Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(1), 49–55

한국데이터정보과학회지

일반화된 분수 지배게임에 대한 균형성

김혜경[1] · 박준표[2]

[1]대구가톨릭대학교 수학과 · [2]경북대학교 수학과

접수 2008년 12월 8일, 수정 2008년 12월 24일, 게재확정 2008년 12월 29일

요 약

게임이론 중 특히 협력게임은 종종 그래프에서의 지배문제로에 기인하며, 협력게임에서의 코어는 바로 이에 대한 선형프로그램의 최적해가 될 수 있다. 이 논문에서는, 분수 지배게임의 특수한 형태인 분수 지배게임을 새롭게 정의하며, 분수 지배게임의 코어를 찾는다. 더욱이 선형 프로그래밍과 그 쌍대성 개념을 이용하여 $\{k\}$-분수 지배게임의 균형성을 조사한다. 또한 코어의 원소를 찾기 위한 중요한 문제가 되는 오목성에 있어서 분수 지배게임도 오목성을 가질 것이라고 추축해본다.

주요용어: 균형성, 코어, $\{k\}$-분수 지배 게임, $\{k\}$-분수 지배함수.

1. 머리말

게임이론 중 하나인 협력게임 $\Gamma = (V, c)$은 참가자 (player)들의 집합 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$와 특성함수 $c : 2^{|V|} \to R$로 구성되는데, 여기서 $c\,(S)$는 참가자들 집합의 부분집합, 즉 참가자들의 부분연합에 의해 필요한 비용 (혹은 생성되는 이익)을 나타내며, $c\,(\Phi) = 0$라는 성질을 가진다. 협력게임에서 중요한 문제는 전체 참가자에 대하여 총 비용 $c\,(V)$를 참가자들의 어떠한 부분 연합에도 깨어지지 않고 모든 참가자에게 공평하게 분배하는가 하는 것이다. 이러한 문제해결에 있어서 중요한 개념들 중 하나가 코어 (Core)이다. 우리는 협력게임에서 중요한 개념인 코어를 귀속벡터 (imputation)으로부터 유도할 수 있다. $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$라는 분배 벡터가 $\sum_{i \in V} z_i = c\,(V)$이고 동시에 각각의 $i \in N$에 대하여 $z_i \leq c\,(\{i\})$을 만족하게 되면 이 분배벡터를 게임 $\Gamma = (V, c)$의 귀속벡터이라고 한다. 따라서, 게임 $\Gamma = (V, c)$의 코어는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{Core}(\Gamma) = \left\{ z \in R^n | z(V) = c(V) \text{ 그리고 } z(S) \leq c(S), ^{\forall} S \subseteq V \right\}$$

(단, $z\,(S) = \sum_{i \in S} z_i$이다.)

한편, 최근에 그래프 이론에서 많이 연구되고 있는 지배문제들 (Domination problems)을 협력게임에 응용하여 다루는 논문들이 많이 있다. 이를 지배게임 (domination game)이라 부르는데 여기서는 주로 비용 할당게임 (a cost allocation game)이다.

주어진 그래프 $G = (V, E)$에 대하여 V를 게임 참가자들의 집합으로, E를 참가자들 사이의 문제와 관련이 있으면 연결한 선을 의미한다. 다음의 상황을 고려해보자. 특정한 시설들 (소방서, 전력발전소, 백화점 등)이 설치될 몇 군데의 지역이 있다. 특정한 지역에 대하여 시설물의 설치에 대해서는 고정된

---

[1] (712-720) 경북 경산시 하양읍 금락1리 330번지, 대구가톨릭대학교 수학과, 교수.
[2] 교신저자: (702-201) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 수학과, 박사과정.
E-mail: jppark@knu.ac.kr

설치비용이 있을 것이다. 여기서 다른 지역에서 각 시설물들을 사용할 수 있으면 선으로 연결 한다. 그러면, 하나의 선점된 지역에 시설물을 설치하든가 혹은 그 주변 지역에 시설물을 설치하든 간에 최소의 비용으로 시설물을 설치할 수 있는 지역을 선택하는 것이 문제가 된다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 시설물을 설치할 수 있겠는가? 우리는 최소의 비용으로 참가한 모든 지역의 협동이 깨어지지 않고 필요한 비용을 잘 분배 할 수 있는 해가 존재하는가? 또한 존재한다면 그해는 어떻게 찾을 것인가 하는 문제이다.

이 논문에서는 분수 지배 문제의 특별한 형태인, 그래프 상의 $\{k\}$-분수 지배 문제 ($\{k\}$-fractional domination)로부터 야기되는 협력게임에 대하여 소개한다. 분수 지배문제는 그래프 상에서 전체 중량인 $\sum_{v\in V} f(v)\,w(v)$를 최소가 되도록 결정하는 분수 지배함수 f를 찾는 것이다. 이 논문은 구성은 다음과 같다. 2장에서 $\{k\}$-분수 지배게임을 우리가 정의하여 소개한다. 3장에서 $\{k\}$-분수 지배게임의 코어의 특성과 균형성 (balanceness)을 연구하며, 4장에서 결론과 함께 몇 가지 문제를 고려해본다.

2. $\{k\}$-분수 지배게임의 정의

새로운 게임을 정의하기 위해서 먼저 그래프 이론에서 알려진 분수 지배 함수를 살펴보겠다. 꼭짓점에 대한 중량함수 $w : V \to R^+$를 지니는 하나의 그래프 $G = (V, E; w)$에 대하여, 만약 모든 $v \in V$에 대하여 $\sum_{n\in N[v]} f(u) \geq 1$을 만족하면, 우리는 그 함수 $f : V \to [0, 1]$를 그래프 G의 분수 지배함수라고 한다. 분수 지배문제는 그래프 상에서 최소 중량 지배값 $\gamma(G) = \sum_{v\in V} f(v)\,w(v)$을 결정하는 분수 지배함수 f를 찾는 것이다.

꼭짓점 중량함수 $w : V \to R^+$를 가지는 $G = (V, E; w)$라는 그래프를 가져오자. 함수 $f : V \to [0, 1]$가 모든 $v \in V$에 대하여 $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq k$를 만족하면 우리는 함수 f를 그래프 G의 $\{k\}$-분수 지배함수라고 한다. 분수 지배문제와 비슷하게, $\{k\}$-분수 지배문제는 전체 중량 $\sum_{v\in V} f(v)\,w(v)$를 최소가 되도록 만들어주는 $\{k\}$-분수 지배함수를 찾는 것이다. 이 경우에 $\gamma(G)$라고 하는 최소 중량 지배값은 그래프상의 모든 $\{k\}$-분수 지배함수들 중에서 가장 작은 $\sum_{v\in V} f(v)\,w(v)$값으로 정의된다. 편의상 $\sum_{u\in S} f(u)$는 $f(S)$로, $f(i)$는 f_i로 간단히 적겠다. 이러한 내용을 토대로 $\{k\}$-분수 지배게임을 정의한다.

정의 2.1 꼭짓점에 대한 중량함수 (a vertex weight function) $w : V \to R^+$를 지니는 하나의 그래프 $G = (V, E; w)$에 대하여, 그래프 G에 대응되는 $\{k\}$-분수 지배게임 (a $\{k\}$-fractional domination game) $\Gamma = (V, c)$은 다음과 같이 정의된다.

(1) 게임 참가자들의 집합은 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$이다.

(2) 각각의 참가자들의 연합 $S \subseteq V$에 대하여

$$c(S) = \min\left\{\sum_{i\in S} f_i w_i | f : V \to [0,1] \text{ 그리고 } {}^{\forall} j \in S, \sum_{i\in N[j]\cap S} f_i \geq k\right\}.$$

즉, 참가자들의 연합인 S로부터 발생하는 비용 $c(S)$는 그래프 G의 부분 그래프인 $G[S]$의 최소 중량 지배값이 된다.

이러한 $\{k\}$-분수 지배게임은 이미 본 논문의 저자가 연구한 참고 논문 (Kim과 Fang, 2005)의 결과를 일반화하는 것이다.

또한 이 게임에서 코어는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Core}(\Gamma) = \left\{z \in R^n | x(V) = c(V) \text{ 그리고 } x(S) \leq c(S), {}^{\forall} S \subseteq V\right\}.$$

우리는 최소 중량 $\{k\}$-분수 지배함수 문제를 다음의 선형 프로그램 (a linear programming)으로 이용한다.

$$(LP): \min \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$
$$s.t \begin{cases} Ax \geq k \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq 0 \end{cases}$$
$$(DLP): \max k \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$s.t \begin{cases} yA \leq w \\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \geq 0 \end{cases}$$

단, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$.

게임에 있어서 코어의 특성을 찾는 것은 매우 중요하다. 왜냐하면, 코어 정의에서 보면 모든 부분집합에 대하여 생각해야하므로 참가자 수가 커지면 커질수록 그 수는 기하급수 적으로 커진다. 이러한 코어의 특성을 찾기 위하여 꼭짓점 집합인 V를 덮을 수 있는 서브스타 (substar)의 모임을 구성한다. 더불어 그래프 G에 대응하는 $\{k\}$-분수 지배게임의 코어는 DLP의 최적해의 집합과 같다는 것도 밝힌다.

정의 2.2 그래프 G의 꼭짓점 $v \in V$의 폐근방 (closed neighborhood)을 v-스타 (v-star)라고 한다. 만약 v의 폐근방 $N[v]$에 대하여 v를 포함하고 있는 폐근방의 부분집합 T ($T \subseteq N[v]$)를 v-부분스타 (v-substar)라고 한다. 그래프 G의 모든 v-부분스타들의 집합을 $\Im_v$으로 나타내며, 이 집합은 간단하게 다음과 같이 표현된다.

$$\Im_v = \{T \subseteq V | T\text{는 } v\text{- 부분스타}(v - \text{substar }) \text{ 이다.}\}$$

3. $\{k\}$-분수 지배게임의 균형성

이 장에서는 먼저 $\{k\}$-분수 지배게임의 코어에 대한 특성을 연구한다. 또한 이 게임에서의 코어는 항상 공집합이 아님을 보인다. 먼저 $\{k\}$-분수 지배함수 f로부터 생성되는 부분스타의 모임으로 꼭짓점 집합 V를 완벽히 덮을 수 있다는 사실도 보이게 된다. 사실, 다음의 도움정리의 증명으로부터 V를 덮을 수 있는 부분스타의 모임을 구성하는 방법을 알 수 있다.

보조정리 3.1 그래프 $G = (V, E)$의 $\{k\}$-분수 지배함수 $f : V \to [0, 1]$를 가져오자. 각각의 $v \in V$에 대하여 f로부터 생성되는 v-부분스타의 집합 $\Im_v^f$와 실변수 중량함수 $\psi_v : \Im_v^f \to R^+$가 존재하며 이들은 다음의 조건을 만족한다.

(1) $\sum_{T \in \Im_v^f} \psi_v(T) = f(v)$

(2) 모든 꼭짓점 $u \in V$에 대하여, $\Im^f = \left\{\Im_v^f | v \in V\right\}$ 중 꼭짓점 u를 포함하는 부분스타의 전체 중량값은 k와 같다. 즉 $\sum_{v \in V} \sum_{u \in T \in \Im_v^f} \psi_v(T) = k$이 성립한다.

증명: 함수 $f : V \to [0, 1]$가 그래프 G의 $\{k\}$-분수 지배함수이므로 각각의 꼭짓점 $u \in V$에 대해서 $\sum_{v \in N[u]} f(v) \geq k$이 성립한다. 그러면 아래의 공식 (3.1)과 (3.2)를 만족하는 값들의 모임 $\{\eta^v(u) : u \in V\}$은 명백히 존재한다. 각 꼭짓점 $v \in V$에 대하여 다음을 만족하는 음수가 아닌 값들의

집합 $\{\eta^v(u) : u \in V\}$을 가져올 수 있다 :

$$\begin{cases} \eta^v(v) = f(v) \\ 0 \leq \eta^v(u) \leq f(v), & \text{for } u \in N[v] \setminus \{v\} \\ \eta^v(u) = 0, & \text{for } u \notin N[v] \;. \end{cases} \tag{3.1}$$

그러면, 집합 $\cup_{v\in V}\{\eta^v(u) | u \in V\}$는 다음의 제약을 만족한다:

$$^{\forall}u \in V : \sum_{v\in(v|u\in N[v])} \eta^v(u) = k. \tag{3.2}$$

각각의 꼭짓점 $v \in V$에 대하여, 모든 꼭짓점 $u \in V$가 정확하게 지배되도록 조절하는 꼭짓점 v에 의해서 결정되는 값들의 집합 $\{\eta^v(u) : u \in V\}$이 있는데, 이 값들 중에서 양의 값들을 세어나간다. 그리고 이 값들을 $0 < \eta_1^v \leq \eta_2^v \leq \cdots \leq \eta_s^v = f(v)$ 방법으로 점차 증가하는 순서로 새로 재배열을 한다. 그러면 v-서브스타와 대응하는 중량함수 $\psi_v : \Im_v^f \to R^+$를 포함하는 다음과 같은 v-서브스타들의 집합 $\Im_v^f$를 구성할 수 있다.

$$\begin{cases} \Im_{v1} = \{u \in N[v] \,|\eta^u(v) \geq \eta_1^v\} & \psi_v(\Im_{v1}) = \eta_1^v, \\ \Im_{v2} = \{u \in N[v] \,|\eta^u(v) \geq \eta_2^v\} & \psi_v(\Im_{v2}) = \eta_2^v - \eta_1^v, \\ \vdots & \vdots \\ \Im_{vs} = \{u \in N[v] \,|\eta^u(v) \geq \eta_s^v\} & \psi_v(\Im_{vs}) = \eta_s^v - \eta_{s-1}^v \;. \end{cases}$$

집합 $\Im_v^f$에 속하는 v-서브스타들의 전체 중량은 정확하게 $f(v)$가 같다는 사실은 명백하다. 그리고 각각의 꼭짓점 $u \in V$에 대해서 $\Im_v^f$에서 꼭짓점 u를 포함하고 있는 v-서브스타들의 전체 중량은 $\eta^u(v)$이다. $\Im_v^f(v \in V)$의 모든 집합을 함께 모아두고 그 집합을 $\Im^f = \{\Im^f | v \in V\}$라고 표현하자. $\eta^u(v)(v \in V)$ 값은 공식 (3.2)를 만족하기 때문에 $\sum_{v\in V}\sum_{u\in T\in\Im_v^f}\psi_v(T) = k$의 결과를 얻을 수 있다. $\square$

이제 v-스타와 v-서브스타들에 대응되는 연합의 관점에서 $\{k\}$-분수 지배게임의 코어에 대한 특성을 조사해 보자.

정리 3.1 꼭짓점 중량함수로 $w : V \to R^+$를 지니고 있는 꼭짓점 수가 총 n개 $(|V| = n)$인 그래프 $G = (V, E; w)$를 가져오자. 그리고 $\Gamma = (V, c)$를 그래프에 대응되는 $\{k\}$-분수 지배게임이라고 하자. 그러면 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 코어의 원소가 될 필요충분조건은 다음과 같다

(a) $x(V) = c(V)$ 이고,

(b) 각각의 $j \in V$와 $T_j \in \Im_j$에 대하여, $x(T_j) \leq kw_j$을 만족한다.

증명: $x \in \mathrm{Core}(\Gamma)$라고 가정하자. 코어의 정의에 의해서 $x(V) = c(V)$이 성립한다. 각각의 꼭짓점 $j \in V$와 부분집합 j-서브스타인 $T_j \in \Im_j$에 대하여, $i \neq j$ 일 때 $f_j = k$와 $f_i = 0$를 만족하는 함수 $f : T_j \to [0, 1]$를 정의하자. 그러면 함수 f는 유도된 그래프 (the induced graph) $G[T_j]$의 $\{k\}$-분수 지배함수이며 따라서 $x(T_j) \leq c(T_j) \leq kw_j$을 만족한다.

이제 역으로 증명하자. 임의의 연합 $S \subseteq V$와 유도된 그래프 $G[S]$에서의 최소 중량 $\{k\}$-분수 지배함수 $f^* : S- > [0, k]$를 가져오면, $\sum_{j\in S} f_j^* w_j = c(S)$이 성립한다.

도움정리 3.1로부터 각 꼭짓점 $j \in S$에 대하여, j-서브스타들의 집합 $\Im_j^{f^*}$와 $\sum_{T \in \Im_j^{f^*}} \psi_j(T) = f_j^*$을 만족하는 중량함수 $\psi_j : \Im_j^{f^*} \to R^+$가 존재한다. 또한 $\Im^{f^*} = \left\{ \Im_j^{f^*} | j \in S \right\}$에서 꼭짓점 $i \in S$를 포함하는 j-서브스타들의 전체 중량은 정확히 k이다. 따라서 다음의 관계를 만족한다.

$$
\begin{aligned}
x(S) &\leq \frac{1}{k} \sum_{j \in S} \sum_{T \in \Im_j^{f^*}} \psi_j(T)\, x(T) \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{j \in S} \sum_{T \in \Im_j^{f^*}} \psi_j(T)\, k w_j \\
&= \sum_{j \in S} \sum_{T \in \Im_j^{f^*}} \psi_j(T)\, w_j \\
&= \sum_{j \in S} f_j^* w_j = c(S).
\end{aligned}
$$

즉, $x \in Core(\Gamma)$ 임을 알 수 있다. □

이미 언급하였듯이 다음의 정리로부터 이 게임의 코어는 DLP의 최적해 집합과 같다는 사실을 알 수 있다.

정리 3.2 꼭짓점 중량함수로 $w : V \to R^+$를 지니고 있는 꼭짓점 수가 총 n개 ($|V| = n$)인 그래프 $G = (V, E; w)$를 가져오자. 그리고 $\Gamma = (V, c)$를 그래프에 대응되는 $\{k\}$-분수 지배게임이라고 하자. 그렇다면, $\mathrm{Core}(\Gamma)$는 공집합이 아니며 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$는 $Core(\Gamma)$의 원소라는 사실과 x가 DLP의 최적해라는 것은 서로 필요충분조건을 만족한다. 따라서 게임 $\Gamma = (V, c)$는 균형성 (balanceness)을 가진다.

증명: $x \in \mathrm{Core}(\Gamma)$라고 가정하자. 정리 3.2와 선형 프로그래밍의 쌍대정리 (the duality theorem)에 의해 $x(V) = c(V) = \mathrm{opt}(LP) = \mathrm{opt}(DLP)$이 성립하고 각 꼭짓점 $j \in V$에 대하여 $x(N[j]) \leq kw_j$이 된다. 즉, x는 DLP의 제약을 만족시킨다. ($\mathrm{opt}(L)$이라는 표현은 프로그램 문제 L의 최적 목적값을 나타내고 있다.) 따라서 x는 DLP의 최적해이다.

역으로 DLP의 최적해인 x를 가져오자. 이것이 $x \in \mathrm{Core}(\Gamma)$임을 보이고자 한다. 정리 3.2에 의하여 각 꼭짓점 $j \in V$와 $T_j \in \Im_j$에 대하여 단지 $x(T_j) \leq kw_j$이 성립함을 보이기만 하면 된다.

먼저 x 는 DLP의 최적해 이므로 다음을 알 수 있다.

$$x(V) = \mathrm{opt}(DLP) = \mathrm{opt}(LP) = c(V),$$

여기서, 두번째 등호는 선형프로그램의 쌍대이론에 의하여 성립한다.
다음으로, x 는 DLP의 가능성 있는 해이므로 이는 다음을 만족한다.

$$x(N[j]) \leq kw_j, \text{ 이고 } x \geq 0.$$

따라서 각각의 j-서브스타 T_j에 대하여 $T_j \subseteq N[j]$가 성립하고

$$x(T_j) \leq x(N[j]) \leq kw_j$$

이다.

정리 3.2에 의해서 $x \in Core(\Gamma)$가 된다. □

4. 결론

이 논문에서는 분수 지배게임의 일반화 시킨 $\{k\}$-분수 지배게임에 대하여 살펴보았으며 게임의 코어의 필요충분조건을 살펴보았다. 선형프로그램과 그것의 상대성에 대한 기법을 이용하여 이러한 조건들을 찾아볼 수 있다. 그러나 $\{k\}$-분수 지배게임에 대한 오목성 (concavity)에 대해서는 조사하지 않았다. 일반적으로 꼭짓점들에 대한 비용함수를 가지는 분수 지배게임은 오목성을 만족하지 않는다. 이 경우 그래프 G가 2-블록 그래프 (a 2-block graph)이면 분수 지배게임은 오목성을 만족한다는 사실은 알려져 있다 (Kim과 Fang, 2005). 분수 지배게임의 확장형인 $\{k\}$-분수 지배게임에서도 Γ의 코어 원소를 찾는데에는 polynomial time이 따를 것이며 마찬가지로 오목성을 가질 것이라고 예상한다. 이런 문제들은 앞으로 연구해야 한다.

참고문헌

Ahn, Y. A. (2008). Continuous location tracking algorithm for moving position data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society* , **19**, 979-994.

Kim, H. K. and Fang, Q. (2005). A note on balancedness of dominating set games. *Journal of Combinatorial Optimization*, **10**, 303-310.

Kim, H. K. and Fang, Q. (2006). Balancedness and concavity of fractional domination games. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **43**, 265-275.

Kim, H. K. and Fang, Q. (2006). Balancedness of integer domination games. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **43**, 297-309.

Kim, H. K. and Lee, D. S. (2007). Characterization of the core of integer total domination games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society* , **18**, 1115-1121.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J. (1998). *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker Inc.

Velzen, B. van. (2004). Dominating set games. *Operations Research Letters*, **32**, 565-573.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(1), 49–55

한국데이터정보과학회지

Balancedness of generalized fractional domination games

Hye Kyung Kim[1] · Junpyo Park[2]

[1]Department of Mathematics, Catholic University of Daegu
[2]Department of Mathematics, Kyungpook National University

Received 8 December 2008, revised 24 December 2008, accepted 29 December 2008

Abstract

A cooperative game often arises from domination problem on graphs and the core in a cooperative game could be the optimal solution of a linear programming of a given game. In this paper, we define a $\{k\}$-fractional domination game which is a specific type of fractional domination games and find the core of a $\{k\}$-fractional domination game. Moreover, we may investigate the balancedness of a $\{k\}$-fractional domination game using a concept of a linear programming and duality. We also conjecture the concavity for $\{k\}$-fractional dominations game which is important problem to find the elements of the core.

Keywords: Balancedness, core, $\{k\}$-fractional dominating function, $\{k\}$-fractional domination game.

[1] Professor, Department of Mathematics, Catholic University of Daegu, 330 Geumrak 1-Ri, Hayang-eup, Gyeongsan-si, Gyeongbuk, 712-702, Korea.
[2] Corresponding author: Ph.D. program student, Department of Mathematics, Kyungpook National University, 1370 Sangyeok-dong, Buk-Gu, Daegu 702-201, Korea. E-mail: jppark@knu.ac.kr