II에서 이미 구해진 값이므로, 설계자는 오로지  $\alpha$  값 하나의 변수만으로 주파수

가중함수를 설계할 수 있는 설계의 용이성도 함께 얻을 수 있다. 다른 제어 대상의 경우에 있어서,  $S_0$ 가 0dB를 2번이 아니라 여러 횟수를 지나갈 수 있다. 이러한 경우는, 상쇄시키고자 하는 주파수 영역을 표현한 여러 개의  $W_1$ 을 각각 설계하여 직렬로 구성한 후 이를 주파수가중함수로 사용한다.

이제,  $G_1$ 과  $W_1$ 을 이용한 선형 행렬 부등식 기반의  $H_\infty$  제어기  $K_1$ 을 구하기 위하여, 가상의 플랜트와 그 주파수 가중함수를 아래와 같은 상태공간 표현법으로 다시 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{W1} &= A_{W1}x_{W1} + B_{W1}w \\ y_{W1} &= C_{W1}x_{W1} + D_{W1}w \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{G1} &= A_{G1}x_{G1} + B_{G1}u_1 \\ y_{G1} &= C_{G1}x_{G1} + D_{G1}u_1 \end{aligned} \quad (8)$$

그리고, 식 (7)과 (8)을 이용하면, 그림 4의 페루프 시스템은 식 (9)로 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u_1 \\ z_1 &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u_1 \\ y_1 &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u_1 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $\dot{x} = [\dot{x}_{G1} \quad \dot{x}_{W1}]^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_{G1} & 0 \\ 0 & A_{W1} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{W1} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{G1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [C_{G1} \quad C_{W1}], \quad D_{11} = D_{W1}, \quad D_{12} = D_{G1}$$

$$C_2 = -[C_{G1} \quad C_{W1}], \quad D_{21} = -D_{W1}, \quad D_{22} = -D_{G1}$$

이다. 그리고, 식 (9)는 선형 행렬 부등식 기반의 제어기 설계를 위한 표준형이므로, 식 (10)과 같은 최적 동적 제어를 구할 수 있다[1].

$$\begin{aligned} \dot{x}_{K1} &= A_{K1}x_{K1} + B_{K1}y_1 \\ y_{K1} &= C_{K1}x_{K1} + D_{K1}y_1 \end{aligned} \quad (10)$$

#### IV. 주파수/시간 응답특성과 강인성 문제 비교 분석

이 장에선 설계된 민감도 함수와 개루프 시스템의 특성들을 서로 비교하여, 추가된 동적 제어기  $K_1$ 이 어떤 긍정적인 영향을 주는지 분석한다. 그림 6은 설계된  $S_1$ 이  $S_0$ 에 어떠한 영향을 주어서, 최종적으로  $S$ 이 어떻게 설계하는 과정을 보여주고 있다.

즉,  $S_1$ 이 그림 3의 '이상적인  $S_1$ '의 형상에 유사해짐에 따라, 최종적으로 설계된  $S$ 는  $S_0$ 보다 낮은 최대치를 갖는 민감도 함수가 설계되었다. 민감도 함수의 0dB 차단주파수는 695Hz에서 915Hz로 증가하였음에도 불구하고, 최대치 값은 5dB에서 1dB로 오히려 감소하였다. 이러한 민감도 함수의 최대치의 감소는 필연적으로 안정도 여유의 증가를 가져온다. 그림 7은 개루프 전달함수의 특성들을 보여주고 있다. 0dB 차단주파수는 1KHz로 동일함에도 불구하고, 개인 여유는 11.3dB에서 27.7dB로 증가하였고, 위상여유는 38도에서 55도로 증가하였다.

그리고, 이러한 상대 안정도의 증가는 외란에 대한 시간응

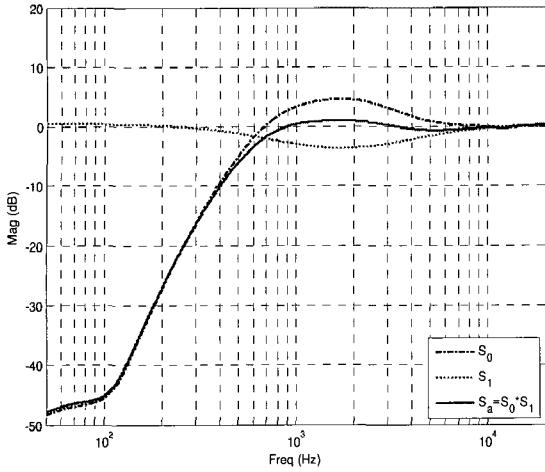


그림 6. 설계된  $S_0, S_1, S$ 의 비교.  
Fig. 6. Compared  $S_0, S_1, S$ .

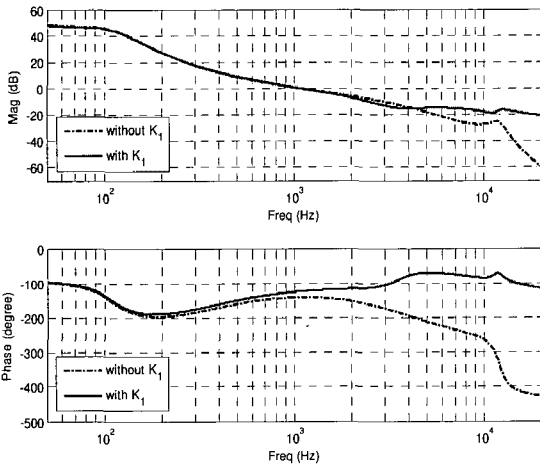


그림 7. 개루프 전달함수 비교.  
Fig. 7. Compared open loop transfer function.

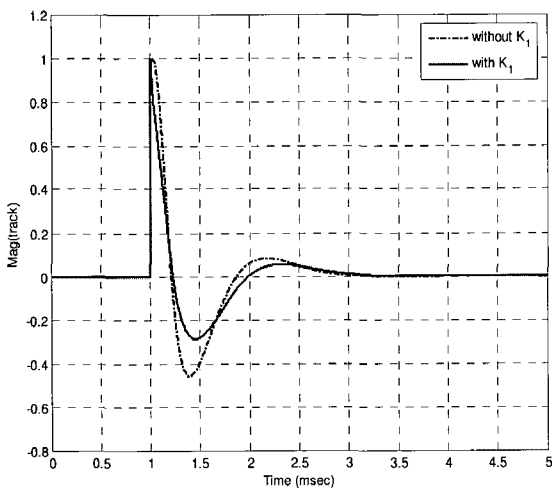


그림 8. 스텝 외란 응답.  
Fig. 8. Step disturbance responses.

답특성의 개선을 가져온다. 외란 제거 성능을 비교하기 위하여 스텝 외란 ( $d = u_s(t - 0.001)$ )을 플랜트 출력단(그림 2 참조)에 인가하여 그 응답특성을 그림 8에서 비교하였다.  $K_1$ 을 사용하였을 때, 더 작은 언더슈트(undershoot)를 가지고, 보

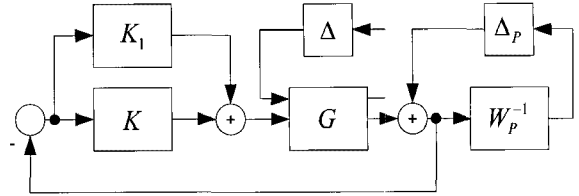


그림 9. 강인성 평가를 위한 개념도.  
Fig. 9. Conceptual diagram for robustness evaluation.

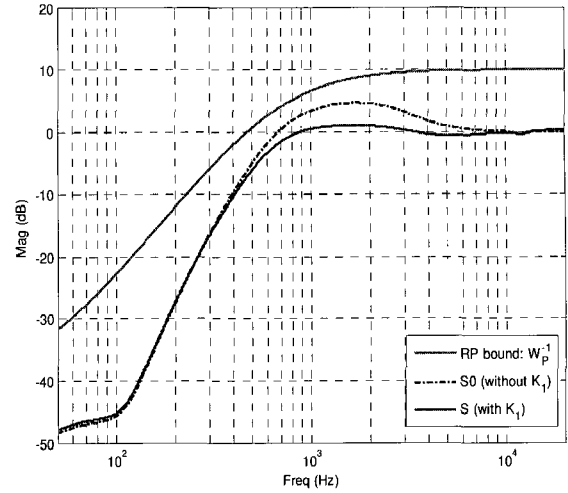


그림 10. 강인성능 경계와 설계된 민감도 함수들.  
Fig. 10. Robust performance(RP) bound and designed sensitivity functions.

다 빠르게 외란 응답을 정상상태로 안정화시킴을 알 수 있다. 이제, 모델 파라미터 불확실성이 존재할 때, 증가된 안정도 여유가 강인성 문제(강인안정과 강인성능)에 어떠한 영향을 주는지 분석한다. 우선 파라미터 불확실성을 표현하기 위하여, 플랜트의 정규화된 파라미터 변동 ( $\Delta$ )과 강인성능 평가를 위한 가상의 불확실성 ( $\Delta_p$ )을 추가하여 그림 9와 같은 불확실 시스템을 구성한 후 강인성 문제를 평가하였다[4]. 그 파라미터 불확실성으로서 각각  $K_t = \pm 19\%$ ,  $J_a = \pm 10\%$ ,  $B_d = \pm 18\%$ ,  $K_s = \pm 30\%$ ,  $\zeta_r = \pm 10\%$ ,  $\omega_r = \pm 11\%$ 와, 그림 10에서 보이는 것과 같은 강인성능 경계  $W_p^{-1}$ 을 이용하여 강인성 문제를 평가하였다.

그림 11은 최종적으로 평가된  $\mu$ -선도를 보이고 있는데 그 크기가 1보다 작으면 강인성이 보장된다는 것을 의미한다. 즉, 1보다 작으면 작을수록 더욱 강인하다는 것을 의미한다. 민감도 함수의 최대치 제어기  $K_1$ 을 사용하지 않았을 때, 강인안정성을 나타내는  $\mu$ -선도의 최대값은 1KHz에서 0.55인데 반하여, 강인성능은 1KHz에서 1.2로서 강인성능을 보장하지 못하고 있다. 그러나,  $K_1$ 을 사용하였을 때는, 강인안정성을 나타내는  $\mu$ -선도의 최대값은 700Hz에서 0.41이고, 강인성능은 700Hz에서 1.0로서 강인성능도 함께 보장하고 있다. 강인안정성의 경우는,  $K_1$ 을 사용하지 않아도 강인안정성에는 문제가 없다. 그러나,  $K_1$ 을 사용하게 되면 강인안정 최대치가 0.55에서 0.41로 감소하였고, 이것은 더욱 불확실한 시스템에 대하여도 안정할 수 있음을 의미한다. 이제,  $K_1$ 을 사용했을

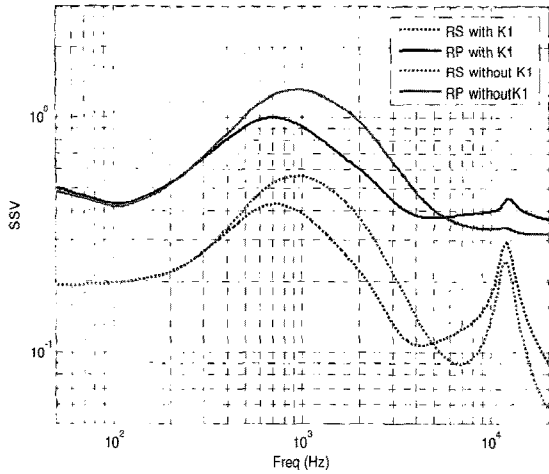


그림 11. 강인안정과 강인성능.

Fig. 11. Robust stability(RS) and robust performance(RP).

때와 사용하지 않았을 때에,  $\mu$ -선도의 최대값의 위치가 왜 이동하였는지를 고찰한다. 그림 10은 민감도 함수의 최대치 제어 했을 때( $S$ )와 하지 않았을 경우( $S_0$ )의 민감도 함수들을 동시에 나타내고 있다. 그리고, 이 두 함수로부터 강인성능 경계와의 거리가 가장 가까운 주파수는 각각 700Hz와 1KHz이다. 즉, 민감도 함수와 강인성능 경계와의 거리가 가장 가까운 주파수에서 강인성문제가 가장 취약하다는 것을 보인다.

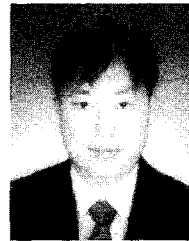
**V. 결론**

민감도 함수의 최대치를 제어함으로써 안정도 여유를 증가시켜서 강인한 시스템을 설계하는 방법을 제시하였다. 이 방법을 사용하면, 안정도 여유가 증가하며 외란 응답이 보다 빠르게 제거되었다. 또한, 제안하는 방법은 강인안정(robust

stability)과 강인성능(robust performance)을 동시에 향상시킨다는 것을  $\mu$ -선도를 이용하여 증명하였다.

**참고문헌**

- [1] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," *SIAM*, 1994.
- [2] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, 1985.
- [3] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4Ed., Prentice-Hall, 2002.
- [4] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley-Interscience, 1996.
- [5] S. M. Suh, D. H. Oh, and H. S. Lee, "Controller Design to Attenuate Effects of External Disturbances," *ASME /JSPS*, 2007.
- [6] S. M. Suh, "Unified  $H_\infty$  Control to Suppress Vertices of Plant Input and Output Sensitivity Functions," *IEEE Control System Technologies*, 2009. URL <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/tocpreprint.jsp?isnumber=4389040&Submit3=View+Articles&punumber=87>.



**서 상 민**

1969년 4월 15일생. 1991년 한양대학교 전자통신공학과(공학사). 1994년 한양대학교 전자통신공학과(공학석사). 2003년 한양대학교 전자통신전파공학과(공학박사). 2003년 한양대 우수 논문상 수상. 1994년~1999년 대우통신연구소 선임연구원. 2003년~현재 삼성전자 책임연구원. 현재 IEEE Control System Technologies 논문 심사 위원. 관심분야는 제어이론, 선형 행렬 부등식 기반의 최적 제어.