韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 4호, 2009. 11. 1079-1092

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23 No 4, Nov. 2009. 1079-1092

뉴턴의 이항정리에 대한 수학사의 교수법적 고찰

조 정 수 (영남대학교)

본 연구는 무한급수와 멱급수의 발생 배경과 발달 과정의 인식론적 토대가 되었던 뉴턴의 이항정리(binomial theorem)의 개념을 살펴보고, 그 발달 과정에서 얻어진 제곱근의 근삿값 구하는 방법, 뉴턴의 역유율법을 이용한 정적분 구하는 방법, 그리고 메르카토어 급수와 그레고리 급수의 발견 과정을 알아보고자 한다. 이 과정을 통하여 뉴턴의 이항정리가 가지는 수학사의 교수법적 논의를 제시하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

급수 $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$는 15세기 인도의 수학자들에 의해 발견되었으며, 그 뒤에 뉴턴(Newton), 그레고리(Gregory), 라이프니츠(Leibniz)에 의해 재발견되었다. 현재 "그레고리 급수"로 알려진 이 급수는 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$인 기하급수를 제외하고는 멱급수(power series)의 최초의 예이다. 멱급수는 함수 $f(x)$를 x의 거듭제곱의 합으로 나타낸 것을 말하는데, 이 멱급수의 아이디어는 함수 표상을 풍부하게 했을 뿐만 아니라 수치로 된 급수의 연구에 아주 유용한 도구가 되었다(Stillwell, 2002).

일반적으로 대학의 미적분학 교재에서는 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$의 형태를 멱급수로 도입하고 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$의 합은 주어진 급수가 수렴하는 모든 x들의 집합을 정의구역으로 하는 함수 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$이라고 정의하고 있다(Stewart, 2001). 이 함수 f는 다항식의 형태인데 차이점은 f는 무한개의 항을 가지고 있다는 것이다. 모든 n에 대해 $c_n = 1$이라 놓으면 멱급수는 다음과 같은 기하급수가 되고 이 급수는 $-1 < x < 1$일 때 $\frac{1}{1-x}$에

* 접수일(2009년 10월 29일), 게재확정일(2009년 11월 3일)
* ZDM 분류 : I15
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 이항정리, 수학사, 역유율법, 급수
* 이 연구는 2008년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

수렴하고 $|x| \geq 1$ 일 때 발산한다.

이런 식으로 정의하는 방식은 학생들이 급수와 멱급수의 개념을 학습하는데 전혀 도움이 되지 않는다. 수학적 개념을 습득하는 데는 개념 정의(concept definition)와 개념 이미지(concept image)가 작용한다(Vinner, 1991). 비너의 주장에 따르면 개념에 대한 정의를 안다고 해서 개념을 이해했다고 볼 수 없으며 개념을 이해했다는 것은 그 개념에 대한 이미지를 갖는 것이라고 한다. 즉, 수학의 개념을 지도하고 학습할 때는 개념 정의와 개념 이미지가 상호작용을 하도록 해야 함을 알 수 있다. 물론 수학적 문제해결 상황에서는 항상 개념 정의를 고려해야 형식화가 가능하다는 사실이 중요하다. 개념 이미지는 사람들의 마음속에 있는 개념 명칭과 결합된 비언어적인 것으로 시각적 표상, 심상, 인상, 경험 등의 집합체를 말한다.

비너의 이런 주장에 따르면 현재 미적분학 교재의 무한급수와 멱급수에 대한 제시 방식은 학생들에게 풍부한 개념 이미지를 가질 수 있는 경험을 제공하지 못하고 있다고 보아진다. 무한급수와 멱급수에 대한 풍부한 개념 이미지를 가지게 할 수 있는 한 가지 방법은 그 개념이 발생하게 된 배경과 그 개념의 발달 과정에 대한 인식론에 근거한 수학사적 접근이라고 본다.

따라서 본 연구의 목적은 무한급수와 멱급수의 발생 배경과 발달 과정의 인식론적 토대가 되었던 뉴턴의 이항정리(binomial theorem)의 개념을 살펴보고, 그 발달 과정에서 얻어진 제곱근의 근삿값 구하는 방법, 뉴턴의 역유율법을 이용한 정적분 구하는 방법, 그리고 메르카토어 급수와 그레고리 급수의 발견 과정을 알아보고자 한다. 이 과정을 통하여 뉴턴의 이항정리가 가지는 수학사의 교수법적 논의를 제시하고자 한다.

Ⅱ. 수학의 교수법적 측면에서 본 수학사

학습이 낱개 지식의 축적일 뿐만 아니라 지식에 대한 비판적 태도까지 습득하는 것이라면 전달되는 지식의 양이 중요한 것이 아니라 그 질의 문제가 중요성을 가지게 된다(von Glasersfeld, 1993). 왜 어떤 특정 수학 개념이 발생했을까? 어떤 역사적 상황과 배경 하에서? 이런 측면을 고려해 본다면, 수학의 발달이 순전히 지식의 축적에 의한 것이라는 전통적 관념은 아주 낡은 생각이다. 따라서 교사는 학생들에게 과학과 수학이 어떻게 지식을 축적하는지에 대한 적합한 시각을 제공하는 것이 단순 사실의 습득을 강조하는 것보다 훨씬 가치 있는 교수-학습이며 동시에 여기에 수학사의 교수법적 중요성이 있다.

유명한 시인인 괴테(Johann Wolfgang von Goethe)는 1810년 출판된 《Theory of Colour》 에서 다양한 상황에 따라 색깔이 어떻게 인간에 의해 지각되는지에 대한 일반적 관찰을 제시했으며 뉴턴의 광학에 대한 관찰을 이러한 일반적 관찰의 특수한 사례로 생각했다. 이로서 과학은 뉴턴에 의해 관찰된 광학 스펙트럼과 괴테가 제안한 인간의 색깔 지각 현상 사이의 차이점을 알게 되었다. 이 책에서 괴테는 "과학의 역사는 바로 과학 그 자체이다"라는 말로 과학의 역사가 과학에서 차지하는 역

할이 얼마나 큰지를 대변했다. 또한 1897년 영국고등과학협회(British Association for the Advancement of Science)의 회장 취임 연설에서 포사이스(Andrew Russ Forsyth, 1858-1942)는 “수학은 이 세상에서 가장 오래된 과학 중의 하나로서 가장 활동적이며 그 힘은 불멸의 청년의 기개와 같다”고 했다. 그는 수학은 과거, 현재, 미래가 긴밀하게 서로 연결되어 있어 과거는 영원히 현재와 미래에 동화되어지는 축적된 과학이라고 했다. 위대한 프랑스 수학자 포앙카레(Henri Poincaré, 1854-1912)도 “수학의 미래를 예견하고 싶다면, 현재의 수학과 더불어 수학의 과거인 수학사를 공부하는 것이 올바른 길이다”라고 했다(Man-Keung, 2000).

Man-Keung(2000)은 수학사를 활용한 수학 지도에 대한 글에서 다음 네 가지로 수학사의 교수법적 가치를 제시하고 있다: (1) 수학사는 수학과 수학자에 대한 일화를 제공함으로써 수학의 지도를 다양한 방식으로 가능하게 하며 수학에 대한 관심과 흥미, 수학의 창조자에 대한 존경과 감탄, 역사적 배경을 가지게 하고, (2) 수학사는 수학에 대한 전체적 조망을 하도록 하여 비록 과거의 방식이 시간과 노력을 더 많이 요구할지라도 학생들에게 어떤 수학적 아이디어를 다루고 있으며 어떤 과정으로 발전해 나가는지, 이전에 획득한 지식과 어떻게 연관되는지를 알도록 하며, (3) 수학사를 다룸으로써 학생들은 수학 내용 지식에 대해 깊이 있게 알 수 있으며, 마지막으로 (4) 수학적 아이디어의 생성과 발달 과정을 경험할 수 있다. 특히 본 연구의 뉴턴의 이항정리는 이 아이디어의 생성과 발달 과정의 경험을 통해 무한급수와 멱급수에 대한 깊은 이해를 가능하게 할 것으로 보인다.

수학사의 교수법적 영향은 다양한 측면에서 고찰 가능한데(Grugnetti, 2000; Struik, 1980)는 다음과 같이 크게 세 가지 측면으로 구분할 수 있다. 첫째, 수학사 문제를 사용함으로써 학생들은 자신의 해결 전략과 고대 수학자의 해결 전략을 비교해 볼 수 있다. 이런 활동은 현재 우리가 사용하고 있는 수학적 지식의 경제성과 효율성을 직접 경험하고 이해할 수 있는 좋은 방법이다. 수학적 개념의 역사적 진화 과정을 살펴봄으로써 학생들은 수학이 고정되고 불변의 학문이 아니란 사실을 인식하게 된다. 둘째, 수학사를 통해 학생들은 수학적 기능, 절차, 개념의 구성 과정의 역사를 알 수 있다. 예를 들어, 1635년에 출간된 《Geometria indivisibilibum》 (Geometry of indivisibles)에 제시되어 있는 카발리에리(Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)의 두 기하 도형의 불가분량법(method of indivisibles)의 개념과 절차가 어떻게 적분 개념으로 진화, 발달하였는지를 아는 것은 구분구적법으로부터 정적분에 이르는 현대 적분법의 구성 과정을 이해하는데 도움이 된다. 셋째, 수학적 개념과 절차에 대한 역사적, 인식론적 분석은 교사로 하여금 학생들이 어떤 특정 개념과 절차(예: 함수 개념, 극한 개념 등)를 어려워하는 이유를 이해하게 해 준다. 그리고 이러한 분석을 통해 교수법적 접근과 개발을 가능하게 할 수 있다. 물론 인식론적 분석이 쉬운 것은 아니며 현재 수학교육적 측면에서 이에 대한 연구가 이루어지고 있다.

지금까지 수학사의 중요성과 수학사의 교수법적 가치와 활용 방법에 대해 살펴보았다. 수학 개념을 도입할 때, 수학사를 활용하는 것은 수학 교사와 학생들에게 가장 중요한 도전 중의 하나로 어떤 내용을 어떤 순서로 어느 정도 깊이로 다루어야 하는지 등에 대한 구체적인 기준이 있어야 할 것이다.

Ⅲ. 뉴턴의 이항정리

1676년 뉴턴은 라이프니츠에게 보낸 편지에서 다음과 같은 이항전개식을 제시했다(윌리엄 던햄, 2004; Dunham, 1994; Gowers, 2008).

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots$$

위의 이항전개식의 각 항을 다음과 같이 문자로 대체해보자.

$$A = P^{\frac{m}{n}}$$

$$B = \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q$$

$$C = \frac{m-2n}{2n}BQ = \frac{m-n}{2n}\left(\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q\right)Q = \frac{(m-n)m}{2n \cdot n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n-1}\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2$$

$$D = \frac{m-2n}{3n}CQ = \left(\frac{m-2n}{3n}\right)\frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n-1}\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2Q = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n-2}\right)}{3 \cdot 2}P^{\frac{m}{n}}Q^3$$

......

여기서 공통인수 $P^{\frac{m}{n}}$을 묶어내면 $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}(1+Q)^{\frac{m}{n}}$이다. 따라서 A, B, C, D, … 를 전부 더하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned}(P+PQ)^{\frac{m}{n}} &= P^{\frac{m}{n}}(1+Q)^{\frac{m}{n}} \\ &= P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n-1}\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n-2}\right)}{3 \cdot 2}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + \ldots \\ &= P^{\frac{m}{n}}\left\{1 + \frac{m}{n}Q + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}Q^2 + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3 \cdot 2}Q^3 + \ldots\right\}\end{aligned}$$

따라서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(1+Q)^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}Q+\left(\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}\right)Q^2+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\cdot 2}Q^3+\cdots$$

이 이항전개식을 사용하면 다음과 같은 다항식의 전개식을 이끌어낼 수 있다.

<예1> $(1+x)^3$을 다항식의 전개식으로 나타내 보자.

$Q=x$, $\frac{m}{n}=3$으로 대체하여 뉴턴의 이항정리를 적용하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(1+x)^3&=1+3x+\frac{3\cdot 2}{2}x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2}x^3+\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 3\cdot 2}x^4+\ldots\\&=1+3x+3x^2+x^3+0+\ldots\\&=1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

이 다항식의 계수를 살펴보면 파스칼 삼각형의 네 번째 줄의 숫자와 일치함을 알 수 있다.

<예2> $(1+x)^{-3}$을 다항식의 전개식으로 나타내 보자.

$Q=x$, $\frac{m}{n}=-3$으로 대체하여 뉴턴의 이항정리를 적용하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{-3}&=1+(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{2}x^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{6}x^3+\ldots\\&=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-\ldots\end{aligned}$$

위의 식에 음의 지수에 대한 정의($a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$)을 적용하면 $(1+x)^{-3}$은 다음과 같은 다항식의 전개식으로 나타낼 수 있다.

$$(1+x)^{-3}=\frac{1}{(1+x)^3}=\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3}=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-\ldots$$

$$(1+3x+3x^2+x^3)(1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-\ldots)=1$$

자연수와 정수 지수에 대한 이항전개식을 지수가 분수인 식의 전개로의 확장은 다음 <예 3>과 같은 과정을 거쳐 가능하다.

<예3> $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ 을 다항식의 전개식으로 나타내 보자.

$(1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x}$ 와 같으므로 여기에 $Q=-x$, $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ 으로 대체하여 뉴턴의 이항정리를 적용하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\sqrt{1-x}=1+\frac{1}{x}(-x)+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(-x^2)+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}(-x)^3+\ldots$$
$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots$$

위의 식에서 좌변과 우변을 제곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots)\\
&\times(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots)\\
&=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{16}x^3-\ldots\\
&=1-x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+0\cdot x^4+\ldots\\
&=1-x
\end{aligned}$$

따라서 $(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots)^2=1-x$ 이므로

$$\therefore \sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots \qquad (*)$$

$(1-x)^{\frac{1}{2}}$ 을 $\sqrt{1-x}$ 로 바꾼 이유는 이 (*)식을 이용하면 제곱근의 근삿값을 쉽게 구할 수 있는 장점이 있기 때문이다. 이를 알아보기 위해서 다음과 같이 $\sqrt{7}$ 의 근삿값을 실제로 구해보면 다음과 같다.

<예4> $\sqrt{7}$ 의 근삿값을 뉴턴의 이항정리를 이용하여 구해보자.

7은 $7=9(\frac{7}{9})=9(1-\frac{2}{9})$로 나타낼 수 있으므로 양변에 제곱을 취하면

$\sqrt{7}=\sqrt{9(1-\frac{2}{9})}=3\sqrt{1-\frac{2}{9}}$ 이다.

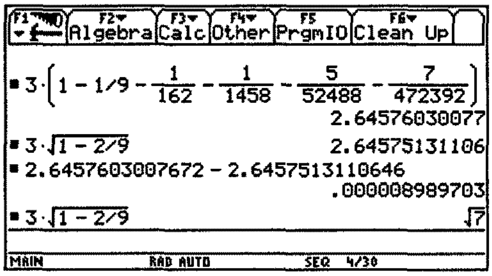
위의 (*)식에 $x=\dfrac{2}{9}$를 대입하여 다섯 번째 항까지만 구해보면 다음과 같다.

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{9}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{2}{9}\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{2}{9}\right)^4=\sqrt{1-\frac{2}{9}}$$

양변에 3을 곱하면 구하고자 하는 $\sqrt{7}$, 즉 $3\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}$가 된다.

$$3\left(1-\frac{1}{9}-\frac{1}{162}-\frac{1}{1458}-\frac{5}{52488}-\frac{7}{472392}\right)=3\sqrt{1-\frac{2}{9}}\fallingdotseq 2.64575\ldots$$

Texas Instruments의 Voyage200으로 이 결과를 소수 12째 자리에서 확인해 보면, <그림 Ⅲ-1> 화면의 첫째 줄 결과에서 보듯이 $3\left(1-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{162}-\dfrac{1}{1458}-\dfrac{5}{52488}-\dfrac{7}{472392}\right)$의 계산값은 2.64576030077이고, $3\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}$의 계산값은 2.64575131106이다. 이들 두 값의 차를 계산해보면 화면의 셋째 줄 결과에서 보듯이 0.000008989703으로 겨우 소수 다섯째 자리에서 차이를 보일 정도로 정밀함을 알 수 있다. 또한 Voyage200과 같은 Computer Algebra Systems(CAS) 기능을 갖춘 계산기의 경우 넷째 줄 결과에서 볼 수 있듯이 $3\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}$와 $\sqrt{7}$의 두 수식을 동일한 계산으로 취급하고 있음을 알 수 있다. 이렇게 볼 때 뉴턴의 이항전개식이 얼마나 정확한 계산값을 제공해 주는지 알 수 있으며 이는 더 나아가 π의 근삿값을 계산하는데 아주 중요한 도구로 작용한다.



<그림 Ⅲ-1> $\sqrt{7}$의 근삿값 계산에 대한 비교

Ⅳ. 뉴턴의 역유율법을 이용한 정적분 구하기

역유율법(the inverse method of fluxions)은 1669년에 쓴 논문이지만 그 내용은 1711년의 《해석》(De Analysi)의 논문에 실려 있다. 뉴턴은 곡선과 x축, 그리고 원점에서 오른쪽으로 x만큼 떨어진 길

이로 둘러싸인 넓이를 구하고자 했다. 다음은 이런 넓이를 구할 때 필요한 뉴턴의 2가지 규칙이다.

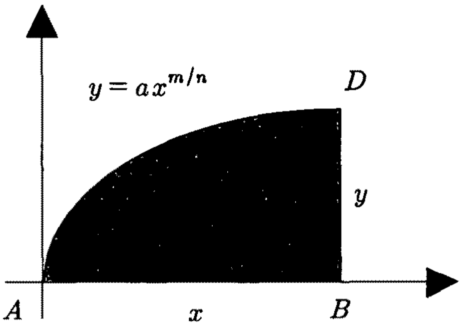
<규칙 1>

m, n이 자연수 일 때, 임의의 곡선 $y=ax^{m/n}$ 아래에 있고 $AB=x$, $BD=y$로 둘러싸인 넓이는 다음과 같다.

$$ax^{m/n}=y\text{이면, } \frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}= \text{넓이}\,(ABD)$$

<규칙 2>

만약 y가 여러 개의 항으로 이루어진 경우라면, 그 넓이도 이들 항의 각각에 대한 넓이들로 이루어진다.



위의 뉴턴의 규칙 1, 2를 예를 들어 살펴보자.

<예1> 만약 $a=m=n=1$이면 $y=1\cdot x^{\frac{1}{1}}=x$가 되어 직선이고 넓이는 $\frac{1\cdot 1}{2}x^{\frac{2}{1}}=\frac{1}{2}x^2$이 된다. $y=x$이면 ABD의 넓이는 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}(\text{밑변})(\text{높이})=\frac{1}{2}\times x\times y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$이 되어 <규칙 1>이 정확함을 알 수 있다.

<예2> $a=1, m=2, n=1$인 경우를 살펴보자. 그러면 $y=1\cdot x^{\frac{2}{1}}=x^2$이고, 그 넓이는 $\frac{1\cdot 1}{2+1}x^{\frac{2}{1}}=\frac{1}{3}x^3$이 된다.

<예3> 만약 곡선의 식이 $y=x+x^2$이라면 <규칙 2>와 <예1>, <예2>에 그 넓이는

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$이 된다.

위의 사실들을 이용하여 $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x}\,dx$의 적분을 (1) 뉴턴의 역유율법을 이용한 결과와 (2) 현대 적분법을 이용하여 구한 결과를 비교해 보자.

1. 뉴턴의 역유율법을 이용하여 정적분 구하기

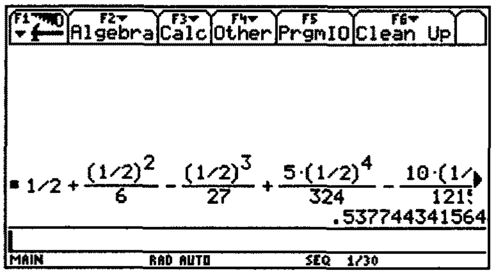
먼저 $\sqrt[3]{1+x}$를 이항전개식으로 표현해야 한다. $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$이므로 $Q=x$, $m=1$, $n=3$으로 대체하여 뉴턴의 이항정리를 적용하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + (-\frac{1}{9})x^2 + (\frac{5}{81})x^3 + (-\frac{10}{243})x^4 + \ldots$$

그러면 처음 다섯 개의 항으로 $\sqrt[3]{1+x}$을 나타내고 적분을 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x}\,dx &= \int_0^{1/2} (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243})\,dx \\ &= \left[x + \frac{x^2}{2 \cdot 3} - \frac{x^3}{3 \cdot 9} + \frac{5x^4}{4 \cdot 81} - \frac{10x^5}{5 \cdot 243}\right]_0^{1/2} \\ &= \left[x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{27} + \frac{5x^4}{324} - \frac{10x^5}{1215}\right]_0^{1/2}\end{aligned}$$

이를 Voyage200을 사용하여 구해보면 그 결과는 <그림 Ⅳ-1>과 같다.



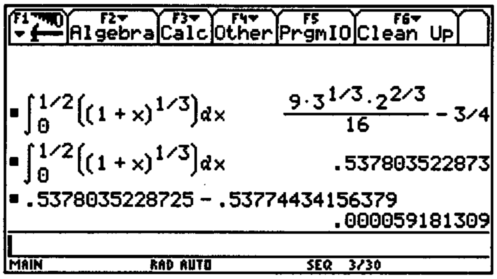
<그림 Ⅳ-1> 처음 다섯 개 항까지의 합

2. 현대 적분법을 이용하여 정적분 구하기

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x}\, dx = \int_0^{1/2} (1+x)^{\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_0^{1/2}$$

$$= \left[\frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}} \right]_0^{1/2} = \frac{3}{4}(1+\frac{1}{2})^{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3} = \frac{9}{8}\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}$$

이를 Voyage200을 사용하여 구해보면 그 결과는 <그림 Ⅳ-2>와 같다.



<그림 Ⅳ-2> 현대 적분법에 의한 계산 결과

위의 화면에서 뉴턴의 역유율법을 이용하여 정적분 구하기와 현대 적분법을 이용하여 정적분 구하기의 차이는 0.000059181309 정도의 차이 밖에 나지 않음을 알 수 있다.

Ⅴ. 뉴턴의 이항정리의 확장

1. 메르카토어가 발견한 급수

뉴턴의 이항정리를 $(1+x)^m$에 대해 다사 써보면 다음과 같다.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} + \ldots$$

이 때, $x = t$, $m = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned}(1+t)^{-1} &= \frac{1}{1+t} = 1+(-1)t+\frac{(-1)(-2)}{2}t^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{6}t^3+\dots \\ &= 1-t+t^2-t^3+t^4-\dots\end{aligned}$$

이다. 이 식의 양변을 0에서 x까지 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^x (1-t+t^2-t^3+t^4-\dots)dt \\ &= t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots\end{aligned}$$

따라서 $\log(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$이다.

이 무한급수는 메르카토어(Nicholas Mercator)가 1668년 《Logarithmotechnia》에 처음으로 발표하였는데, 이 책의 처음 두 장은 상용로그의 표를 그리고 세 번째 장에 로그의 다양한 근사공식을 제시해 놓았다. 위에서 볼 수 있듯이 뉴턴도 이와 똑같은 결과를 1665년 발견했지만 발표하지 않은 관계로 이 발견의 공은 메르카토어에게 돌아가게 되었다(Burton, 2007).

2. 그레고리가 발견한 급수

1671년 스코틀랜드의 수학자 그레고리(James Gregory)는 $\tan x$의 역수에 대한 급수 표현을 발견하였는데, 현대적 표기법으로 나타내면 다음과 같다(Stillwell, 2002). 이 급수 표현을 하는데 있어서도 $(1+t^2)^{-1}$ 의 전개식을 구하려면 뉴턴의 이항정리를 사용함을 볼 수 있다.

$$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \quad |x|\le 1$$

먼저, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1}x$임을 보이도록 하자. $t=\tan x$, $dt=\sec^2 x\,dx$, $x=\tan^{-1}t$라 하자.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_0^x \frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot \sec^2 x\,dx = \int_0^x \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x}dx \\ &= \int_0^x \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}\,dx = \int_0^x 1\,dx = [x]_0^x = [\tan^{-1}t]_0^x = \tan^{-1}x\end{aligned}$$

따라서

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1}x$$

이다.

뉴턴의 이항정리를 이용하여 $(1+t^2)^{-1}$의 전개식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \ldots$$

이 식의 양변을 0에서 x까지 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \ldots)dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \ldots\right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\end{aligned}$$

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1}x$이므로 그레고리가 발견한 아래의 급수 표현을 구할 수 있다.

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ⅵ. 결 론

본 연구는 무한급수와 멱급수의 발생 배경과 발달 과정의 인식론적 토대가 되었던 뉴턴의 이항정리의 개념을 살펴보고 이를 여러 가지 수학적 개념으로 확장하여 보았다. 이를 통하여 뉴턴의 이항정리가 수학사적 입장에서 가지는 교수법적 논의를 시사하고자 했다.

이항정리로부터 다항식의 급수 전개를 통해 다항식뿐만 아니라 미적분학에서 다루는 테일러 급수와 메클로린 급수 전개의 기초 아이디어를 살펴볼 수 있다. 또한 이런 과정을 통하여 수학의 다른 주제인 파스칼 삼각형의 숫자와의 연관성도 파악할 수 있다. 제곱근의 근삿값을 구하는 방법을 통해서는 π의 근삿값을 고대의 기하적 방법이 아니라 대수적, 수치 해석적으로 구하는 방법으로 확장될 수 있음을 알 수 있다. 이러한 다양한 주제와의 연결성과 기초적 아이디어에 대한 경험은 비너(Vinner, 1991)가 말했던 풍부한 개념 이미지를 학생들에게 제공할 수 있는 수업 소재일 것이다.

이항정리로부터 역유율법으로의 확장을 통해 학생들은 도형 아래의 넓이를 구하는 기하적 방법으

로부터 마침내 탈피하여 순수한 대수적, 해석적 방법으로의 수학적 아이디어의 전환 과정을 경험할 수 있다. 또한 역유율법에 의한 정적분의 계산이 결코 현대 적분법의 계산과 정확도에 있어서 크게 차이가 없다는 점으로부터 학생들은 과거의 수학적 기법과 절차가 막연히 지루하고 낡고 시간과 노력이 많이 가는 것이 아니라는 인식을 가질 수 있다. 또한 메르카토어 급수와 그레고리 급수로의 확장을 다루어 봄으로써 학생들은 로그와 삼각함수와 같은 특수 함수가 다항식으로 전개될 때의 기초 아이디어가 이항정리임을 알게 됨으로써 한 가지 수학적 아이디어와 개념이 현대에 이르기까지 얼마나 큰 역사적 확장 가능성을 가지는지를 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 뉴턴의 이항정리를 통해 학생들은 수학의 역사적 가치 인식, 수학에 대한 흥미와 동기 유발, 수학적 지식의 변화 가능성, 특정 개념과 절차에 대한 깊은 이해와 다른 주제와의 관련성을 등을 다양하게 경험할 수 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

윌리엄 던햄 (2004). 수학의 천재들(조정수 역). 서울: 경문사.

Burton, D. M. (2007). *The history of mathematics: An introduction*(6th ed.). McGraw-Hill.

Dunham, W. (1994). *The mathematical universe.* John Wiley & Sons.

Gowers, T. (2008). *The princeton companion to mathematics*. Princeton University Press.

Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems.. In Katz, V. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp.28-35). The Mathematical Association of America.

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of using history of mathematics in (undergraduate) classroom. In Katz, V. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp.3-9). The Mathematical Association of America. Stewart, J.(2001). *Calculus*(4th ed.). Thomson and Learning.

Stillwell, J. (2002). *Mathematics and its history*(2nd ed.). New York: Springer.

Struik, D. J. (1980). Why study the history of mathematics? *The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications,* 1, pp.3-28.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning mathematics. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp.65-81), Kluwer.

Von Glasersfeld, E. (1993). Questions and answers about radical constructivism. In K. Tobin(Ed.), *The practice of constructivism in science education*(pp.23-38). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

The Pedagogical Analysis of the History of Mathematics on Newton's Binomial Theorem

Cho, Cheong-Soo

Deptartment of Mathematics Education, Yeungnam University, Gyungsan, Korea, 712-749

E-mail : chocs@ynu.ac.kr

The purpose of this study is to investigate Newton's binomial theorem that was on epistemological basis of the emergent background and developmental course of infinite series and power series. Through this investigation, it will be examined how finding the approximate of square root of given numbers, the method of the inverse method of fluxions by Newton, and Gregory and Mercator series were developed in the course of history of mathematics. As the result of this study pedagogical analysis and discussion of the history of mathematics on Newton's binomial theorem will be presented.

* ZDM Classification : I15

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key Words : binomial theorem, the history of mathematics, the inverse method of fluxions, series