

## 대학수학 학습에서 그룹프로젝트의 효과

김 병 무 (충주대학교)

대학수학을 수강하는 2007학년도 2학기 충주대학교 1학년 학생 100명에게 개인별(부록2)에서 세 문항, 그룹별(2명)로 (부록3)에서 두 문항씩 학기 초에 프로젝트를 부여하고 결과를 알아보고 분석하여 다음 프로젝트 과제 수행에 활용 자료로 삼도록 하였다. 프로젝트 수행을 통해서 학생들은 수학에 대한 사고 능력과 글쓰기 능력이 향상되었고 그룹 활동을 통해 협동심과 상호 협조적인 관계의 유지의 중요성을 깨달았으며, 이런 기회를 갖게 된 것을 대학생활의 보람으로 느끼게 되었다. 특히, 효과적인 그룹 프로젝트를 통한 수업이 되려면 1) 수강 학생 수는 20인 이내가 좋고, 2) 그룹 프로젝트는 2명에게 부여하는 것이 바람직하고, 3) 교수는 학생의 수준에 맞는 문제를 교재 이외에서 선정하고, 4) 문제는 흥미 있고, 긍정적이며, 도전적이어야 하며, 5) 각 그룹에게 한 문제만 주어여야 하고, 6) 그룹들은 충분한 참고자료를 준비해야 하며, 7) 그룹의 각 구성원은 수학과 협력학습의 필요성과 중요성을 인식해야 하고, 8) 학생들은 수학을 즐거운 마음으로 다루어야 하며, 9) 실생활에서 수학이 중요함을 일깨워 주고, 10) 프로젝트 수행에 적절한 기간이 2달은 되어야 한다.

### I. 서론

연구 결과(Edward M.C., Gaughan D., Knoebel A., Kurtz D. S., & Pengelly D. 1991)에 의하면 “그룹 프로젝트 수행은 2-3명이 적당하고 학생과 교수 모두에게 이익이 되며 프로그램의 표준과 기본이 정해져야 한다. 그룹워크는 새로운 환경에 현실적인 접근이며 그룹 활동에 고도로 동기부여를 하고 학생들이 서로에게 배우므로 도움을 덜 요청한다. 한편 불이익은 의견의 균형이 중요하지만 일부 학생은 아무것도 하지 않는다. 협동작업의 경험을 덜 갖고 있으며 그룹 학생들의 스케줄 갈등과 개별 학생에 대해 평가의 어려움이 있다.”고 한다.

한편, 프로젝트 수행 전에 충주대학교 1학년 학생 98명에 대한 ‘대학수학에 대한 태도조사’ 결과를 5단계 평정척도에 의해 분석한 결과는 (부록4)의 (표1)과 같다.

대학수학에 대한 태도와 관련하여 긍정적인 모습을 보여준 문항(3.20 이상)은 ‘수학을 학습하는 것은 미래에 나를 도울 것이다. 산업과 사업에서 사람들이 수학을 이해하는 것은 중요하다. 탐구는 수학과정의 유용한 부분이다. 나는 실생활의 내용에 관련한 문제들이 다른 문제들보다 더 어렵다는 것을 안다. 나는 다른 사람들과 수학문제를 토론하는 것이 도움이 됨을 안다. 나는 전에 다루었던 종류

\* 접수일(2009년 6월 23일), 수정일(1차 2009년 9월 1일), 게재확정일(2009년 9월 21일)

\* ZDM 분류 : D15

\* MSC2000 분류 : 97D10

\* 주제어 : 대학수학 학습, 프로젝트 수행, 수학에 대한 태도 변화, 그룹 활동

의 수학문제를 좋아한다. 수학을 실제문제에 적용하는 것을 배우지 않는다면 수학을 배우는 것은 효과가 없다.'이다.

'프로젝트 수행과 협동학습에 대한 조사' 결과를 5단계 평정척도에 의해 분석한 결과는 (부록4)의 (표2)와 같다.

프로젝트 수행과 관련하여 긍정적인 모습을 보여준 문항(3.20 이상)은 '그룹으로 학습할 때 혼자 할 수 있던 것보다 더 빨리 완수할 수 있다, 프로젝트에 참여하는 것은 가치 있는 일이다, 나는 한 맥락에서 문제를 풀 수 있으면 그것은 또 다른 맥락에서 내가 문제를 푸는 것을 돕는다.'이었다.

이를 참고하여 대학수학을 수강하는 2007학년도 2학기 충주대학교 1학년 학생 100명에게 개인별로 (부록2)에서 세 문항, 그룹별(2명)로 (부록3)에서 두 문항씩 학기 초에 프로젝트를 부여하고 중간고사 기간에 수합하여 제대로 수행한 학생과 수행하지 않은 학생 사이에 차이를 두어 성적에 반영하기로 하였다. (부록1)의 질문지를 통해 다음에도 프로젝트 수행 과목에 대한 강의 선택 여부에 어떤 차이가 있는지를 포함하여 얼마나 수업에 도움이 되는지, 교수의 도움이 구체적으로 무엇인지, 자료의 수집에 어려움이 있었는지, 흥미를 끌만한 주제였는지, 대학수학 수업의 자연스러운 부분이 되었는지, 긍정적인 활동을 하게 하였는지, 성취와 자신감을 수행을 통해 얻었는지, 가치 있는 경험이 되었는지, 제출 마감 시간을 잘 지켰는지, 등 여러 문항에 대해 결과를 알아보고 분석하여 다음 프로젝트 과제 수행에 활용 자료로 삼는다. 또한, 수준이 높지 않은 대학수학 수강생들이 관심을 갖고 학습에 도움을 받을 수 있는 쉽지만 중요한 내용을 과제로 선정하여 체계적으로 자신의 생각을 펼치고 올바른 표현을 할 수 있는 기회를 마련하여 협동과제나 개인과제를 통해 수학학습의 잠재능력을 깨우치는 기회를 마련해 주려고 한다. 프로젝트 수행의 목적을 요약하면, 수학에 대한 사고능력, 문제해결력과 글쓰기 능력을 향상시키고 그룹 활동을 통해 협동심과 상호협조적인 관계의 유지를 중요하게 여기도록 하는 것이다.

## II. 본 론

프로젝트 수행 전에 학생들에게 프로젝트를 어떻게 수행하며 무엇이 기대되는지에 대한 내용을 프린트하여 간단히 알린다. 1) 오늘 시작하고, 프로젝트에 빠져들면 해결책이 빨리다가올 것이다. 2) 무언에 관한 것인지 알기 위해 프로젝트를 이해할 때까지 읽고, 처음부터 자세한 내용에 대해 너무 걱정하지 않아도 된다. 3) 매우 조심스럽게 프로젝트를 읽고 익숙하지 않은 단어나 개념에 대해 이해를 먼저 한다. 모든 단어와 용어를 이해하더라도 프로젝트가 쉽다고 가정하지 않는 것이 좋다. 마지막 며칠 또는 시작할 때까지 기다리면 정시에 마칠지 의심스럽다. 4) 읽을거리 이외에 어떤 것을 할 필요가 있다. 교과서 이외에 도움을 주는 많은 정보를 포함한 책과 논문들이 도서관과 인터넷에 있다는 것을 명심한다. 5) 프로젝트에 대해 매일 조금씩 수정 후 어떤 부분은 쉽고 어떤 부분은 완수할 수 있을 것이다. 어려운 부분을 인식하고 장애물을 없앤다. 이것이 프로젝트를 완수하기 시작하는 것

이다. 익숙하게 되면 작업하는 것이 쉬워진다. 6) 독립적으로 일하기 기대하지만 어떤 도움 없이 완수할 수 있다고 기대하지 않는다. 프로젝트에 대해 상의하러 올 때 진행상황과 무엇을 하고 있는지 알려야 잘못된 길로 가는 것을 방지할 수 있다. 7) 도움이 필요할 때 교수가 완전한 도움을 주지 못할 때가 있다. 그 때는 도움을 받기 위해 도서관으로 가서 참고 도서를 활용하라. 8) 여러분을 위해 누가 도와줄 것이라 생각하지 않는다. 여러분이 올바른 방향을 가는지 자료를 안내하고 도와주는 것이 목적이다. 특별한 질문을 갖고 오라. 정리한 내용과 풀이는 분명히 하라. 9) 프로젝트를 완수하기 위해 필요한 작업을 마쳤을 때 틀에 맞는 보고서를 준비할 필요가 있다. 여러분이 제출한 보고서는 결론을 뒷받침할 혼합된 방정식, 공식, 글일 수 있다. 완전한 문장을 구사하여라. 좋은 문법, 정확한 구두점과 철자도 중요하다. 이 과정의 모든 학생이 이해하고 읽을 수 있게 쓰여져야 한다. 수학 내용 뿐만 아니라 사용된 표현에 의해 평가가 이루어 질 것이다.

프로젝트 수행 결과에 대해 알아보면 문제의 내용이 학생수준을 반영하지 못하고 학생들이 갖고 있는 프로젝트에 대한 태도와 다른 결과를 보여준다.

프로젝트 수행에 참여한 학생은 100명으로 (부록1)에 대한 결과를 각 문항별로 알아보면 다음과 같다.

**(1) 프로젝트 수행 과정에서 수업시간 이외에 보낸 시간은 주당 평균 몇 시간인가?**

주당시간(t)	1	1<t<2	2	2<t<3	3	3<t<4	4	6	8	13	계
인원비율(%)	13	29	15	12	13	6	3	3	4	2	100

**(2) 대학수학 학습에서 프로젝트 수행 과정의 가장 가치 있는 부분은 무엇이었나?**

가치 있다고 여기는 것은 '스스로 하기, 심도 있는 학습하기, 해결해 가는 과정에 의미두기, 새로운 지식의 습득, 높은 난이도의 문제 해결, 그룹 학습의 흥미, 교과서의 학습, 새로운 지식을 배울 기회, 미분과 적분 지식 습득, 머리를 많이 쓰기, 교과서 외의 부분에 대해 깊고 폭넓은 접촉, 여러 가지 다양한 생각하기, 수업 내용 이해에 도움 받기, 새로운 내용을 많이 접하고 알게 되기, 자신의 실력 점검하고 모르는 부분 이해하기, 전공과 관련지어 생각하기, 도전해 볼 기회 찾기, 평소에 모르던 부분을 경험하고 문제를 해결하는데 도움이 되는 수학자의 노력 알기, 더 깊고 자세히 배울 기회, 협동 학습의 중요성 깨우치기, 자료를 찾아가며 문제 해결하기, 수학에 대해 깊이 있는 생각하기, 새로운 수학의 정의를 알고 이해하는 것과 문제 해결 능력을 얻기, 수학 학습 능력 향상 느끼기, 다양한 정보 이용 문제 해결력 향상하기, 실생활에 수학이 깊이 광범위하게 침투해 있음을 알게 한 면, 생각을 하며 자료 찾는 과정의 중요성 알기'이었다.

**(3) 프로젝트를 수행한 이후로 수학 학습기술에 더 자신이 생겼는가? 그 이유는?**

긍정적인 대답은 61% 이고 그 이유는 '다양한 방법으로 모르는 방법을 알아보게 되어, 어려운 과

목이라 여기고 멀리 했는데 수학의 응용 원리를 알게 되어, 흥미를 느껴, 물어가며 배우게 되어, 찾아내는 학습을 통해, 새로운 지식을 얻어, 풀기 힘든 문제도 결국은 해결 가능하게 되어, 친구들의 도움에 힘입어, 다양한 접근 방법과 풀이 방법의 시도로, 많이 생각하고 시간 투자를 하여, 인터넷 통해 여러 가능성 열려, 나도 할 수 있어, 더 많은 것을 알게 되어, 어려운 문제 풀이도 쉽게 풀게 되어, 생각의 자유로움이 수학 학습의 다양성을 열어주어, 필요한 자료를 활용할 수 있게 되어, 여러 책을 찾아보고 알아가는 과정에, 공식의 다양한 증명을 해보며, 깊이 있는 수학 지식 획득으로, 기초를 확실하게 닦게 되어, 명확한 답에 접근하게 되어, 학습 기술이 증대 되어, 모르던 분야를 알게 되어' 자신감이 생겼고,

부정적인 대답은 39% 이고 그 이유는 '더 어렵게 느껴져, 어려운 과제 앞에 위축되어, 너무 생소하고 능력이 부족해서, 풀이법 찾기도 힘들고 이해도 어려워, 수학문제 풀이의 가망성이 없어' 자신감이 없어졌다는 것이다.

#### (4) 프로젝트 수행을 통해 수학 학습에 더 흥미가 일어났는가? 그 이유는?

긍정적인 대답은 61% 이고 그 이유는 '문제를 풀었을 때 쾌감을 느껴, 수학이 일상생활에 쓰이는 부분을 확신하게 되어, 새로운 공식을 알아내는 것이 신기하여, 난이도가 높은 것을 해결할 수 있다는 생각에, 무언가 하고 있다는 생각에, 신기하고 재미있는 부분을 느껴, 성적에 관계없이 도전할 수 있어, 친구들의 도움으로 쉽게 이해할 수 있어, 직접 풀고 해결하게 되어, 식의 유도 과정의 다양함에, 성취감을 느끼게 되어, 지금까지 생각과 다른 수학문제 접근이라, 처음 보는 문제여서, 계속 집중하다 보니, 자료 찾기가 보물찾기와 같아, 수학의 내용의 무궁무진함에 놀라, 배울 것이 많이 있다는 것이 흥미를 불러 일으켰고,

부정적인 대답은 39% 이고 그 이유는 '너무 어려워 좌절하게 되어, 시간을 너무 많이 빼앗기게 되어, 당황하게 되는 부분이 많아, 실생활과 점점 멀어져가는 생각이 들어, 풀지 못하는 자책감에' 흥미를 잃게 되었다는 것이다.

#### (5) 프로젝트를 수행하면서 수학 문제의 해결을 위해 보낸 시간은 모두 얼마인가?

투입시간	2-5시간	6-10시간	11-20시간	24시간 이상	계
인원비율(%)	31	34	27	8	100

#### (6) 그룹별 교과서의 프로젝트 문제 중 선택하고 싶은 문제(1-10)는? 그 이유는?

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	없다	계
인원비율(%)	28	13	3	3	3	5	2	20	2	6	15	100

문항 1에 대한 선택 이유는 '표준분류 방법을 많이 보게 되어, 인터넷을 통해 쉽게 조사하고 검색할 수 있어, 서술형 문제가 좋아, 가장 쉬워 보여, 궁금하여, 생활에 수학 활용이 되어, 단순한 문제로 보여, 친숙한 단어여서' 문항 2에 대한 선택 이유는 '일상생활에 활용이 되어, 어렵지만 흥미가 있어, 유용성 때문에, 신기하여, 생각을 많이 하게 되어' 문항 8에 대한 선택 이유는 '쉽게 찾을 수 있어, 쉽게 풀 수 있어, 검색이 용이하고 많이 나오는 용어여서, 재미와 흥미를 끌어, 피타고라스 증명에 대해 자세히 알고 싶어, 증명방법이 다양함에 놀라' 이었다는 것이고 나머지 문항은 선택이 적었다.

**(7) 프로젝트가 주어지는 과목을 다시 선택하라면 선택하겠는가? 그 이유는?**

다시 선택하겠다는 응답이 55%이고 그 이유는 '자기 발전에 도움이 되어, 참여할 수 있는 즐거움에, 천천히 해결하여 가며 자신감이 생겨, 적절한 양의 과제라서, 교과목 이외의 많은 것을 배울 수 있는 기회라서, 새로운 문제에 도전하여 문제를 해결하고 싶어, 한 번 더 시도하면 얻을 것이 많아져, 전공과목 공부에 도움이 되어, 새로운 지식 습득의 기회가 되어, 평소 모르고 있던 교과서 외의 생소한 문제에 접하고 싶어, 이러한 유형의 문제에 접근하고 싶어, 어려운 문제를 푼 자신감에, 수학에 대해 더 많이 찾아보고 배우려고, 자기계발에 이용하고 싶어, 오랜 시간 몇 가지 문제에 매달려 생각하는 것이 매력적이며, 이색적인 문제가 흥미를 불러 일으켜'이었고, 선택하지 않겠다는 응답이 45%이고 그 이유는 '너무 힘들고 어려워, 시간을 많이 빼앗겨, 다른 과목도 이런 도전을 해 보고 싶어' 한다는 것이었다.

**(8) 프로젝트를 수행하는데 가장 유용하다고 생각되는 도움은 무엇인가?**

유용한 순서대로 적어보면, 인터넷, 관련된 서적과 친구들의 도움이 60%이고, 나머지는 '영똥한 발상, 사고하는 능력, 다양한 풀이법 시도, 자신감, 증명의 방법의 이용, 고등학교 시절의 지식, 검색 수행 능력, 상상력, 폭넓은 수학지식, 기본 이론'등 이었다.

**(9) 프로젝트 수행에서 가장 어려운 부분은 무엇인가?**

어려웠던 부분은 '난이도가 높은 문제의 이해, 생각해보지 못한 문제 풀기, 접해보지 못한 문제 해결과 접근 방법 생각하기, 협의할 대상 찾기, 참고 자료 찾기, 혼자 힘이 부족함을 알기, 기초와 수학 학습 능력 부족함 느끼기, 복잡한 식 이해하기' 등 이었다.

**(10) 프로젝트 수행에서 가장 즐거운 부분은 무엇인가?**

85%의 학생이 즐거운 부분이 있었다고 답하였고 내용은 '모르던 문제의 해법이 떠오를 때, 참고 자료와 자문할 친구를 찾은 경우, 새로운 사실을 알아가며 공식을 만들기, 협동으로 문제 해결하기, 어려울수록 성취감이 커져가는 것을 알기, 정리의 증명의 다양함, 새로운 해법이나 지식의 습득 과

정, 기존의 지식을 활용하여 문제 해결하기, 풀고 나서 행복감 느끼기, 비교 검토하며 의견 수렴해가는 과정, 수학 속에 혼자만의 공간이 만들어질 때, 잘못 알고 있던 부분을 수정하여 받아들이기 등이었고, 15%의 학생은 즐거움이 없었다고 하였다.

#### (11) 어떤 프로젝트를 좋아하는가? 그룹 또는 개인? 그 이유는?

그룹 프로젝트를 선호하는 학생이 61%이었고 그 이유는 '친구와 대화, 토의, 도움을 주며 할 수 있어, 조사하는 문제의 경우 협동하는 것이 시간 절약에 이익이 되어, 서로 모르는 부분 보완하여, 다른 관점에서 바라보는 점 배우기, 많은 생각의 교환, 의견 수렴으로 문제 해결에 다가가기 쉬워, 문제에 대한 정보 공유 해결에 유리한 면이 많아, 백지장도 맞들면 낫아' 등 친구들과 함께 문제를 공유하고 의견교환하며 깨우치고 해결해가는 과정에서 선호하게 되었으며, 개인 프로젝트를 선호하는 학생은 36%이었고 그 이유는 '혼자 할 수 있고 좋아, 부담을 주는 것이 싫어, 도전하고 싶어, 친하지도 않은 친구와 불편함을 느껴, 상대와 부딪치기 싫어, 그룹에서 손해 보는 느낌이 들어, 모이는 것이 힘들어, 수학은 혼자 생각하며 푸는 것이라는 생각이 들어, 실력 차이를 알고 싶어' 등으로 개인적인 능력과 성격으로 혼자하려 했으며, 3%의 학생은 개인 그룹 모두 선호한 것은 '협동하고 도움 주며 자기 존재와 능력을 알리고, 생각하는 힘을 기르고 인내심도 굳건히 할 수 있어서'이었다.

#### (12) 대학수학에서 프로젝트를 여러분이 부여한다면 그 내용이나 주제는? 그 이유는?

주제는 흥미 있고 기본적인 내용과 교재와 관련된 내용이 40% 정도로 가장 많고, '증명과 관련된 문제, 물리와 밀접한 수학 내용, 일상생활에 관련된 것이나 생활에 기본이 될 내용, 간단하고 다양하고 재미있는 수학문제, 난이도가 높지 않고 자신감을 줄 수 있는 내용, 배우는 내용과 관련된 수학사, 틀린 문제를 주고 틀린 점을 찾고 해결책 찾기, 교과서 외의 내용으로 새로운 것, 미적분학의 학습에 유용한 내용, 강의 내용으로 할 수 있는 수준의 문제, 학습 능력이 부족한 학생을 도와 줄 내용, 수학 공식을 활용한 문제 풀기, 수학의 필요성과 중요성을 느끼게 하는 내용' 등 다양하였고, 그 이유는 '증명 과정이나 문제 풀이 과정에 대해 알고 싶어, 수학의 중요성을 일깨우고 싶어, 수학에 대한 잘못된 인식을 없애려고, 수학을 쉽게 느끼게 하려고, 생활 속에 수학이 깊이 들어와 있음을 알려려고, 수학에 대한 흥미를 얻으려고' 등 이었다.

개인별 프로젝트 문제(부록2)의 수행 결과를 각 문항별로 알아보면 다음과 같다.

1) 정사면체와 정팔면체의 부피 구하기.

(1) 삼각함수 이용하기와 (2) 삼각함수나 미적분 이용하지 않고 구하기에 대한 학생들의 풀이는 한 가지로 모두 같았다.

2) 원의 넓이 구하기.

이등변삼각형을 이용한 구분구적법, 부채꼴로 잘라 지그재그로 늘어놓아 직사각형 모양을 만들어 구하기, 정적분을 이용하기의 세 가지 방법만 제시되었다.

3) 미래인구의 추정공식 만들기.

한국인 인구조사 통계를 이용하여 추정공식으로

3차 다항식  $0.0000127613x^3 - 0.078748x^2 + 161.925x - 110949$  와 컴퓨터 프로그램을 이용하여 또 다른 추정공식을 유도한 2개의 식만 소개되었다.

4) 다항식의 zero 구하기.

제출한 대부분의 학생이 뉴턴의 근사법공식을 이용하여 0.32까지 구하였다.

5) 접선과 넓이.

가장 쉬운 문제로 이 문제를 부여받은 학생이 모두 풀었다.

6) 변화율과 거리.

같은 풀이만을 제출하였다.

7) 최단거리 구하기.

제시된 풀이법에 따라 같은 풀이만을 제출했다.

(8) 넓이와 적분.

손바닥을 그래프용지에 그리고 함수의 근사식을 만들어 정적분을 이용하여 구한 학생과 직사각형으로 만들어 구할 수 있는 부분과 구분구적법으로 100여개의 작은 직사각형을 만들어 일일이 넓이를 구해 더하여 구한 학생으로 구분할 수 있다.

9) 적분법.

미정계수법을 이용하여 구한 학생은 1명이고 나머지는 부분적분법만을 이용하여 구하였다.

10) 정적분.

주어진 공식을 이용하여 구한 학생은 1명도 없고, 구하더라도 정답은 없었다.

## 11) 점화식 이용 적분.

인터넷이나 대부분의 미적분교재에 풀이가 나와 있어 그대로 옮겨 적은 학생이 대부분이었다.

## 12) 치환적분

이 문제 역시 인터넷이나 대부분의 미적분교재에 풀이가 나와 있어 그대로 옮겨 적은 학생이 대부분이었다.

개인에게 부여한 프로젝트이지만 같은 문제를 맡은 학생끼리 정보 교환을 하여 성의 있는 한 학생에게 과제를 내어준 것과 같은 결과를 얻었다는 생각이 들었고, 생각보다 학생들은 남의 것을 그대로 옮기는데 주저함이 없었고 읽어보고 다시 프린트하여 제출하라고 하여도 끝까지 성의 없이 흘러 쓰고 답도 적지 않은 학생도 있었다. 그러나 열심히 자료를 찾아서 좋은 모양으로 편집하여 노력을 한 학생도 많았다. 문제의 풀이뿐만 아니라 남에게 프리젠테이션 하는 능력도 중요함을 일깨워준 것이 학생들이 배운 점이라고 여겨진다.

(부록3) 그룹별 교과서의 프로젝트 문제의 수행 결과를 각 문항별로 알아보면 다음과 같다.

## 1) 국제적인 책 표준기호 ISBN에 대해 설명하기.

국제도서 표준기호를 인터넷에서 찾기가 용이하여 이 문제를 부여받은 학생은 쉽게 설명할 수 있으나 수학내용이 사용되는 부분의 해설이 부족하였다.

## 2) Julius와 Gregory 달력에 대해 설명하고 요일을 구하는 공식을 알아보기.

인터넷의 정보를 이해하여 수학과 관련된 내용을 알기 쉽게 옮겨 적은 능력이 부족함을 보여주고 Julius력, Gregory 력에 대한 공식만을 소개하고 모든 학생이 같은 설명만 하였다.

3)  $\pi$ 에 대한 근사값 구하기.

$\pi$ 에 대해 정리한 책과 인터넷 자료도 많은데 학생들이 이해하지 못하고 서투르게 기술하여 학생들의 수준에 맞게 이해를 시켜야 함을 느꼈다.

4) 수직선 위에  $\sqrt{5}$ 의 위치를 나타내기.

가로 길이 2이고 세로 길이 1인 직사각형의 대각선 또는 직각을 낀 두변의 길이 2, 1인 직각 삼각형의 빗변을 이용하여 나타내는 방법을 주로 이용하여 수직선에  $\sqrt{5}$ 를 나타내었다.

5) Riemann합, 상합(U)과 하합(L)을 정의하고  $\int_a^b f(x)dx$ 를 이들로 나타내기.

분할을 주어진 구간을  $n$ 등분하고 증가함수의 경우만 다루거나, 인터넷이나 책을 참고하여 설명한 경우도 이해하고 옮겨 적었다고 보기 어려웠다. 학생들의 수준에서 상당히 어려운 부분이라 여겨진



다.

6)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  이 성립함을 여러 가지 방법으로 보이기.

등차수열의 합 구하는 공식 이용, 수학적귀납법 이용, 적분의 개념 이용하기 세 가지 답만 있었다.

7) 코사인 제2법칙을 여러 가지 방법으로 보이기.

피타고라스정리와 삼각비의 정의 이용, 좌표평면 이용, 원과 비례 이용, 틀레미정리 이용, 변의 길이 이용, 넓이 이용, 원을 이용, Bartholomeo Pitiscus의 증명, Timothy A.Sipke의 증명, 벡터 이용의 10가지 증명 방법으로 보인 학생이 1명 이고, 나머지는 이 중 1-5개 정도만 보였다.

8) Pythagoras의 정리를 여러 가지 방법으로 증명하기.

21가지 방법으로 보인 학생이 한 명이고 대부분의 학생들은 10가지 이내의 방법을 소개했다. Pythagoras의 정리를 증명한 책이 출판되어 있고 인터넷에서도 정보가 많지만 도형의 그림과 수식 타이핑이 쉽지 않아 학생들이 성의를 덜 보였다고 여겨진다.

9) e가 무리수임을 보이기.

유리수라고 가정하여 무리수임을 보이는 귀류법을 이용하여 증명한 학생이 대부분이었다.

10) Heron의 공식을 여러 가지 방법으로 증명하기.

10개의 방법을 제시한 학생도 있었지만 대부분 1-2개만 보였다.

그룹별 프로젝트도 여러 팀으로 나누어 과제를 부여했지만 제출한 풀이는 몇 학생만 성의를 보이고 나머지 학생은 그들의 풀이를 옮겨 적거나 전혀 성의를 보이지 않은 학생도 있었다. 문제의 수준이 1학년 학생에게는 한계가 있고 인터넷이나 참고서적에 접근하는 능력이 제한적이고 적절한 논문에는 전혀 접근하지 못하여 프로젝트 정답으로 예상했던 답을 얻지는 못했으나 교과서 내용이외의 것에 흥미와 관심을 보이고 새로운 문제풀이 접근에 의욕을 보인 학생이 있다는 것이 성과로 여겨진다. 여기서도 그림과 수식의 타이핑 실력을 향상시켜 프리젠테이션 능력을 높인 것은 학생들의 큰 자산이 될 것이다. 인터넷이나 참고서적을 통해 수학 읽기에 시간을 보내고 수학을 즐기고 가까이 할 수 있는 방법과 알 기회를 주게 된 것이 프로젝트 수행의 보람이 될 것이다.

### III. 결 론

#### 1. 문제점과 결과

프로젝트 수행에 충분한 시간을 투입했다고 보기 어려웠으며, 1차 제출에서 성의가 없고 과제수행의 결과로 보기 어려워 시간을 더 배려하고 형식을 갖추게 하고 깨끗하게 타이핑하여 제출하도록 하였다.

39%의 학생은 '더 어렵게 느껴져, 어려운 과제 앞에 위축되어, 너무 생소하고 능력에 박차서, 풀이법 찾기도 힘들고 이해도 어려워, 수학문제 풀이의 가망성이 없어' 자신감이 없어졌다고 하였고, 또 39%의 학생은 '너무 어려워 좌절하게 되어, 시간을 너무 많이 빼앗기게 되어, 당황하게 되는 부분이 많아, 실생활과 점점 멀어져가는 생각이 들어, 풀지 못하는 자책감에' 흥미를 잃게 되었다고 하였으며, 45%의 학생은 '너무 힘들고 어려워, 시간을 많이 빼앗겨, 다른 과목도 이런 도전을 해 보고 싶어' 대학수학 관련 프로젝트 수행을 선택하지 않겠다고 하였고, 15%의 학생은 프로젝트 수행과정에 즐거움이 없었다고 하였다.

그럼, 개인 각각 12, 10문항으로 100명의 학생에게 배정하여 20명-30명이 같은 문제를 해결하게 되어 일부이긴 하지만 서로 정보를 교환하며 잘된 풀이를 택하려고 하고 무임승차를 하는 학생이 있어 노력하는 학생들에게 비난을 사는 경우가 있었으나 독자적으로 하려고 노력을 한 학생이 있다는 것이 희망을 보여주었다. 그들을 학습도우미로 활용하여 수학 학습능력 향상과 수학에 대한 태도를 긍정적으로 보도록 홍보하는데 도움을 요청하는 것이 좋다고 여겨진다.

프로젝트 수행을 통해서 학생들은 수학에 대한 사고 능력과 글쓰기 능력이 향상되었고 그룹 활동을 통해 협동심과 상호 협조적인 관계의 유지의 중요성을 깨달았다. 이런 기회를 갖게 된 것을 대학생활의 보람으로 느끼게 되었다.

#### 2. 앞으로의 방향과 과제

학생들은 대학수학 학습에서 프로젝트 수행과정은 가치 있는 부분이라고 여러 이유를 들어 주장하였으며 61%의 학생은 프로젝트 수행을 통해 수학학습에 자신감을 얻었고, 또 61%의 학생은 수학 학습에 흥미가 일어났다고 하였다. 55%의 학생은 프로젝트가 주어지는 과목을 다시 선택하고 싶다고 하였고 61%의 학생이 그룹 프로젝트를 선호하고 있었다.

프로젝트 수행에 대해 일부 학생은 글로 표현하는데 힘들어 하고 프리젠테이션 능력이 부족하다. 자료에 충분히 접근하고 성공적으로 수행한 학생의 모범사례를 본받도록 구체적인 수행과정과 모범답을 제시하여 소개하고 프로젝트 수행을 성공적으로 하도록 다시 한번 기회를 준다. 각자의 경험 자료를 수집하고 성공적으로 수행한 학생의 모범 사례를 모아 새로운 프로젝트 수행에 활용하고 학습에 어떻게 도움이 되고 있는가에 대해 구체적으로 제시 한다. 모범답을 통해 수학에 대한 흥미와 지식을 쌓을 기회를 줄 수 있으며 여러 가지 방법으로 문제를 푸는 방법을 통해 얻는 통찰력은 학습개념을

깊이 있게 이해하는데 유용하고 다음에 배우게 되는 개념을 더욱 용이하게 받아들일도록 한다.

앞으로 프로젝트 수행 과제는 1) 20명 단위의 학급에서 2) 2명 그룹으로 3) 수준에 맞는 교과서외의 적절한 과제를 택하여 4) 수학에 흥미를 불러일으키고 긍정적인 태도를 갖게 하는 도전적인 문제로 5) 그룹끼리 중복되지 않도록 6) 충분한 참고서적과 자료를 제공하여 7) 팀워크의 중요성과 필요성을 느끼고 협력할 수 있게 8) 즐거운 마음으로 9) 일상생활에 수학이 같이 하고 있음을 알리고 10) 2개월의 충분한 과제 수행기간을 주어 수학학습에 과제 수행이 도움이 되도록 한다.

(부록3)의 교과서외의 프로젝트 문제에 대한 모범 답안은 다음 논문들을 참고하면 도움이 될 것이다. (Ayoub, 2006), (Edward et al., 1991), (Jacob & Osler, 2007), (Lam, 2007), (Morrel, 2006), (Sirotic & Zakis, 2007)과 참고서적(데이비드 블래트너(웁킨이 한영덕), 2002/ 페트르베크만(웁킨이 박영훈), 2002/ 어니스트 지브로스키(웁킨이 김창호, 연운정), 2004/ 엘리마오(웁킨이 허민), 2005/ 서먼 스타인(웁킨이 이우영), 2006/ 이만근, 전병기 엮음, 2007)을 참고하면 도움이 될 것이다.

## 참 고 문 헌

- 데이비드 블래트너 (2002). 웁킨이 한영덕, 파이의 즐거움, 서울: 경문사.
- 서먼 스타인 (2006). 웁킨이 이우영, 아르키메데스, 서울: 경문사.
- 어니스트 지브로스키 (2004). 웁킨이 김창호·연운정, 원의 역사, 서울: 경문사.
- 엘리마오 (2005). 웁킨이 허민, 오일러가 사랑한 수 e, 서울: 경문사.
- 이만근·전병기 엮음 (2007). 올댓피타고라스 정리, 서울: 경문사.
- 페트르베크만 (2002). 웁킨이 박영훈, 파이의 역사, 서울: 경문사.
- Ayoub B. A. (2006). *Area, Diagonals, and Circumcircle of a Cyclic Quadrilateral, Mathematics and Computer Education*, **40(1)**, pp.58-63.
- Edward M. C., Gaughan D., Knoebel A., Kurtz D. S., & Pengelly D. (1991), *Student Research Projects in Calculus, The Mathematical Association of America*.
- Jacob W. & Osler T. J. (2007), Constructing a line segment whose length is equal to the measure of a given angle, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **38(4)**, pp.529-530.
- Lam T. T. (2007), Contextual approach in teaching mathematics : an example using the sum of series of positive integers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **38(2)**, pp.252-259.
- Morrel J. H. (2006), Using Problem Sets in Calculus, *Primus*, **16(4)**, pp.376-383.
- Sirotic N., & Zakis R.(2007), Irrational numbers on the number line-where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **38(4)**, pp.477-488.

## The Effect of Group Projects in College Mathematics Teaching

**Kim, Byung Moo**

School of General Arts and Sciences, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk, 380-702, Korea

E-mail : bmkim6@hanmail.net

This study concerns with the effects of group projects performed by the students in college math classes. The study result shows that 61% of the students get more self-confidence and interest in mathematics through working projects. In addition, the result reveals that one of the essential factors for successful college mathematics class is to provide a strong motivation for learning to students.

For effective teaching through group projects, this paper suggests that 1) the number of students in the class be 20 or less, 2) the projects group be consisted of two members, 3) the instructor should select proper problems to students' level from extra-textbooks, 4) the problems should be interesting, positive and challenging, 5) each group should take only one problem, 6) the groups be provided with enough references and materials, 7) each student in the group be cared to feel importance and necessity of mathematics and cooperative work, 8) the students should work with math joyfully, 9) the instructor remind the students that we live with mathematics in real life, 10) 2-month be a necessary and appropriate term in working projects.

---

\* ZDM Classification : D15

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10

\* Key Words : college mathematics learning, project work, change of mathematics attitude, group work

<부록 1> 프로젝트 수행 설문지

\* 다음 프로젝트 수행 관련문항을 읽고 물음에 성실히 답하여주세요.

1. 프로젝트 수행 과정에서 수업시간 이외에 보낸 시간은 주당 평균 몇 시간인가?
2. 대학수학 학습에서 프로젝트 수행 과정의 가장 가치 있는 부분은 무엇이었나?
3. 프로젝트를 수행한 이후로 수학 학습기술에 더 자신이 생겼는가? 그 이유는?
4. 프로젝트 수행을 통해 수학 학습에 더 흥미가 일어났는가? 그 이유는?
5. 프로젝트를 수행하면서 수학 문제의 해결을 위해 보낸 시간은 모두 얼마인가?
6. 그룹별 교과서외 프로젝트 문제 중 선택하고 싶은 문제(1-10)는 그 이유는?
7. 프로젝트가 주어지는 과목을 다시 선택하라면 선택하겠는가? 그 이유는?
8. 프로젝트를 수행하는데 가장 유용하다고 생각되는 도움은 무엇인가?
9. 프로젝트 수행에서 가장 어려운 부분은 무엇인가?
10. 프로젝트 수행에서 가장 즐거운 부분은 무엇인가?
11. 어떤 프로젝트 형태를 좋아하는가? 그룹 또는 개인? 그 이유는?
12. 대학수학에서 프로젝트를 여러분이 부여한다면 그 내용이나 주제는? 그 이유는?

<부록 2> 개인별 프로젝트 문제

\* 학번을 4로 나누어 나머지가 1이면 문항 1,5,9를 나머지가 2이면 문항 2,6,10을 나머지가 3이면 3,7,11을 나머지가 0이면 4,8,12를 풀어 각자 제출

1. 정사면체와 정팔면체의 부피 구하기.

정사면체의 부피는 1) 정사면체의 부피는 삼각함수를 이용하여 구하여라. 2) 정사면체의 모서리가 정육면체의 면의 대각선이다. 미적분이나 삼각함수를 이용하지 않고 부피를 구하여라. 정팔면체의 부피는 1) 삼각함수를 이용하여 구하기. 2) 정팔면체의 각 꼭지점을 정육면체의 면의 중심에 일치시킨 다음 삼각함수나 미적분을 이용하지 않고 계산하기.

2. 원의 넓이 구하기.

BC 300년 전에 살았다면 공식을 모를 수 있다. 원의 넓이를 구하는 공식은 BC 250년경 Archimedes에 의해 유도되었다. 원을 똑같이  $n$ 개의 부채꼴로 자른 다음 중심이 꼭지점인 이등변삼각형의 극한값으로 계산하였다. 이 방법을 이용하여 구하고, 또 다른 방법으로 구할 수 있다면 제시하여라.

3. 미래인구의 추정공식 만들기.

인구조사 통계를 참고하여 우리나라의 인구증가율을 알아보고 미래의 인구를 추정하는 공식을 3차 다항식으로 제시하기. 또 전체 인구의 증가율과 비슷한 특별시, 광역시나 도를 찾아 비교해 보아라.

4. 다항식의 zero 구하기.

도함수를 이용하여  $P(x) = x^3 + 3x - 1$ 이 0이 되는  $x$ 를 소수 2째 자리까지 구하여라.

## 5. 접선과 넓이.

곡선  $xy=1(x>0, y>0)$  위의 임의의 점에서 그은 접선이 좌표축과 만나는 점과 원점에 의해 만들어진 삼각형의 넓이는 일정함을 보여라.

## 6. 변화율과 거리.

바람이 들어있지 않은 풍선에  $5\text{cm}^3/\text{sec}$ 의 일정한 비율로 바람을 불어넣고 있는 풍선(구모양) 위에 파리 두 마리가 있다. 한 마리는 북극점, 다른 한 마리는 적도에 앉아 있다.

- 1) 라벨을 붙여 그림으로 나타내 보아라.
- 2) 두 마리의 위치는 시간에 따라 얼마나 멀어지는가?
- 3) 3초 후,  $\frac{1}{10}$ 초 후,  $\frac{1}{100}$ 초 후,  $t$ 초 후,  $t=0$ 일 때의 거리는?

## 7. 최단거리 구하기.

직선 도로 L의 남쪽에 두 도시 A, B가 있는데 이들은 어떤 타원의 두 초점이며 A, B 사이에 도로는 연결되어 있지 않다. 각 도시에서 시작하여 한 도로씩 두 도로를 만들기로 하였다. A에서 B로 가는 지름길은 도로 L 위의 P를 항상 지난다. 우선 이들에 대해 그림으로 나타내고 1) 기존의 도로 L을 이용하여 두 도시 A, B를 잇는 최단도로를 미분적분을 이용하여 구하여라. 2) 기본 기하(타원의 정의 등)를 이용하여 해결해 보아라.

## 8. 넓이와 적분.

여러분의 손의 넓이를 구하여라. 실제 넓이와 구한 넓이가 1%이내의 오차범위에 들도록 하여라. 구하는 방법은 다양할 수 있으나 적분과 연결시킨 합리적인 설명은 필수이다.

## 9. 적분법.

다음 적분을 다음 방법 (1) 미정계수 방법, (2) 부분적분법을 이용하여 구하여라.

$$\text{a) } \int (\cos 3x)e^{4x} dx \qquad \text{b) } \int \cos Ax \sin Bx dx \quad (A^2 \neq B^2)$$

$$\text{c) } \int (4x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 10x^2 + 5)e^{4x} dx$$

## 10. 정적분.

다음 정적분을  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  ( $f$ 는  $[0, \pi]$ 에서 연속)을 이용하여 구하여라.

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2}{(\sin x)^2 + (\cos x)^2} dx$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^n}{(\sin x)^n + (\cos x)^n} dx \quad (n: \text{임의의 자연수})$$

11. 점화식 이용 적분.

$$\int \cos^n \theta d\theta = \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \theta d\theta + C$$

를 이용하여  $\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta$ 를 구하여라.

12. 치환적분.

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{로 치환하여 } \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec} x dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

<부록 3> 그룹별 교과서의 프로젝트 문제

\* 학번이 1,6으로 끝나면 문항1, 6을 2,7로 끝나면 문항2, 7을 3,8로 끝나면 문항3, 8을 4,9로 끝나면 문항4, 9를 5, 0으로 끝나면 문항5, 10을 두 명이 한조가 되어 공동으로 제출한다. 예를 들면, 학번이 XX.X211, XX.X216 이 한조가 된다.

1. 국제적인 책 표준기호 ISBN에 대해 설명하여라.
2. Julius와 Gregory 달력에 대해 설명하고 요일을 구하는 공식을 알아보아라.
3.  $\pi$ 에 대한 근사값을 소수 10째 자리까지 다음 방법으로 구하여라.
  - 1) 기하학적(내접다각형, 외접다각형 이용) 방법.
  - 2) 미분적분( $\pi$ 에 대한 근사공식)을 이용한 방법.
4. 수직선 위에  $\sqrt{5}$ 의 위치를 나타내기 위해 여러 가지 방법을 제시하여라.
5. 구간  $[a, b]$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 의 Riemann 상합(U)과 하합(L)을 정의하고  $\int_a^b f(x)dx$ 를 이들로 나타내어라.
6.  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이 성립함을 여러 가지 방법으로 보여라.
7. 코사인 제2법칙을 여러 가지 방법으로 보여라.
8. Pythagoras의 정리의 증명을 10가지 이상 제시하여라.
9.  $e$ 가 무리수임을 여러 가지 방법으로 보여라.
10. Heron의 공식

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (단,  $S$ 는 세 변의 길이  $abc$ 인 삼각형의 넓이이고,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ )의 증명을 10가지 제시하여라. 또 원에 내접하는 사각형의 네 변의 길이가  $a, b, c, d, s = \frac{a+b+c+d}{2}$ 일 때, 넓이  $E = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 임을 보이고 Heron의 공식을 확인하여라.

## &lt;부록 4&gt;

&lt;표 1&gt; 대학수학에 대한 태도조사(대상 학생수 : 98명)

문 항	총 점	평 균	SD
1. 나는 정말 수학을 좋아한다.	292	2.98	1.02
2. 나는 전에 다루었던 종류의 수학문제를 좋아한다.	321	3.28	0.99
3. 실생활에 근거한 수학문제들이 더 흥미 있다.	295	3.01	1.08
4. 수학을 실제문제에 적용하는 것을 배우지 않는다면 수학을 배우는 것은 효과가 없다.	315	3.21	1.01
5. 수학을 공부할 때 나는 불안정함을 느낀다.	298	3.04	1.09
6. 탐구는 수학과정의 유용한 부분이다.	339	3.46	0.74
7. 산업과 사업에서 사람들이 수학을 이해하는 것은 중요하다.	343	3.50	0.82
8. 수학을 공부할 때 나는 때때로 분명히 생각할 수 없다.	309	3.15	0.93
9. 나는 다른 사람들과 수학문제를 토론하는 것이 도움이 됨을 안다.	325	3.32	0.95
10. 수학을 학습하는 것은 미래에 나를 도울 것이다.	355	3.62	0.93
11. 나는 실생활의 내용에 관련한 문제들이 다른 문제들보다 더 어렵다는 것을 안다.	338	3.45	0.95
12. 나는 수학에 대해 마음이 편안함을 느낀다.	235	2.40	0.94
13. 우리가 컴퓨터를 가졌기 때문에 더 많은 수학을 알 필요가 없다.	245	2.50	0.82
14. 나는 나의 상상력에 대한 범위를 벗어나는 과제를 좋아한다.	268	2.73	0.97
15. 나는 수학문제를 풀 수 없다는 것을 두려워 할 때, 주저하는 느낌을 갖고 수학에 접근한다.	286	2.92	1.03

&lt;표 2&gt; 프로젝트 수행과 협동학습에 대한 조사(대상 학생수 : 98명)

문 항	총 점	평 균	SD
1. 그룹으로 학습할 때 혼자 할 수 있던 것보다 더 빨리 완수할 수 있다.	360	3.67	1.06
2. 그룹의 나머지 사람들에게 나의 아이디어를 받아들여지게 하는 것은 어렵다.	281	2.87	0.77
3. 미래에 그룹 프로젝트에 참여하는 것에 대해 나는 매우 자신이 있다.	292	2.98	0.9
4. 나는 한 맥락에서 문제를 풀 수 있으면 그것은 또 다른 맥락에서 내가 문제를 푸는 것을 돕는다.	315	3.21	0.9
5. 프로젝트에 참여하는 것은 가치 있는 일이다.	338	3.45	0.91
6. 나는 프로젝트가 성적에 반영되지 않으면 열심히 하지 않을 것이다.	264	2.69	0.95
7. 프로젝트에 이용되는 수학 기술을 결정하는 것은 쉽다.	265	2.70	0.91
8. 프로젝트의 문제들은 흥미롭다.	304	3.10	0.84
9. 나는 프로젝트에서 많은 것을 배운다.	308	3.14	0.9