벡터, 좌표계, 좌표값 그리고 좌표변환행렬

■ 이 형 근
(한국항공대학교 항공전자및정보통신공학부)

제어 및 로봇 응용에서 다양한 좌표계와 이를 기반으로한 벡터의 좌표값이 활용되고 있다. 이는 운동을 수반하는 대다수의 지능 시스템에 있어서 시스템의 현재 위치 및 자세 정보가 미래의 동작을 결정하고 제어하는데 필수 불가결한 정보로 인식되기 때문이다. 다양한 응용분야에 활용되는 중요성에도 불구하고, 필자의 경험에 의하면, 벡터 및 좌표계 관련 사항들은 입문자가 처음 접하는 단계에서 큰 부담을 느끼는 부분으로 이해된다. 이와 같은 경험을 바탕으로 본 고는 벡터와 좌표계 그리고 좌표값에 접해본 경험이 없는 독자에게 기본적인 개념들을 별도의 보조 문헌이 필요없이 알기 쉽게 설명하는데 그 목적이 있다.

1. 벡터, 좌표값

흔히 벡터는 행렬이라는 용어와 대별되어 벡터는 행방향 혹은 열방향의 1차원으로 나열된 수치값들의 묶음이며 행렬은 행방향과 열방향 모두에 대해서 나열된 수치값들의 묶음으로 인식되고 있다.

이와 같은 벡터의 이해는 단순히 값을 표현하거나 인식하는 목적으로는 편리한 반면 물체의 운동을 관찰하고 해석하는 관점에서는 한계가 있는 것으로 판단된다. 따라서, 보다 명확한 의미의 분류를 위해서 벡터의 의미를 보다 세밀하게 분류할 필요가 있다.

본고에서는 벡터 (혹은 벡터의 기하개형)와 좌표값 (혹은 벡터의 좌표값)을 다음과 같이 구분하여 활용하고자 한다. 먼저, 벡터는 수치와 연관되지 않고 공간상의 임의의 점을 시작점으로 하고 임의의 점을 끝점으로 연결한 화살표로 간단히 이해하면 편리하다. 즉, 벡터는 수치적인 개념보다 기하학적 혹은 시각적 개념에 더욱 가까운 것으로 이해하는 것이다.

임의의 벡터에 대하여 3개의 수치값으로 표현되는 벡터의 좌표값을 얻기 위해서는 기준 좌표계(reference coordinate system)가 제공되어야 한다. 기준좌표계는 원점이 일치하는 3개의 직교(orthogonal) 단위벡터(unit vector)로 구성된다. 3차원 공간상에 그릴 수 있는 화살표의 다양성에 비추어 3차원 벡터의 종류는 무수히 많음을 알 수 있다. 이들 중 특히 길이가 1인 벡터들은 단위벡터(unit vector)로 지칭된다. 한 개의 좌표계와 연관된 3개의 직교하는 단위벡터는 해당 좌표계의 기저벡터(basis vector)로 지칭된다. 3개의 기저벡터가 제공되면 공간상에 관측되는 임의의 벡터의 좌표값은 각 기저벡터와의 내적(inner product)에 의하여 3개의 값으로 명확하게 산출될 수 있다. 이를 기하학적 의미에서 달리 해석하면

i) 각 기저벡터 방향으로 선을 무한대로 연장하고
ii) 각 기저벡터의 길이만큼의 간격으로 각 연장선에 눈금을 표시한 후

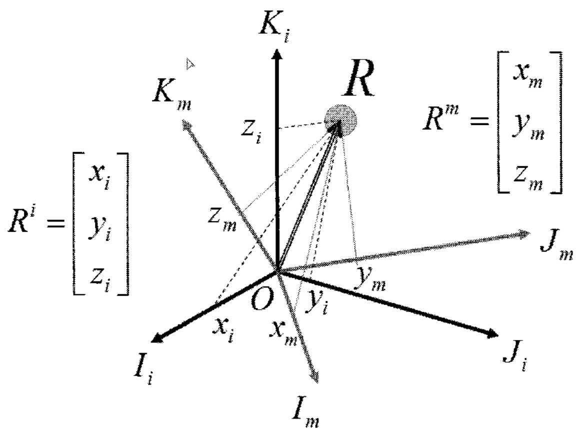

그림 1. 기하학적 개념의 벡터 R과 수치적인 개념의 좌표값 R^m사이의 관계

iii) 임의 벡터의 정사영의 끝점을 각 축 연장선에 그린 다음
iv) 각 기저벡터 방향의 눈금으로 좌표값을 읽는

과정에 해당된다.

지금까지 살펴본 바와 같이 벡터와 좌표값은 서로 관련되어 있지만 명확히 다른 의미를 가짐을 알 수 있다. 지금부터는 표현의 구분을 위하여 공간상에 기하학적인 화살표로 존재하는 벡터는 대문자로 표현하며 공간상의 화살표를 임의의 좌표계에 대하여 눈금을 읽은 좌표값은 벡터를 표시하는 기호에 위첨자를 오른쪽에 덧붙여서 표현하기로 약속한다. 약속된 표기법에 의하여 R^m은 벡터 R를 m-좌표계에 대하여 읽은 좌표값을 나타내며 이와 관련된 개형은 그림 1에 나타나 있다.

2. 기저벡터, 좌표변환행렬

벡터의 좌표값 획득 과정에 나타난 바와 같이 무수히 많은 벡터들 중에서 좌표값을 가장 쉽게 읽을 수 있는 벡터는 기저벡터들이며 각 기저벡터를 연관된 좌표계의 좌표값으로 읽을 경우 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$I_m^m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ J_m^m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ K_m^m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

여기서 $\{I_m, J_m, K_m\}$은 임의의 m-좌표계를 구성하는 기저벡터의 집합을 나타낸다. (1)에 활용된 m-좌표계의 기저벡터 $\{I_m, J_m, K_m\}$의 좌표값을 m-좌표계와 다른 i-좌표계에 대하여 읽을 경우에는 다음과 같이 (1)에 비하여 복잡한 형태로 나타난다.

$$I_m^i = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix},\ J_m^i = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix},\ K_m^i = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$
$$\|I_m^i\| = \|J_m^i\| = \|K_m^i\| = 1$$
$$(I_m^i)^T J_m^i = (J_m^i)^T K_m^i = (K_m^i)^T I_m^i = 0 \tag{2}$$

기하학적 조합의 다양성에 의하여 임의의 벡터 R은 다음과 같이 i-좌표계 기저벡터들 $\{I_i, J_i, K_i\}$의 조합 혹은 m-좌표계 기저벡터들 $\{I_m, J_m, K_m\}$의 조합으로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} R &= x_i I_i + y_i J_i + z_i K_i = [I_i \mid J_i \mid K_i] R^i \\ &= x_m I_m + y_m J_m + z_m K_m = [I_m \mid J_m \mid K_m] R^m \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $R^i = [x_i \ \ y_i \ \ z_i]^T$와 $R^m = [x_m \ \ y_m \ \ z_m]^T$은 벡터 R의 i-좌표계와 m-좌표계에 대한 좌표값을 각각 나타낸다.

(3)에 나타난 스칼라 값은 좌표값 표시 기준 좌표계에 영향을 받지 않으며 단지 $\{I_i, J_i, K_i\}$, 그리고 $\{I_m, J_m, K_m\}$등의 벡터들이 조합된 정도를 나타낸다. (3)에 나타난 벡터 사이의 관계식을 다음과 같이 좌표값 사이의 관계식으로 달리 표현이 가능하다.

$$R^i = [I_i^i \mid J_i^i \mid K_i^i]\ R^i = [I_m^i \mid J_m^i \mid K_m^i] R^m \tag{4}$$

(4)에서 i-좌표계 기저벡터들의 i-좌표계에 대한 좌표값들을 누적한 행렬 $[I_i^i \mid J_i^i \mid K_i^i]$은 (1)에 의미에 의하여 단위행렬(identity matrix)이 됨을 쉽게 알 수 있다. 또한, (4)에 의한 결과는 다음과 같이 동일한 벡터의 각기 다른 좌표계에 대한 좌표값 사이의 관계를 표현함을 알 수 있다.

$$R^i = C_m^i R^m \tag{5}$$

여기서

$C_m^i = [I_m^i \mid J_m^i \mid K_m^i]$: m-좌표계에서 i-좌표계로의 좌표변환행렬 (6)

(5)와 (6)이 의미하는 바는, 임의의 벡터 R의 특정 좌표계에 (m-좌표계)에 대한 좌표값이 주어지고 특정 좌표계와는 다른 좌표계 (i-좌표계) 로의 좌표변환행렬을 알고 있다면 언제든지 임의의 벡터 R의 다른 좌표계에 대한 좌표값을 행렬식에 의하여 구할 수 있다는 것이다. 또한, (2)와 (6)에 나타난 바와 같이 m-좌표계에서 i-좌표계로의 좌표변환행렬은 m-좌표계의 기저벡터들에 대하여 i-좌표계에 대한 좌표값을 읽어서 구할 수 있다는 것을 알 수 있다.

임의의 벡터에 대하여 i-좌표계에 대한 좌표값을 읽는다는 것은 임의의 벡터와 i-좌표계 기저벡터들 사이의 내적값을 읽는다는 것과 동일하다. 따라서, (2)와 (6)이 의미하는 바는 m-좌표계에서 i-좌표계로의 변환행렬은 다음과 같이 m-좌표계 기저벡터들 $\{I_m, J_m, K_m\}$과 i-좌표계 기저벡터들 $\{I_i, J_i, K_i\}$사이의 내적으로 구성됨을 알 수 있다.

$$C_m^i = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m^T I_i & J_m^T I_i & K_m^T I_i \\ I_m^T J_i & J_m^T J_i & K_m^T J_i \\ I_m^T K_i & J_m^T K_i & K_m^T K_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

유사한 추론에 의하여 i-좌표계로부터 m-좌표계로의 좌표변환행렬 C_i^m은 다음의 관계를 만족함을 알 수 있다.

$$C_i^m = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_i^T I_m & J_i^T I_m & K_i^T I_m \\ I_i^T J_m & J_i^T J_m & K_i^T J_m \\ I_i^T K_m & J_i^T K_m & K_i^T K_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

(7)과 (8)의 비교에 의하면 다음의 관계가 성립함을 확인할 수 있다.

$$C_i^m = (C_m^i)^T \quad (9)$$

(5)와 (9)에 의하면 다음의 관계가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$R^i = C_m^i R^m = C_m^i (C_i^m R^i) = C_m^i C_i^m R^i$$
$$C_m^i C_i^m = I_{3\times 3} \quad (10)$$

(9)와 (10)에 의하면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$C_i^m = (C_m^i)^{-1} = (C_m^i)^T \quad (11)$$

따라서, 좌표변환행렬의 역행렬(inverse matrix) 은 전치행렬(transpose matrix)와 동일하다는 것을 알 수 있다. 일반적으로 역행렬은 계산량 부담이 매우 높은 연산이며 전치행렬은 각 원소의 행과 열 위치만 바꾸면 되므로 계산량 부담이 매우 낮다. 따라서, (11)은 좌표변환행렬의 구현에 있어서 매우 편리하게 활용될 수 있다. (11)과 같은 특성을 만족하려면 행렬을 구성하는 각 행벡터 혹은 열벡터의 길이가 1 이며 각 벡터들의 방향은 직교해야 한다. 좌표변환행렬은 이를 구성하는 각 열벡터가 (2)에 의하여 각 기저벡터들의 좌표값에 해당되므로 (11)의 조건을 기하학적인 관점에서 이미 만족하고 있음을 알 수 있다.

3. 단위 좌표변환 및 복합 좌표변환

앞선 절에 설명된 바와 같이 두 좌표계 사이의 좌표변환행렬은 한쪽 좌표계의 기저벡터들의좌표값을 다른 좌표계에 대하여 측정함으로써 구할 수 있으나 이를 위해서는 3차원 공간개형이 연관되므로 관련된 개형의 연상 및 이해가 쉽지 않다. 이를 회피하고 일반적으로 복잡한 좌표변환행렬의 메커니즘을 이해하기 위해서는 주어진 좌표변환을 3단계로 구분하고 각 단계에서 한 개의 기저벡터를 회전축으로 선택한 2차원 단위 좌표변환을 개별적으로 고려하는 것이 효율적이리라 생각된다.

한 개의 기저벡터를 회전축으로 선택한 단위 좌표변환을 이해하기 위하여 지금부터는 그림 2와 같은 개형을 고려하기로 한다. 그림 2에는 초기에 일치하여 있던 i-좌표계와 m-좌표계에 대하여 m-좌표계의 x-축 및 y-축 기저벡터들을 z-축을 기준으로 ψ 만큼 회전한 결과 나타나게 되는 두 좌표계 사이의 변환 개형을 나타낸다. 그림에서 R은 임의의 벡터를 나타내며 이의 좌표값은 i-좌표계에 대해서는 R^i로 그리고 m-좌표계에 대해서는 R^m으로 각각 표시되어 있다. 그림 2를 참조하면 동일한 벡터 R의 서로 다른 좌표계에 대한 좌표값 R^i와 R^m은 다음의 관계를 만족함을 알 수 있다.

$$R^i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \ R^m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}.$$
$$x_m = x_i \cos\psi + y_i \sin\psi$$
$$y_m = -x_i \sin\psi + y_i \cos\psi$$
$$z_m = z_i \quad (12)$$

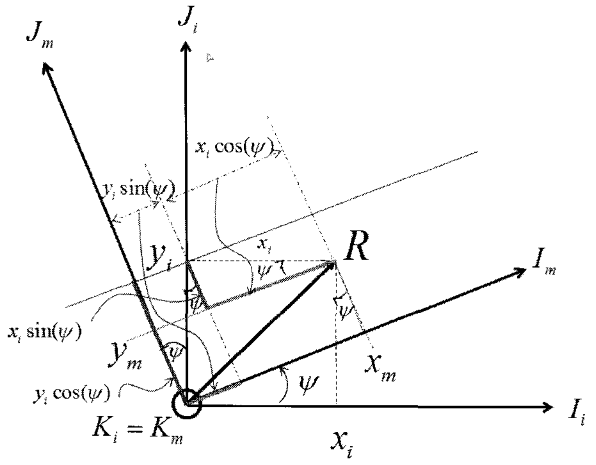

그림 2. z축을 기준으로 ψ 만큼 회전한 단위 좌표변환의 개형

(12)를 달리 표현하면 두 좌표값 사이에는 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$R^m = C_i^m R^i,\ C_i^m = C_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

회전의 기준축을 달리하여 초기에 일치하여 있던 i-좌표계와 m-좌표계에 대하여 m-좌표계의 두 기저벡터들을 x-축을 기준으로 ϕ 만큼 회전하면 그림 2와 유사한 개형에 의하여 다음의 관계를 확인할 수 있다.

$$R^m = C_i^m R^i,\ C_i^m = C_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

또한, 초기에 일치하여 있던 i-좌표계와 m-좌표계에 대하여 m-좌표계의 두 기저벡터들을 y-축을 기준으로 θ만큼 회전하면 그림 2와 유사한 개형에 의하여 다음의 관계도 확인할 수 있다.

$$R^m = C_i^m R^i,\ C_i^m = C_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

(13)-(15)에 나타난 각 기저벡터 축 기준의 2차원 단위 좌표

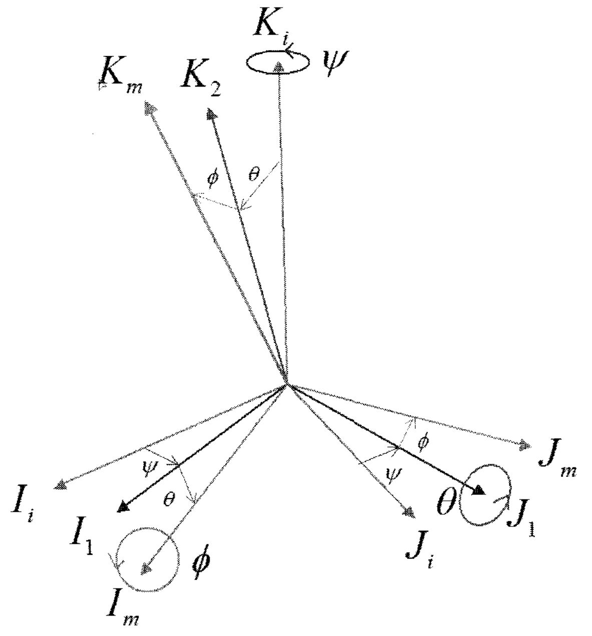

그림 3. 임의의 두 좌표계 사이의 3차원 좌표변환 개형

변환을 이해하였으면 일반적인 두 좌표계 사이의 3차원 복합 좌표변환을 쉽게 이해할 수 있다. 그림 3은 이와 관련된 개형을 나타내어 준다.

그림 3에 나타난 바와 같이 임의의 3자유도 좌표변환 관계를 가지는 i-좌표계와 m-좌표계가 주어진 경우 i-좌표계의 기저벡터들을 m-좌표계의 기저벡터들과 일치시키기 위해서는 다음과 같이 단위 좌표변환을 수반한 회전이 특정 축을 기준으로 순서에 맞게 가해져야 함을 알 수 있다.

i) z축(혹은 K_i축)을 기준으로 ψ 만큼의 회전
  $\Rightarrow \{I_1, J_1, K_1\}$ 기저벡터의 방향결정
ii) y축(혹은 J_1축)을 기준으로 θ만큼의 회전
  $\Rightarrow \{I_2, J_2, K_2\}$ 기저벡터의 방향결정
iii) z축(혹은 I_2 축)을 기준으로 ϕ만큼의 회전
  $\Rightarrow \{I_m, J_m, K_m\}$ 기저벡터의 방향결정

위에서 정리된 단위 좌표변환의 순서를 참고로 하면 i-좌표계에서 m-좌표계로의 복합 좌표변환행렬은 다음과 같이 구성됨을 알 수 있다.

$$C_i^m = C_2^m C_1^2 C_i^1 \quad (16)$$

여기서

$$C_2^m = C_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$C_1^2 = C_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$C_i^1 = C_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

따라서 (16)과 (17)에 의하여 각 행렬들을 곱하고 그 결과를 정리하면 i-좌표계에서 m-좌표계로의 복합 좌표변환행렬은 다음과 같이 구성됨을 알 수 있다.

$$C_i^m = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

또한 이와는 반대로 m-좌표계에서 i-좌표계로의 좌표변환이 필요할 경우에는 다음의 관계식들을 활용된다.

$$C_m^i = (C_i^m)^T = (C_i^1)^T (C_1^2)^T (C_2^m)^T \tag{18}$$

여기서

$$(C_i^1)^T = C_z(-\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C_1^2)^T = C_y(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$(C_2^m)^T = C_x(-\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$C_m^i = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

4. 결론

본 고에서는 제어 및 로봇 시스템 응용분야에서 다양하게 활용되고 있는 벡터, 좌표값, 좌표계, 그리고 좌표변환행렬과 관련된 기본적인 개념들을 살펴보았다. 이를 통하여 벡터는 단순히 공간에 존재하는 기하학적 화살표로 설명하였으며 이와 관련된 좌표값은 벡터의 정사영을 기준 좌표계의 각 기저벡터 방향으로 드리운 후 길이를 수치적으로 측정하고 기록한 결과로 설명하였다. 벡터의 좌표값을 측정하기 위해서는 기준 좌표계가 필요한데 이는 원점이 일치하고 서로 직교하는 단위 길이의 기저벡터 3개로 구성됨을 설명하였다. 동일한 벡터에 대해서도 기준 좌표계의 다양성에 의하여 각기 다른 좌표값이 산출될 수 있는데, 이는 각 기준 좌표계 기저벡터들 사이의 관계를 설명해 주는 좌표변환행렬을 활용하여 관련지울수 있음을 설명하였다. 마지막으로, 임의의 두 좌표계 사이의 좌표변환행렬은 한 좌표계에서 중간단계의 z축, y축, 그리고 x축을 활용하여 각각 일정한 양만큼 회전시켜 다른 좌표계와 일치시키는 세가지 단위 좌표변환행렬을 곱으로 표현할 수 있음을 설명하였다.

저자약력

이 형 근

· 1967년 6월 27일생
· 1990년 서울대 제어계측공학과 (공학사).
· 1994년 서울대 제어계측공학과 (석사).
· 2002년 서울대 전기컴퓨터공학부 (박사).
· 1994년~1998년 현대우주항공(주).
· 2003년~현재 : 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부 (부교수).
· 관심분야 : 항법, 측위, LBS, ITS, 추정이론