Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(1), 39–48

한국데이터정보과학회지

매스매티카를 이용하여 3-모수를 갖는 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬의 유도†

양지은[1] · 백호유[2]

[12]원광대학교 수학정보통계학부

접수 2008년 12월 6일, 수정 2009년 1월 12일, 게재확정 2009년 1월 17일

요 약

피셔 정보행렬은 모수 추론에서 중요한 역할을 한다. 특히 비정보 사전분포를 이용한 사후분포로 유도하는 객관적 베이지안 추론에서 사용된다. 또한 기하학에서는 거리함수의 한 예로서 이용된다. 모수가 많아질수록 피셔 정보행렬의 계산이 복잡하여진다. 따라서 본 논문에서는 매스매티카를 이용하여 계산상 필요한 프로그램을 적용시켜 신뢰성 이론에서 사용되는 3-모수 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬을 유도하였다.

주요용어: 3-모수 와이블분포, 비정보 사전분포, 피셔 정보행렬.

1. 서론

신뢰성이론에서 중요한 3모수 와이블 (Weibull) 분포에 대한 모수 추론 방법의 하나로 이것에 대한 피셔 (Fisher) 정보행렬을 구하여 Jeffrey (1961) 사전분포로 구하거나 준거 사전분포등 비정보사전분포를 유도하여 사후분포에서 모수를 추론하는 문제를 생각한다. 이에 따라, 피셔 정보행렬을 구하는 것은 중요하다. 그러나 모수가 많아질수록 그것의 형태가 복잡해진다. 이런 복잡성을 덜기 위해 Wolfram (2003)의 매뉴얼에 의한 매스매티카 (Mathematica) 프로그램을 이용하여 3모수 와이블 분포에 대한 피셔 정보행렬의 유도 과정을 나타내 보이고자 한다. 이러한 3모수 와이블 분포는 정해성 (1998), 박동호 등 (1996) 및 Ross (2002)등에서 나타나있고, 이것의 확률밀도함수의 정의는 다음과 같다.

$$f(x|a,b,c) = \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right\} \tag{1.1}$$

단, $x > a$, $-\infty < a < \infty$, $c > 0$, $b > 0$. 여기서 a를 위치모수 (location parameter), b를 척도모수 (scale parameter), c를 형태모수 (shape parameter)라 한다. 이러한 와이블 분포는 원래 공학에서 재료의 피로 데이터로 설명하기 위해 제안되었고, 현재는 여러 공학 문제에서 두루 사용되고 있다. 특히 많은 부품들로 구성되어 있는 제품이 그 부품들 중 어느 하나가 고장날 때 제품이 고장나는 모형에 적절하게 적용된다 특별한 예로서 형태모수 $c = 1$지수분포의 확률밀도함수가 되고, $c = 2$일때 Rayleigh 분포의 확률밀도 함수가 된다. 모수가 여러 개인 피셔 정보행렬은 Lehman과 Casella (1999)와 Berger

† 이 논문은 2007년도 원광대학교의 교비 지원에 의해서 수행됨.
[1] (570-749) 전북 익산시 신용동 344-2, 원광대학교 대학원 정보통계학과, 석사과정.
[2] 교신저자: (570-749)전북 익산시 신용동 344-2, 원광대학교 수학정보통계학부, 교수.
E-mail: hybaek@wonkwang.ac.kr

(1985) 등에 나타나있고 다음과 같이 정의한다. $L(\theta|x)$를 우도 함수라 할 때 피셔 정보행렬은 다음과 같다.

$$(I_{jk}) = \left(-E\left[\frac{\partial^2 lnL(\theta \mid x)}{\partial\theta_j \partial\theta_k}\right]\right) \tag{1.2}$$

여기서 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_p)$, 이고 j , $k =$ 1, 2, $\cdots, p$ 이다. 즉 모수가 p개인 분포에 대한 2계도함수들의 음의 기댓값으로 이루어진 $p \times p$행렬을 나타낸다. 특히 $p = 1$일때는 피셔 정보통계량이라 하고 통계적 추론에서 많이 이용된다. 그리고 이러한 피셔 정보행렬의 기하학적인 적용은 이영조 (1988)와 Kass 등 (1984)에서 기하학적으로 통계적 곡률과 관련되어져 나타내었다. 본 연구에서는 매스매티카 명령어를 이용하여 3모수 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬의 유도 문제를 다루고자 한다. 2절에서는 그에 필요한 함수와 매스매티카 명령어로 설명하고 3모수 와이블분포에 대한 피셔 정보 행렬의 형태로 표현한다. 3절에서는 실제 피셔 정보행렬에 계산과정을 나타내고, 4절에서는 예제 및 결론을 제시하였다.

2. 관련 함수와 매스매티카 명령어 및 피셔 정보행렬 형태

2.1. 3 모수를 갖는 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬 유도에 필요한 함수

3모수 와이블 분포에 대한 피셔 정보행렬의 유도를 위하여 다음과 같은 함수들이 사용된다.

(1) Gamma 함수:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

(2) Gamma에 대한 1계 및 2계 도함수:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \ln u e^{-u} du$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty u^{x-1} (\ln u)^2 e^{-u} du$$

(3) PolyGamma 함수:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma\,'(x)}{\Gamma\,(x)}, \quad 즉, \quad \Gamma'(x) = \Gamma(x)\psi(x)$$

예로서, $\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^\infty e^{-u} \ln u du$ 여기서 γ는 *Euler* 상수 (0.577716 $\cdots$) 이다. $\Gamma'(2) = \psi'(2) = 1 - \gamma$ 이다. $\Gamma''(2) = -2\gamma + \gamma^2 + \dfrac{\pi^2}{6}$ 임을 보일 수 있고 근사적으로 0.823681$\cdots$ 가 된다.

2.2. 3모수 와이블분포에 대한 정보행렬에 필요한 매스매티카 명령어

3 모수 와이블 분포로 유도하기 위하여 다음의 매스매티카 명령어가 필요하다.

(1) D[f[x], x] : f (x)의 1계 도함수
(2) D[D[f[x], x], x] : f (x)의 2계 도함수
(3) D[f[x, y], x] : f (x, y)의 x에 대한 편도함수
(4) D[f[x, y], y] : f (x, y)의 y에 대한 편도함수
(5) D[D[f[x, y], x], y] : f (x, y)의 x와 y에 대한 2계 편도함수
(6) Integrate[f[x, y], x] : f (x, y)의 x에 대한 부정적분

(7) Integrate[f[x, y], x, a, b]: x의 구간[a,b]에서의 f (x, y)의 정적분
(8) NIntegrate[f[x, y], x, a, b]: x의 구간[a,b]에서의 f (x, y)의 수치정적분의 근사값

앞에서 정의된 함수와 매스매티카 명령어를 이용하여 1절의 식 (1.1)에 대한 우도함수를 구하고 이것에 대한 피셔 정보행렬을 식 (1.2)에 의해서 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$(I_{jk}) = -E\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial a \partial b} & \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial a \partial c} \\ & \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial b^2} & \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial b \partial c} \\ \text{대칭} & & \dfrac{\partial^2 lnL(\theta|x)}{\partial c^2} \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3. \qquad (2.1)$$

단, 여기서 $lnL(\theta|x)$는 다음 절에서 정의할 로그우도함수이고, $\theta = (a,\ b,\ c)$이다. 따라서 피셔 정보행렬을 구하기 위해서는 위의 행렬의 서로 다른 6개의 원소들을 구하여야 한다. 이를 위하여 로그우도함수에 대한 2계 편도함수들을 구하고 그것의 각각의 기댓값을 계산하여 정보행렬을 완성한다.

2.3. 3모수를 갖는 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬의 계산 과정 및 유도

x를 식 (1.1) 확률밀도 함수로 갖는 3모수 와이블분포로부터 하나의 관측치 (single observation)이라 한다. 그러면 식 (1.1)의 로그우도함수는 $\ln L(\theta|x) = \ln(a, b, c|x)$로 나타내고 간단히 $\ln L(a, b, c)$ 또는 $\ln L$로 쓴다. 식 (1.1)에 의하여

$$\ln L(a, b, c) = \ lnc\ -\ \ln b\ + (c-1)\ln\left(\frac{x-a}{b}\right) - \left(\frac{x-a}{b}\right)^c$$

가 된다. 이것을 매스매티카 명령어로 로그우도함수를 정의하면 아래와 같다.

lnL[x_,a_,b_,c_]:= Log[c] - Log[b] + (c-1)Log[(x-a)/b] - ((x-a)/b)^clnL[x,a,b,c]

$$-\left(\frac{-a+x}{b}\right)^c - Log[b] + Log[c]\ +\ (-1+c)Log\left[\frac{-a+x}{b}\right]$$

또한, 로그우도함수의 a에 대한 2계도함수는

$$\frac{\partial^2\, lnL}{\partial a^2}\ =\ \frac{1-c}{(x-a)^2} + \frac{c\,(1-c)}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-2}$$

가 된다. 이것을 매스매티카 프로그램으로 확인하면 아래와 같다.

D[D[lnL[x,a,b,c], a], a]

$$-\frac{-1+c}{(-a+x)^2} - \frac{(-1+c)\ c\left(\dfrac{-a+x}{b}\right)^{-2+c}}{b^2}$$

따라서 2절에 (2.1)식에서 피셔 정보행렬의 1행1열 원소를 구하면

$$-E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial a^2}\right] = E\left[\frac{c-1}{(X-a)^2} + \frac{c\,(1-c)}{b}\left(\frac{X-a}{b}\right)^{c-2}\right]$$
$$= \frac{c-1}{b^2}E\left[\left(\frac{b}{X-a}\right)^2\right] + \frac{c(c-1)}{b^2}E\left[\left(\frac{X-a}{b}\right)^{c-2}\right]$$

이다. 여기서 $z = x - a/b$라 하면,

$$E\left[\left(\frac{b}{X-a}\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{Z^2}\right] = \int_0^\infty ce^{-z^c}z^{c-2}dz = \int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{2}{c}}du = \Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right)$$

가 된다. 단 $c > 2$.

같은방법으로,

$$E\left[\left(\frac{X-a}{b}\right)^{c-2}\right] = E\left[Z^{c-2}\right] = \Gamma\left(2-\frac{2}{c}\right) = \left(1-\frac{2}{c}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right), \text{단}, c > 2.$$

따라서 1행1열원소는

$$-E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial a^2}\right] = \frac{(c-1)^2}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right),$$

단 $c > 2$가 된다. 같은방법으로, 1행2열의 원소계산을 하면

$$\frac{\partial^2\, lnL}{\partial a \partial b} = -\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}.$$

이것에 대한 매스매티카 프로그램과 결과는 다음과 같다.

D[D[lnL[x,a,b,c], a], b]

$$-\frac{(-1+c)\,c\,(-a+x)\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-2+c}}{b^3} - \frac{c\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}}{b^2}$$

따라서 1행2열의 원소는 앞에 1행1열 원소계산과 비슷한 과정을 거쳐서

$$-E\left[\frac{\partial^2\, lnL}{\partial a \partial b}\right] = \frac{c^2}{b^2}\Gamma\left(2-\frac{1}{c}\right) = \frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right) = \frac{c(c-1)}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

단, $c > 1$ 이다. 1행3열의 원소의 계산은

$$\frac{\partial^2\, lnL}{\partial a \partial c} = -\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} + \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}\ln\frac{x-a}{b}$$

로 나타낼 수 있다. 매스매티카 프로그램으로 다음과 같이 확인 할 수 있다.

D[D[lnL[x,a,b,c], a], c]

$$-\frac{1}{-a+x}+\frac{\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}}{b}+\frac{c\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}Log\left(\frac{-a+x}{b}\right]}{b}$$

이에 따라 1행3열의 결과를 계산하면

$$-E\left[\frac{\partial^2 \, lnL}{\partial a\partial c}\right]=-\frac{1}{b}E\left[\frac{1}{Z}\right]+\frac{1}{b}E\left[Z^{c-1}\right]+\frac{c}{b}E\left[Z^{c-1}\,lnZ\right]$$

가 된다. 단, $z=x-a/b$이다. 여기서

$$E\left[\frac{1}{Z}\right]=\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

이다. 따라서,

$$E\left[Z^{c-1}\,lnZ\right]=\int_0^\infty ce^{-z}z^{c-1}z^{c-1}\,lnz\,dz=\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-u}u^{1-\frac{1}{c}}\,lnudu=\frac{1}{c}\Gamma'\left(2-\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{c}\left\{\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{c}\right)\Gamma\,'\left(1-\frac{1}{c}\right)\right\}=\frac{1}{c}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\left\{1+\frac{c-1}{c}\psi\left(1-\frac{1}{c}\right)\right\},$$

단, $c>1$이다. 여기서 $\psi(\cdot)$는 앞절에서 정의된 PolyGamma함수 $(\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z))$이다. 따라서 1행3열 원소는

$$-E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial a\partial c}\right]=\frac{1-c}{bc}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\left\{1+\psi\left(1-\frac{1}{c}\right)\right\}$$

이 된다. 단, $c>\frac{1}{2}$. 또한, 2행2열의 원소를 계산하기 위해

$$\frac{\partial^2 \, lnL}{\partial b^2}=\frac{c}{b^2}-\frac{c+c^2}{b^2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^c$$

이 됨을 알 수 있고 매스매티카 프로그램결과는 아래와 같다.

D[D[lnL[x,a,b,c], b], b]

$$\frac{1}{b^2}+\frac{-1+c}{b^2}-\frac{(-1+c)\,c\,(-a+x)^2\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-2+c}}{b^4}-\frac{2c\,(-a+x)\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}}{b^3}$$

따라서

$$-E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial b^2}\right]=\frac{c(1+c)}{b^2}E\left[Z^c\right]-\frac{c}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}$$

가 됨을 알 수 있다. 여기서,

$$E[Z^c]=c\int_0^\infty e^{-z^c}z^{c-1}z^c dz=\int_0^\infty e^{-u}udu=\Gamma(2)=1$$

이 된다. 2행3열의 원소를 계산하기 위해

$$\frac{\partial^2\, lnL}{\partial b\partial c}=\frac{1}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+\frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\ln\left(\frac{x-a}{b}\right)-\frac{1}{b}$$

이 됨을 알 수 있고 매스매티카 프로그램 결과는 아래와 같다.

D[D[lnL[x,a,b,c], b], c]

$$-\frac{1}{b}+\frac{(-a+x)\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}}{b^2}+\frac{c(-a+x)\left(\frac{-a+x}{b}\right)^{-1+c}Log\left[\frac{-a+x}{b}\right]}{b^2}$$

따라서

$$\begin{aligned}&-E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial b\partial c}\right]=\frac{1}{b}-\frac{1}{b}E\left[Z^c\right]-\frac{c}{b}E\left[Z^c\, lnZ\right]=\frac{1}{b}-\frac{1}{b}E\left[Z^c\right]-\frac{c}{b}E\left[Z^c\, lnZ\right]\\&=\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\Gamma(2)-\frac{c}{b}\frac{1}{c}\Gamma'(2)=-\frac{1}{b}\Gamma'(2)=-\frac{1}{b}\Gamma(2)\psi(2)=-\frac{1}{b}\psi(2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

여기서 γ를 $Euler$상수라하면

$$\begin{aligned}&E\left[Z^c\, lnZ\right]=c\int_0^\infty e^{-z^c}z^{c-1}\, lnzdz=\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-u}u\, lnudu=\frac{1}{c}\Gamma'(2)\\&=\frac{1}{c}\Gamma(2)\psi(2)=\frac{1}{c}\psi(2)=\frac{1}{c}(1-\gamma)\end{aligned}$$

가 된다. $\psi(2)(=\Gamma'(2))$을 구하기 위한 매스매티카 프로그램 결과는 다음과 같다.

Integrate[E^ (-u) u Log[u], $\{u, 0, \infty\}$]
1-EulerGamma
NIntegrate[E^ (-u) u Log[u], $\{u, 0, \infty\}$]
0.422784

따라서, $\psi(2)$의 근사값은 0.422784가 된다. 마지막으로 3행3열의 원소는

$$\frac{\partial^2\, lnL}{\partial c^2}=-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\ln\left(\frac{x-a}{b}\right)^2-\frac{1}{c^2}$$

이 되고

$$-E\left[\frac{\partial^2\, lnL}{\partial c^2}\right] = E\left[Z^c(lnZ)^c\right] + \frac{1}{c^2} = c\int_0^\infty e^{-u}u\left(\frac{1}{c}lnu\right)^2 du\ +\ \frac{1}{c^2}$$
$$= \frac{1}{c^2}\Gamma\prime\prime(2) + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left(\Gamma''(2)+1\right) \tag{2.3}$$

여기서 $\Gamma''(2) = \Gamma(2)\left[\psi'(2) + \{\psi(2)\}^2\right] = \psi'(2) + \{\psi(2)\}^2$ 된다. 이것을 구하기 위한 매스매티카 프로그램 결과는 아래와 같다.

Integrate[E^ (-u) u (Log[u])^2, $\{u, 0, \infty\}$]

$$-2\,EulerGamma\ +\ EulerGamma^2\ +\ \frac{\pi^2}{6}$$

그것에 대한 근사값의 매스매티카프로그램 결과는 아래와 같다.

NIntegrate[E^ (-u) u (Log[u])^2, $\{u, 0, \infty\}$]

0.823681

앞에 결과를 정리하여 2절의 식 (2-1)에서의 3모수 와이블분포에 대한 피셔 정보행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 첨자 $j, k = 1,\ 2,\ 3$에 대하여,

$$(I_{jk}) = \left(-E\left[\frac{\partial^2 lnL(\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_k}\right]\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(c-1)^2}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right), & \frac{c(c-1)}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right), & \frac{1}{bc}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right) - \frac{1}{b}\Gamma'\left(2-\frac{1}{c}\right) \\ & \frac{c^2}{b^2}, & -\frac{1}{b}\Gamma'(2) \\ & & \frac{1}{c^2}\left(\Gamma\prime\prime(2)+1\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(c-1)^2}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{2}{c}\right), & \frac{c(c-1)}{b^2}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right), & \frac{1-c}{bc}\Gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\left\{1+\psi\left(1-\frac{1}{c}\right)\right\} \\ & \frac{c^2}{b^2}, & -\frac{1}{b}(1-\gamma) \\ & & \frac{1}{c^2}\left(-2\gamma+\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{(c-1)^2}{b^2}\Gamma\left(1-\dfrac{2}{c}\right), & \dfrac{c(c-1)}{b^2}\Gamma\left(1-\dfrac{1}{c}\right), & \dfrac{1-c}{bc}\Gamma\left(1-\dfrac{1}{c}\right)\left\{1+\psi\left(1-\dfrac{1}{c}\right)\right\} \\ & \dfrac{c^2}{b^2}, & -\dfrac{0.422784\cdots}{b} \\ & & \dfrac{1.823681\cdots}{c^2} \end{array} \right]$$

단, $\gamma = 0.577716\cdots$.

3. 예제 및 결론

예 1. (1.1)식에서 위치모수 $a = 0$일 때, 확률밀도함수는

$$f(x|\, b, c) \;=\; \frac{c}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\}$$

이 되고, 이것에 대한 피셔 정보행렬은 3절에서와 같은방법으로 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (I_{jk}) &= \left(-E\left[\frac{\partial^2 lnL(\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_k}\right]\right) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{c^2}{b^2} & -\dfrac{1}{b}\Gamma'(2) \\ -\dfrac{1}{b}\Gamma'(2) & \dfrac{1}{c^2}(\Gamma''(2)+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c^2}{b^2} & -\dfrac{1}{b}(1-\gamma) \\ -\dfrac{1}{b}(1-\gamma) & \dfrac{1}{c^2}\left(-2\gamma+\gamma^2+\dfrac{\pi^2}{6}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

즉 앞에 행렬의 1행1렬을 제외한 부분행렬임을 알 수 있다.

예 2. (1-1)식에서 위치모수 $a = 0$ 이고 c 가 각각 1과 2인 확률밀도함수는 각각 $f(x|b) = (1/b)exp(-x/b)$ 인 지수분포의 확률밀도함수, $f(x|b) = (x/b^2)exp(-x/b)$ 인 Rayleigh 분포의 확률밀도 함수가 된다. 이것들에 대한 피셔 정보통계량을 구하면, $1/b^2$ 과 $4/b^2$ 이 됨을 알수 있다. 이것은 3절의 피셔 정보행렬에서 2행2열의 원소 c^2/b^2 에 각각에 $c = 1, 2$ 를 대입한 결과와 같게 나타난다.

3절에서 유도된 행렬은 위의 예제에서 처럼 위치모수가 0 일 때, 지수분포 또는 Rayleigh분포 등 특수한 형태의 와이블분포에 대하여도 적용 됨을 알 수 있다. 그리고 3모수 와이블분포의 일반화된 분포인 4모수 일반화된 Gamma분포에 대한 피셔 정보행렬을 Mathmatica 프로그램을 이용하여 구할 수 있다. 또한, 복잡한 형태의 모수가 여러개인 분포에 대한 피셔정보행렬도 3절에서의 방법으로 쉽게 유도가 가능하다. 그리고 $c > 2$ 일 경우만 위 정보행렬이 적용가능하다. 다시 말해서 형태 모수 c 가 3모수를 동시에 나타낼때는 제한적이라 할 수 있다. 그밖에 다른 분포에서도 피셔 정보 행렬의 계산문제들을 매스매티카 프로그램을 이용하여 쉽게 해결할 수 있다. 이러한 피셔 정보행렬들의 기하학적인 적용은 이영조 (1988), Kass (1984) 등에서 기하학적으로 통계적 곡률과 관련되어져 나타나 있다. 또한 문경애 등 (2000)과 Lee (2005) 등에서 이 방법을 이용하여 비정보사전분포 (Jeffery 사전분포, 준거사전분포 등)을 유도하여 이들의 사후분포에 대한 각 모수들을 추론하는 객관적 (objective) 베이지안 연구에 적용시킬 수 있다.

참고문헌

문경애, 신임희, 김달호 (2000). 로그정규분포의 상등에 관한 베이지안 검정. <한국데이터정보과학회지>, **11**, 269-277.

박동호, 임재학, 남경현 (1996). <공학도를 위한 수명분포의 개념과 응용>, 영지문화사, 서울.

이영조 (1988). 통계적 곡률, <R. A. Fisher 연구>, 자유아카데미, 125-170.

정해성 (1998). <신뢰성자료분석>, 영지문화사, 서울.

Jeffreys, H. (1961). *Theory of probability*, 3rd Ed., Oxford: Oxford University Press.

Kass, R. E. (1984). Canonical parametrizations and zero parameter-effects curvature. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **46**, 86-92.

Lee, Y. J. (2005). Reference prior and posterior in the AR (1) model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **16**, 71-78.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1999). *Theory of point estimation*, 2nd Ed., Springer.

Ross, S. (2002). *A first course in probability*, 6th Ed., Prentice Hall.

Wolfram. S. (2003). *The Mathematica book*, 5th Ed., Wolfram Media, Cambridge University Press.

Journal of the Korean Data &
Information Science Society
2009, **20**(1), 39–48

한국데이터정보과학회지

Derivation of the Fisher information matrix for 3-parameters Weibull distribution using mathematica[†]

Ji Eun Yang[1] · Hoh Yoo Baek[2]

[1]Department of Informational Statistics, Graduate School, Wonkwang University
[2]Division of Mathematics and Informational Statistics, Wonkwang University

Received 6 December 2008, revised 12 January 2009, accepted 17 January 2009

Abstract

Fisher information matrix plays an important role in statistical inference of unknown parameters. Especially, it is used in objective Bayesian inference which derives to the posterior distribution using a noninformative prior distribution and is an example of metric functions in geometry. The more parameters for estimating in a distribution are, the more complicate derivation of the Fisher information matrix for the distribution is. In this paper, we derive to the Fisher information matrix for 3-parameters Weibull distribution which is used in reliability theory using Mathematica programs.

Keywords: 3-parameters Weibull distribution, Fisher information matrix, Mathematica programs.

† This paper was supported by Wonkwang University in 2007.
1 Graduate student, Department of Informational Statistics, Graduate School, Wonkwang University, Iksan, Jeonbuk 570-749, Korea.
2 Corresponding author: Professor, Division of Mathematics and Informational Statistics, Wonkwang University, Iksan, Jeonbuk 570-749, Korea. E-mail: hybaek@wonkwang.ac.kr