응용통계연구 (2009)
22(5), 937–942

보험 상품 파산 확률 근사 방법의 개선 연구

이혜선[1] · 최승경[2] · 이의용[3]

[1]숙명여자대학교 통계학과, [2]숙명여자대학교 통계학과, [3]숙명여자대학교 통계학과

(2009년 7월 접수, 2009년 8월 채택)

요 약

본 논문에서는 보험 상품의 잉여금(surplus)을 확률적으로 모형화한 후, 잉여금의 파산 확률과 이의 근사 공식들을 소개한다. 잉여금은 일정한 율(rate)로 들어오는 프리미엄(premium)에 의해 증가한다. 보험금 청구(claim)는 포아송 과정(Poisson process)을 따라 발생하고 보험금 청구가 있을 때마다 잉여금은 임의의 양(random amount) 만큼 줄어든다. 잉여금이 0이하로 떨어지면 파산(ruin)이 발생한다고 한다. 이와 같은 리스크(risk) 모형에서 파산 확률의 이론적 공식은 잘 알려져 있으나, 공식에 n차 공률(convolution)과 무한 합(infinite sum)이 포함되어 있어 실질적인 계산은 불가능하다. 본 논문에서는 잘 알려진 De Vylder의 근사 공식과 지수적인 근사 공식(exponential approximation)을 소개하고, 이들을 일반화한 새로운 근사 공식을 제안한다. 기존 근사 공식과의 수치적 비교를 통해 새로 제안된 근사 공식의 우월성을 보인다.

주요용어: 잉여금 확률과정, 포아송 과정, 리스크 모형, 파산 확률, 근사 공식.

1. 서론

보험은 동일한 위험을 하나의 보험 상품으로 하여 위험에 놓여 있는 불특정 다수인이 하나의 위험 단체를 구성하여 통계적 기초에 의해 산출된 보험료를 내고 기금을 형성하여 우연한 사고에 대해 보험금을 지급하는 것이다. 현대 보험 산업에서는 보험 상품의 가격에 영향을 미치는 다양한 금융, 경제적 환경 변수에 적극적으로 대응하고자 하는 움직임을 보인다. 기존의 예정 기초율로 인한 보험료 산출 방식에서 벗어나 2009년 10월부터 확률적인(stochastic) 보험료 산출 방식인 현금 흐름 방식(cash flow method)의 도입을 목표로 하고 있다. 또한 주가, 금리 환율 등 금융 시장에서 변동성이 증가함에 따라 보험회사의 자산과 부채가 다양한 리스크에 노출되어 있어, 보험회사의 평가 관리 시스템 역시 CAMEL 제도에서 RAAS(risk assesment and application system)로 변화하는 단계이다.

이와 같은 상황에서 보험 상품 리스크의 판단 기준이 되는 파산 확률의 연구는 필수적이 되고 있다. 이러한 파산 확률을 좀 더 쉽게 계산할 수 있는 근사 방법에 대한 연구 또한 중요성이 커지고 있다. 본 논문에서는 기존에 제시된 근사 공식들을 일반화하여 실제 파산 확률을 보다 가깝게 근사하는 새로운 근사 공식을 제시하고 기존 근사 공식들과 수치적으로 비교한다.

본 논문 2장에서는 먼저 잉여금 과정에서 파산 확률을 정의하고 기존에 연구된 주요 근사 방법들을 간단히 소개한다. 그리고 3장에서 본 논문에서 제시하는 새로운 근사 방법을 설명하고, 4장에서는 2장에서 소개된 기존의 근사 방법과 새로운 근사 방법을 수치적으로 비교하여 새로운 근사 방법이 기존 방법보다 실제 파산 확률에 더 근접함을 보인다.

본 연구는 숙명여자대학교 2008학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

[3]교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

2. 파산 확률과 근사 공식

이 장에서는 먼저 보험 사업에서 전형적으로 많이 쓰이는 연속 시간 잉여금 과정(surplus process)을 정의한다.

2.1. 잉여금 과정과 파산 확률

보험 상품의 잉여금은 $u > 0$에서 시작해서 단위 시간당 일정한 율 $c > 0$로 프리미엄이 들어오고, 고객의 보험금 청구가 발행할 때마다 임의의 양만큼 보험금이 지급된다. 여기서 보험금 청구의 발생 횟수는 발생률 $\lambda > 0$를 갖는 포아송 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$를 따르고, i번째 보험금 청구의 크기는 X_i이며 X_i는 평균이 $\mu > 0$이고 서로 독립이며 동일한 일반적인 분포 G를 갖는다. 또한 보험료율 c는 $c = (1+\theta)\lambda\mu$이며 여기서 $\theta > 0$는 상대적인 보완 부가급(relative loading factor)으로 θ로 인해 보험료율 c는 보험금 지급 비율인 $\lambda\mu$보다 크게 된다. 보험 상품의 잉여금 과정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

보험 상품의 잉여금 과정에서 잉여금 $U(t)$가 0보다 작게 되면 보험 상품이 파산한다고 말한다. 초기 잉여금이 u일 때 파산할 확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(u) = \Pr\{U(t) < 0, \text{ for some } t > 0 | U(0) = u\}$$

파산 확률 $\psi(u)$는 아래와 같이 주어짐을 보일 수 있다 (Klugman 등, 2004 참조).

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \overline{G}_e^{(k)}(u),$$

여기서 $\overline{G}_e(x) = 1 - G_e(x)$이고, $G_e(y) = 1/\mu \int_0^y \{1 - G(x)\}dx$는 G의 평형 분포(equilibrium distribution)이며, (k)는 k차 공률(k-fold recursive convolution)을 나타낸다.

보험금 크기의 확률 분포인 G가 명확하게 주어져도 파산 확률은 G의 평형 분포 G_e의 k차 공률과 무한 합으로 이루어져 있기 때문에 실질적인 계산이 불가능하다. 이 때문에 Cramér (1930), Hadwiger (1940), Lundberg (1964), Beekman (1969), De Vylder (1978), Grandell (1977, 1991), Tijms (1994) 등 많은 연구자들이 파산 확률을 근사하는 공식을 제안하였다. Grandell (2000)은 이렇게 다양한 근사 방법들을 비교하였다. 본 논문에서는 기존 파산 확률의 근사 방법들 중 우수함이 입증된 De Vylder의 근사 방법과 지수적인 근사 방법을 소개하고 이들을 일반화한 새로운 근사 방법을 제시한다.

2.2. De Vylder의 근사 방법

De Vylder (1978)가 제시한 근사 방법은 잉여금 과정에서 $X(t) = (1+\theta)\lambda\mu t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$라고 놓고, 지수분포(exponential distribution)를 보험금 크기의 확률 분포로 갖는 잉여금 과정 중 아래와 같이

$$E\left[X^k(t)\right] = E\left[\tilde{X}^k(t)\right], \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3.$$

$X(t)$와 3차 모멘트(moment)까지 일치하는 $\tilde{X}(t)$를 찾아 이에 해당하는 파산 확률을 구하고, 이를 실제 파산 확률의 근사 공식으로 쓰는 방법이다. 즉, $\tilde{X}(t) = (1+\tilde{\theta})\tilde{\lambda}\tilde{\mu}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{X}_i$, 여기서 $\tilde{X}_i$는 평균이

$\tilde{\mu}$인 지수확률변수이다. 위 조건을 만족하는 $\tilde{X}(t)$의 모수(parameter)들을 구하면 아래와 같다.

$$\tilde{\mu} = \frac{\zeta_3}{3\zeta_2}, \quad \tilde{\theta} = \frac{2\zeta_1\zeta_3}{3\zeta_2^2}\theta \quad \left(\text{그리고} \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\zeta_2^3}{2\zeta_3^2}\lambda\right),$$

여기서 ζ_k는 G의 k차 모멘트인 $E[X_1^k]$를 나타낸다. 따라서 $\tilde{X}(t)$를 갖는 잉여금 과정의 파산 확률은

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\tilde{\theta}} \exp\left\{-\frac{\tilde{\theta}u}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})}\right\}$$

로 주어지고, $\tilde{\mu}$와 $\tilde{\theta}$를 대입하면 아래와 같다.

$$\psi_{DV}(u) = \frac{3\zeta_2^2}{3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta} \exp\left\{-\frac{6\zeta_1\zeta_2\theta u}{3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta}\right\}.$$

De Vylder의 근사 공식의 특징은 보험금 크기가 지수 분포를 따르는 경우 실제 파산 확률 $\psi(u)$와 같게 된다.

2.3. 지수적인 근사 방법

지수적인 근사 방법(exponential approximation)은 복합 혼합 포아송 과정(compound mixed Poisson process)의 점근 분포(asymptotic distribution)를 이용하여 아래와 같이 주어진다 (자세한 유도 과정은 Grandell, 2000 참조)

$$\begin{aligned}\psi_E(u) &= \exp\left\{-1 - \frac{\theta u - \tau_1}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2\theta}}\right\} \\ &= \exp\left\{-1 - \frac{2\zeta_1\theta u - \zeta_2}{\sqrt{\zeta_2^2 + (4/3)\theta\zeta_1\zeta_3}}\right\},\end{aligned}$$

여기서, τ_k는 G_e의 k차 모멘트로

$$\tau_k = \frac{\zeta_{k+1}}{(k+1)\zeta_1}$$

이다.

3. 근사 방법의 개선

Cramér (1930)는 아래와 같은 파산 확률의 근사 공식을 제안하였다.

$$\psi_C(u) = Ce^{-\kappa u},$$

여기서, κ는 $1 + (1+\theta)\mu\kappa = M_X(\kappa)$를 만족하는 가장 작은 양의 실수해이고, $C = \mu\theta/[M_X'(\kappa) - \mu(1+\theta)]$이며, $M_X(t)$는 보험금 크기의 확률 분포 G의 적률 생성 함수(moment generating function)이다. Cramér의 근사 공식은 초기 잉여금 u가 커지면서 실제 파산 확률에 접근한다. 하지만 u가 작은 경우에는 실제 파산 확률과 많은 차이를 보인다.

Tijms (1994)는 이를 보완하기 위해 Cramér의 근사 공식에 지수 항 $C_1e^{-u/\alpha}$을 더하여 Cramér의 근사 공식을 확장하였다. Tijms의 근사 공식은

$$\psi_T(u) = C_1e^{-\frac{u}{\alpha}} + Ce^{-\kappa u}$$

이다. 여기서 C_1과 α는 다음 두 식을 만족하는 상수이다.

$$\psi_T(0) = \frac{1}{1+\theta} = \psi(0)$$
$$\int_0^\infty \psi_T(u)du = \int_0^\infty \psi(u)du$$

따라서, $C_1 = 1/(1+\theta) - C$로 주어지며, α는 아래와 같이 주어진다.

$$\alpha = \frac{\zeta_2/(2\mu\theta) - C/\kappa}{1/(1+\theta) - C}.$$

Tijms의 근사 공식은 $\psi_T(0) = \psi(0)$를 만족하여 u가 작은 경우에도 실제 파산 확률을 비교적 잘 근사한다. 본 논문에서는 Tijms의 아이디어를 이용하여 지수적인 근사 공식 $\psi_E(u)$를 확장하여 새로운 근사 공식을 제안한다. 먼저, 지수적인 근사 공식은 아래와 같이 주어지며, Cramér의 근사 공식 꼴로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\psi_E(u) &= \exp\left\{-1 - \frac{\theta u - \tau_1}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2\theta}}\right\} \\ &= \exp\left\{-1 + \frac{\tau_1}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2\theta}}\right\}\exp\left\{-\frac{\theta}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2\theta}}u\right\} = C'e^{-\alpha_1 u},\end{aligned}$$

여기서 $C' = \exp\{-1 + \tau_1/\sqrt{\tau_1^2+\tau_2\theta}\}$이고 $\alpha_1 = \theta/\sqrt{\tau_1^2+\tau_2\theta}$이다.
위의 식에 Tijms가 Cramér의 근사 공식을 확장하며 추가했던 지수 항을 추가하면 새로 확장된 근사 공식은 아래와 같다.

$$\psi_{TE}(u) = C_1' e^{-\frac{u}{\alpha_2}} + C'e^{-\alpha_1 u}$$

C_1'과 α_2은 Tijms의 근사 방법에서와 마찬가지로 다음 두 식

$$\psi_{TE}(0) = \frac{1}{1+\theta} = \psi(0)$$
$$\int_0^\infty \psi_{TE}(u)du = \int_0^\infty \psi(u)du$$

을 만족하게 잡는다. 즉, $C_1' = 1/(1+\theta) - C'$이 되며 $\alpha_2 = 1/C_1'(\tau_1/\theta - C'/\alpha_1)$이 된다.

4. 기존 근사방법과의 비교

본 논문에서는 상대 오차(relative error)를 이용하여 기존의 근사 방법들과 새로 제안된 근사 방법을 비교한다. 여기서 근사 공식 $\psi_A(u)$의 상대 오차는 아래와 같이 정의된다.

$$\varepsilon_A(u) = \frac{|\psi_A(u) - \psi(u)|}{\psi(u)} \times 100.$$

본 논문에서는 G가 형태 모수(shape parameter)는 3이고 평균이 1인 얼랑(Erlang) 분포인 경우에 파산 확률의 근사 공식들을 비교한다. 즉, 손실의 확률 밀도 함수(probability density function)는 아래와 같다.

$$g(x) = \frac{27x^2e^{-3x}}{2}, \quad x > 0.$$

표 4.1. 근사 공식들의 상대오차 비교

θ	u	$\psi(u)$	$\varepsilon_{DV}(u)$	$\varepsilon_E(u)$	$\varepsilon_{TE}(u)$
0.25	0.10	0.7834	2.4176	5.4247	0.4016
	0.25	0.7562	1.2682	4.1678	0.7544
	0.75	0.6577	0.3006	2.3124	0.5657
	1.25	0.5644	0.5208	1.8459	0.1522
	2.50	0.3826	0.4220	1.3476	0.8907
1	0.10	0.4744	5.9476	30.5055	1.1025
	0.25	0.4342	2.3911	24.2398	2.0787
	0.75	0.3033	2.6536	12.3368	3.3128
	1.25	0.2023	3.0258	6.4294	2.4283
	2.50	0.0709	0.5603	3.7388	4.2506
4	0.10	0.1839	9.2877	131.1914	14.7231
	0.25	0.1574	2.3836	92.6044	21.7333
	0.75	0.0882	7.3517	17.8671	2.6470
	1.25	0.0437	6.4893	19.5482	23.1939
	2.50	0.0066	10.4241	64.2697	64.3879

표 4.1은 기존의 근사 공식들과 새로 제안된 근사 공식의 실제 파산 확률에 대한 상대 오차이다. $\psi(u)$가 실제 파산 확률이다. $\varepsilon_{DV}(u)$는 De Vylder의 근사공식의 상대 오차이고, $\varepsilon_E(u)$는 지수적인 근사공식의 상대 오차이며, $\varepsilon_{TE}(u)$는 본 논문에서 제시한 새로운 근사 방법의 상대 오차이다.

표 4.1을 살펴보면 $\varepsilon_E(u)$가 $\varepsilon_{TE}(u)$보다 대부분의 경우 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 본 논문에 제시한 방법은 지수적인 근사방법을 개선시켰음을 상대 오차를 통해 확인할 수 있다. De Vyder의 근사 방법 $\psi_{DV}(u)$과 본 논문에서 제시한 근사 방법 $\psi_{TE}(u)$을 비교하기 위해 상대 오차를 살펴보면 u가 작을 때에는 $\psi_{TE}(u)$가 파산 확률과 보다 가깝고, u가 클 때에는 $\psi_{DV}(u)$가 더 파산 확률에 가까움을 알 수 있다. 따라서 초기 잉여금 u의 크기에 따라 적절한 근사 방법을 선택한다면 실제 파산 확률에 매우 근접한 근사치를 얻을 수 있다.

참고문헌

Beekman, J. (1969). A ruin function approximation, *Transactions of the Society of Actuaries*, **21**, 41–48.

Cramér, H. (1930). On the Mathematical Theory of Risk, *Skandia Jubilee Volume, Stockholm.* In: Harald Cramér Collected Works, Vol. I, Springer, Berlin, 601–678.

De Vylder, F. E. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability, *Scandinavian Actuarial Journal*, 114-119.

Grandell, J. (1977). A class of approximation of ruin probabilities, *Scandinavian Actuarial Journal* (Suppl.), 38–52.

Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*, Springer, New York.

Grandell. J. (2000). Simple approximations of ruin probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, 157–173.

Hadwiger, H. (1940). Über die wahrscheinlichkeit des ruins bei einer grossen zahl von geschäften, *Arkiv für Mathematische Wirtschaft-und Sozialforschung*, **6**, 131–135.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions*, 2nd Edition, John wiley & Sons.

Lundberg, O. (1964). *On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics*, 1st Edition, Almqvist & Wiksell, Uppsala.

Tijms, H. (1994). *Stochastic Models-An Algorithmic Approach*, Wiley, Chichester.

An Improvement of the Approximation of the Ruin Probability in a Risk Process

Hye Sun Lee[1] · Seung Kyoung Choi[2] · Eui Yong Lee[3]

[1]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[2]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[3]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received July 2009; accepted August 2009)

Abstract

In this paper, a continuous-time risk process in an insurance business is considered, where the premium rate is constant and the claim process forms a compound Poisson process. We say that a ruin occurs if the surplus of the risk process becomes negative. It is practically impossible to calculate analytically the ruin probability because the theoretical formula of the ruin probability contains the recursive convolutions and infinite sum. Hence, many authors have suggested approximation formulas of the ruin probability. We introduce a new approximation formula of the ruin probability which extends the well-known De Vylder's and exponential approximation formulas. We compare our approximation formula with the existing ones and show numerically that our approximation formula gives closer values to the true ruin probability in most cases.

Keywords: Surplus process, Poisson process, risk model, ruin probability, approximation formula.

This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2008.
[3]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Chungpa-dong, Yongsan-ku, Seoul 140-742, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr