

비선형 천수와 쇄파를 고려한 수정완경사방정식의 타원형 수치모형 Elliptic Numerical Wave Model Solving Modified Mild Slope Equation with Nonlinear Shoaling and Wave Breaking

윤종태*
Jong Tae Yoon*

요지 : 쇄파대 파랑모의의 정확도를 높이기위해 타원형 완경사방정식에 Shuto의 경험식에 근거한 비선형 천수 효과를 도입하였고 쇄파구조를 추가하였다. 천수 실험을 통해 상대수심과 심해 파형경사에 따른 천수계수의 변화를 확인한 결과 Shuto의 비선형 천수식과 잘 일치하였다. 쇄파실험에서 비선형 천수효과로 인해 선형모형에 비해 상승된 파고 분포를 확인할 수 있었고 실험치와 잘 일치하였다. 쇄파구조는 1/10 경사지형에서는 실험치와 잘 일치하였지만 1/20 경사지형에서는 과도한 에너지 감쇄를 보여주었다.

핵심용어 : 비선형 천수효과, 쇄파대, 타원형 완경사방정식, 선형모형

Abstract : To improve the accuracy of numerical simulation of wave transformation across the surf zone, nonlinear shoaling effect based on Shuto's empirical formula and breaking mechanism are induced in the elliptic modified mild slope equation. The variations of shoaling coefficient with relative depth and deep water wave steepness are successfully reproduced and show good agreements with Shuto's formula. Breaking experiments show larger wave height distributions than linear model due to nonlinear shoaling but breaking mechanism shows a little bit larger damping in 1/20 beach slope experiment.

Keywords : nonlinear shoaling effect, surf zone, elliptic mild slope equation, linear model

1. 서 론

해안구조물의 올바른 설계, 시공 그리고 유지관리를 위해서는 불규칙한 지형으로 인한 해안에서의 파랑변형을 정확히 예측할 수 있어야 한다. Berkhoff(1972)의 완경사방정식은 선형분산계에서 이러한 파랑변형을 수심에 대한 제약이 없이 잘 모의할 수 있어 연안역에서의 파랑변형 해석에 광범위하게 적용되어 왔다. Berkhoff는 식의 유도 과정에서 완경사 가정, 즉 $(\nabla h/kh \ll 1$ (∇ =수평미분연산자, k =파수, h =수심)을 도입하였고 따라서 $(\nabla h)^2$ 과 $\nabla^2 h$ 에 비례하는 이차 저면효과는 무시되었다. Booij(1983)는 단일경사 지형에서의 파향 전파에 따른 반사계수를 계산하여 완경사방정식의 한계를 검토하였는데, 약 1:3의 저면경사에서 충분히 정확한 것으로 판단하였다.

이후 유도과정에서 무시되었던 이차 저면효과를 고려함으로써 급한 경사나 물결 형상의 지형과 같은 급변 지형에서도 정확도를 유지할 수 있는 수정완경사방정식에 대한 연구가 시작되었고 Massel(1993)과 Chamberlain and Porter (1995)는 Galerkin eigenfunction 기법을 사용하여 타원형의 수정완경사방정식을 발표하였다. 그리고 Suh et al.(1997)은 Green의 둘째 등식과 Lagrange 공식을 사용하여 불규칙파에 대한 두 개의 쌍곡형 식을 제안하였다. 이상의 식들은 서로 다른 과정을 거쳐 유도되었지만 결국은 동일한 형태의 식, 즉 수정완경사방정식으로 표현된다.

타원형 편미분방정식으로 표현되는 완경사방정식을 해석하기 위해, 유한요소법 또는 유한차분법을 사용하는 여러 가지 수치모형이 개발되었다. 유한요소법을 사용할 경우 요소의 크기 및 배열이 비교적 자유로워 국부적으로 보다 정

*경성대학교 토목공학과(Corresponding Author: Department of Civil Engineering, Kyungsoo University, Busan 608-736, Korea, gtyun@ks.ac.kr)

교한 해를 얻을 수 있는데 비해 유한차분기법의 경우 그 적용이 단순하여 운용의 편리함이 장점이다(Houston, 1981). 하지만 이들 모형을 사용하여 어느 정도 합리적인 결과를 얻기 위해서는 한 파장당 최소 10개 정도의 격자 분할이 필요하므로, 해석 대상 해역이 광역이면 기억용량과 연산시간이 과도하게 커지는 단점이 있다.

Radder(1979)는 포물형 근사를 도입함으로써 이러한 문제를 해결하였고, 포물형 모형은 현재도 광역 파랑모형으로 널리 쓰이고 있다. 하지만 파랑 진행 방향으로의 반사와 회절을 고려할 수 없고 파랑의 주 진행 방향이 고정되어야 하는 단점이 있어 항내에서의 파랑 등을 제대로 모의할 수 없는 제한이 있다.

또 다른 시도는 환경사방정식을 시간의존 형태의 쌍곡형 방정식으로 변환하여 해석하는 것으로서(Copeland, 1985) 지배방정식은 한 쌍의 일계 편미방정식으로 표현된다. Dong and Al-Mashouk(1989)은 타원형 모형과 쌍곡형 모형의 비교연구를 행하였는데 두 모형의 효율성은 거의 비슷한 것으로 나타났다. 두 모형의 파장당 최소 격자 분할은 비슷하게 요구되었고, 쌍곡형 모형의 경우 정상상태에 도달하기 위한 시간이 과도하게 커지는 경우가 가끔 발생하였다.

Panchang et al.(1991)과 Zhao and Anastasiou(1996)는 원래의 타원형방정식을 사용함으로써 식에 내재된 물리적 성질을 그대로 보존하면서 광역에도 적용 가능한 수치모형들을 발표하였다. 이들 모형의 특성은 환경사방정식을 차별화하여 생성되는 연립방정식을 푸는 과정에서 수학자들에 의해 최근 개발된 강력한 반복기법들을 적용함으로써 기억용량의 제약을 피하고 아울러 연산의 효율성을 제고한 것이다. Oliveira and Anastasiou(1998)는 BiCGSTAB와 GMRES 기법을 활용하여 환경사방정식을 해석하였고 윤중태(2004)는 GCGM을 이용하여 타원형 수정환경사방정식의 해를 구하였다.

환경사방정식은 최근까지도 다양한 연구에 수단 및 목적으로 이용되고 실제 설계 업무에도 널리 사용되고 있다. 하지만 비선형성이 강해지는 쇄파대 근처에서는 선형모형의 한계로 인해 정확도가 떨어지는 경우가 생기는데 보다 정확한 결과를 원할 경우엔 Boussinesq 모형과 같은 비선형 모형을 따로 사용하기도 한다. 본 연구에서는 쇄파대 근처에서 파랑 모의의 정확도를 높이기 위해 Shuto(1974)의 비선형 천수방정식을 이용하여 기존의 선형 천수구조를 대신하였다. 또한 쇄파구조를 추가하였는데 Dally et al.(1985)의 식을 사용하였고 수치실험결과 선형 모형에 비해 계측

치와 보다 일치하는 양호한 결과를 확인하였다.

2. 지배방정식

Massel(1993)의 수정환경사방정식에 에너지 감쇄항을 추가한 식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \sigma^2 \left\{ \frac{C_g}{C} - R_1 (\nabla h)^2 - R_2 \nabla^2 h \right\} \Phi + i\sigma W \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서 Φ 는 정상상태의 평균해수면상의 속도포텐셜, σ 는 각주파수, C 는 파속, C_g 는 군속도 그리고 W 는 감쇄함수이다. 2차 저면효과를 결정하는 계수 R_1 과 R_2 는 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (W_1 I_1 + W_2 I_2 + W_3 I_3 + W_4 I_4 + W_5 I_5 + W_6) \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3) \quad (3)$$

W_i , U_i 그리고 I_i 에 대한 정확한 표현은 Massel의 논문에서 나타난 W_1 과 W_2 에 대한 오류를 수정한 Suh et al.(1997)의 논문에서 정리되어 있다. 파수 k 는 분산관계식에서 결정된다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

감쇄항을 제외한 식 (1)은 Chamberlain and Porter(1995)의 식과 동일하고 2차 저면효과를 무시하면 Berkhoff(1972)의 환경사방정식이 된다.

식 (1)을 Helmholtz 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\phi = (CC_g)^{1/2} \Phi \quad (6)$$

$$K^2 = k^2 \left\{ 1 - \frac{C}{C_g} (R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h) \right\} - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} + \frac{i\sigma W}{CC_g} \quad (7)$$

3. 비선형 천수 및 쇄파구조

쇄파대에서의 파랑변형을 위한 정상상태의 에너지방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} (EC_g) = -WE \quad (8)$$

여기서 E 는 단위 면적당의 파랑에너지이고 W 는 에너지 감쇄 함수로서 변화를 유발하는 현상의 물리적 구조에 따라 결정된다.

쇄파구조는 Dally et al.(1985)의 식을 사용하였고 이 경우 감쇄함수 $W=W_b$ 는 다음과 같다.

$$W_b = C_g f_b \quad (9)$$

$$f_b = \frac{\chi}{h} \left(1 - \frac{\Gamma^2 h^2}{H^2} \right) \quad (10)$$

여기서 H 는 파고이고 χ, Γ 는 실험에서 결정되는 파라메타로서 본 연구에서는 $\Gamma=0.14, \chi=0.11$ 을 사용하였다.

파랑은 수심이 감소함에 따라 천수현상에 의해 파고가 증가하게 되고 최종적으로 쇄파가 일어나게 된다. 하지만 선형 천수에 따른 파고변화는 쇄파점에서의 파고를 통상 과소평가 하게 되어 쇄파대 파랑모의의 정확도를 떨어뜨리게 된다. 유한진폭파 이론들의 경우 이러한 비선형 천수계수를 계산할 수 있지만 그 모의구조를 완경사방정식에 직접적으로 연계하는 것은 아직 용이하지 않다. 그 대안으로 Tsai et al.(2001)은 Shuto(1974)의 경험적 비선형 천수방정식을 쌍곡형 모형에 적용하여 이러한 문제를 해결하였다. 본 연구에서도 Shuto의 식에 근거한 비선형 천수계수를 유도하여 타원형 모형에 적용하고자 한다.

Shuto(1974)의 비선형 천수방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} &= \sqrt{\frac{1}{2n \tanh kh}} \quad , U_r \leq 30 \\ Hh^{2.7} &= \text{const.} \quad , 30 \leq U_r \leq 50 \\ Hh^{5/2}(\sqrt{U_r} - 2\sqrt{3}) &= \text{const.} \quad , 50 \leq U_r \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $U_r = gHT^2/h^2$ 이며 T 는 주기, H 는 수심 h 에서의 파고, H_0 는 심해 파고이며 은 다음과 같다.

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (12)$$

비선형 천수효과는 감쇄함수를 통해 에너지식과 연계되고 이 경우 감쇄함수 $W=W_s$ 와 에너지 식은 다음과 같다.

$$W_s = n f_s \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx}(EC_g) = -n f_s E \quad (14)$$

식 (14)에 $d/dx = (dh/dx)d/dh = -\tan\beta d/dh$ 와 $C_g = nC$ 를 적

용하면 f_s 는 다음과 같다.

$$f_s = \left(\frac{dC}{dh} + \frac{Cdn}{ndh} + \frac{CdE}{Edh} \right) \tan\beta \quad (15)$$

분산관계식과 $E=\rho g H^2/8$ 을 이용하면 식 (15)의 우변 두 항은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{dC}{dh} = \frac{2n-1}{2n} \frac{C}{h} \quad (16)$$

$$\frac{Cdn}{ndh} = \frac{4[k_0 - h(k^2 + k_0^2)]}{4n^2 \sinh^2 kh} \quad (17)$$

여기서 k_0 는 심해에서의 파수이다. 식 (15) 우변의 세 번째 항은 dE/dh 에 Shuto의 식을 적용함으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{CdE}{Edh} &= -\frac{dC}{dh} - \frac{Cdn}{ndh} \quad , U_r \leq 30 \\ \frac{CdE}{Edh} &= -\frac{4C}{7h} \quad , 30 \leq U_r \leq 50 \\ \frac{CdE}{Edh} &= \frac{2C1.5\sqrt{U_r} - 5\sqrt{3}}{h 1.5\sqrt{U_r} - 2\sqrt{3}} \quad , 50 \leq U_r \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16), (17), (18)로부터 f_s 는 다음과 같이 표현된다.

$$f_s = \alpha_s \tan\beta \frac{C}{h} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_s &= 0 \quad , U_r \leq 30 \\ \alpha_s &= \frac{4}{7} + m_1 + m_2 \quad , 30 \leq U_r \leq 50 \\ \alpha_s &= \frac{3\sqrt{U_r} - 10\sqrt{3}}{1.5\sqrt{U_r} - 2\sqrt{3}} + m_1 + m_2 \quad , 50 \leq U_r \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$m_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad m_2 = \frac{k_0 h - h^2(k^2 + k_0^2)}{4n^2 \sinh^2 kh} \quad (21)$$

4. 수치기법

식 (5)를 유한차분하면 다음과 같은 연립방정식이 얻어진다.

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \quad (22)$$

여기서 $[A]$ 는 계수행렬, $\{\phi\}$ 는 미지벡터 그리고 $\{f\}$ 는 경

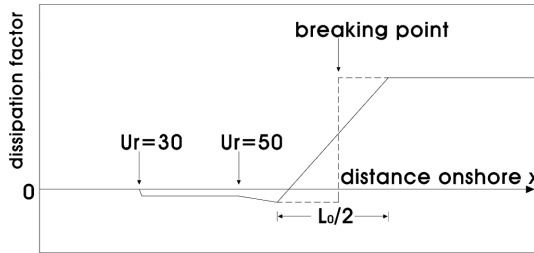


Fig. 1. Schematic distribution of energy dissipation by nonlinear shoaling and wave breaking.

계조건의 차별화로부터 생기는 계수벡터이다. 연립방정식의 해법으로는 연산의 효율성과 안정성이 가장 뛰어난(윤박, 2006) GCGM을 사용하였고 연산 알고리즘은 다음과 같다.

1. Compute $r_0 = f - A\phi_0$, $p_0 = r_0$
2. For $j = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do
3. $\alpha_j = (r_j, Ar_j)(A_{pj}, A_{pj})$
4. $\phi_{j+1} = \phi_j + \alpha_j p_j$
5. $r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j$
6. $\beta_j = (r_{j+1}, Ar_{j+1})(r_j, Ar_j)$
7. $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$
8. Compute $A p_{j+1} = Ar_{j+1} + \beta_j A p_j$
9. End do

하단경계(downwave boundary)에서는 파의 부절절한 반사를 억제하기 위해 스폰지 경계층(윤박, 2006)을 적용하였다. 천수와 쇄파로 인한 감쇄계수는 쇄파의 시작점에서 계수값의 급격한 변화가 일어나고 이로 인해 부적절한 수치 진동이 발생하므로 쇄파의 시작점을 주위로 선형적 변화를 부여하여 수치적 안정성을 도모하였다(Fig. 1).

감쇄계수가 상수가 아닌 파고의 함수이므로 반복계산을 수행하였다. 즉 감쇄계수가 없는 선형해를 먼저 구한 다음 계산된 파고를 이용해 감쇄계수를 결정하고 새로운 감쇄계수에 따른 해를 다시 구하는 과정을 수렴할 때까지 반복한다. 연산시간 및 반복횟수는 지형 및 격자수에 따라 달라지겠지만 본 연구에서는 비선형 반복 횟수가 비선형 반복 당 연립방정식의 해를 구하기 위한 반복 횟수보다 한 오더(order)정도 작게 나타났다.

5. 수치실험 및 결과

5.1 천수실험

파랑이 외해에서 육지로 전파해오며 수심이 얕아지면 파

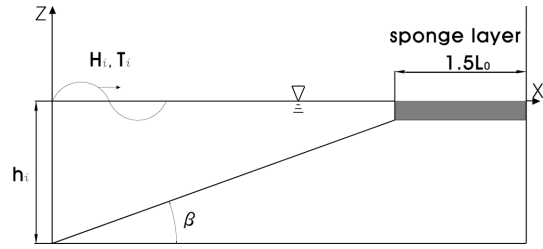


Fig. 2. The computational domain.

고가 커지면서 파랑의 비선형성이 중요하게 된다. 파고의 증가로 나타나는 이러한 천수효과는 상대수심과 파형경사의 함수로서 비선형 파랑변형의 하나이다.

모형의 검증을 위해 Fig. 2와 같은 일정 경사 지형에서 경사 1/30에 대해 심해 파형경사에 따른 파랑변형을 모의하였다. 결과는 Shuto의 실험식과 선형모형의 결과와 함께 Fig. 3에 도시하였다. 본 모형의 결과는 Shuto 식을 잘 재현하고 있음을 확인할 수 있고 천수계수 H/H_0 가 상대수심 h/L_0 만이 아니라 심해파형경사 H_0/L_0 의 함수임을 잘 보여주고 있다. 이에 비해 선형모형은 상대수심에 따른 변화만 보여주고 있고 그 변화도 수심이 작아질수록 비선형 모형의 결과와 큰 차이를 보인다.

5.2 쇄파실험

경사 1/10, 1/20의 일정경사 지형에 대해 쇄파대의 파랑 변형을 모의하였다. 1/10 경사의 경우 Tsai et al.(1995)의 실험치와 비교하였고, 1/20 경사의 경우 Nagayama (1983)의 실험치와 비교하였다. 실험조건은 Table 1과 같다.

또한 모든 경우에 대해 완경사방정식을 사용한 Watanabe and Dibajnia(1988)의 선형모형의 결과도 함께 도시하였다(Fig. 4, 5). 결과를 보면 본 모형의 경우 쇄파 직전까지의 파고 값은 선형모형에 비해 실험치와 보다 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 이는 새롭게 도입한 비선형 천수효과로 인해 에너지의 변화율이 쇄파직전까지 계속 증가하여 선형 모형에 비해 추가적 파고의 증가를 일으키기 때문이다. 쇄파점 이후의 파고변화는 경사 1/10의 경우 실험치와 잘 일치하고 있지만 경사 1/20의 경우 계측치에 비해 작은 값을 보여 과도한 에너지 감쇄를 보여주고 있다. 비선형 천수효과는 쇄파가 시작되면 그 기능을 정지하므로 이는 오로지 쇄파구조에 기인한 현상이다. Dally et al.(1985)의 쇄파구조는 수심과 파고에만 의존하는 비교적 단순한 모형으로서 후속연구를 통해 여러 가지 쇄파모형의 적용 가능성을 검토하고자 한다.

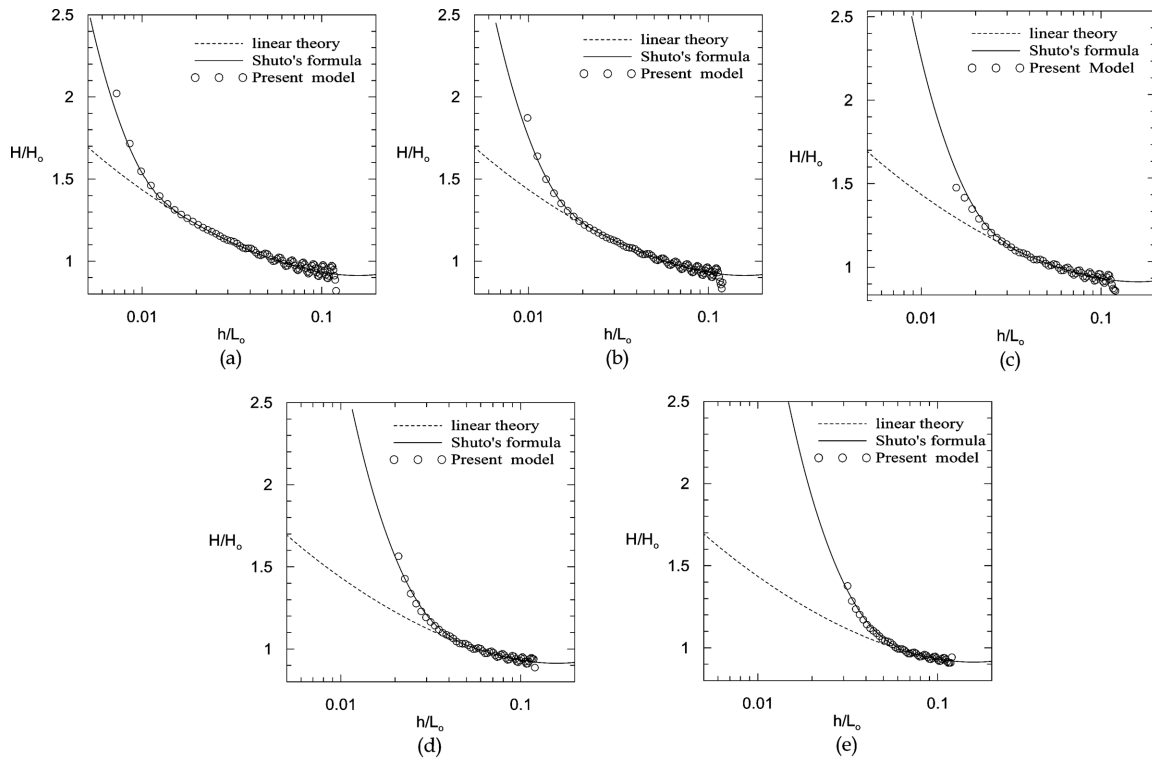


Fig. 3. Shoaling coefficient for (a) $H_0/L_0=0.001$, (b) $H_0/L_0=0.002$, (c) $H_0/L_0=0.005$, (d) $H_0/L_0=0.01$, (e) $H_0/L_0=0.02$.

Table 1. Specification of experiment

Slope	H_0 (cm)	T (sec)
1/10	11.04	1.205
1/20	6.00	1.190

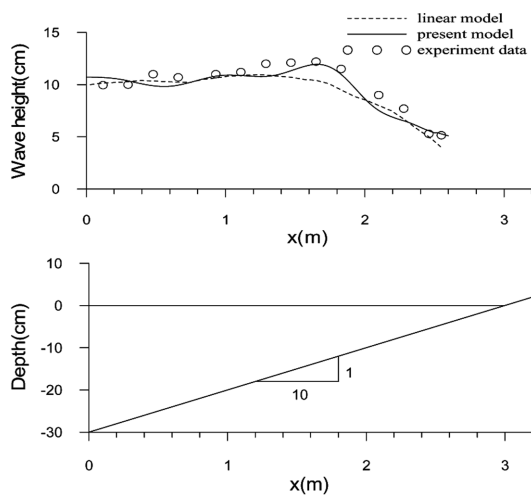


Fig. 4. Wave deformation across the surf zone(slope 1/10).

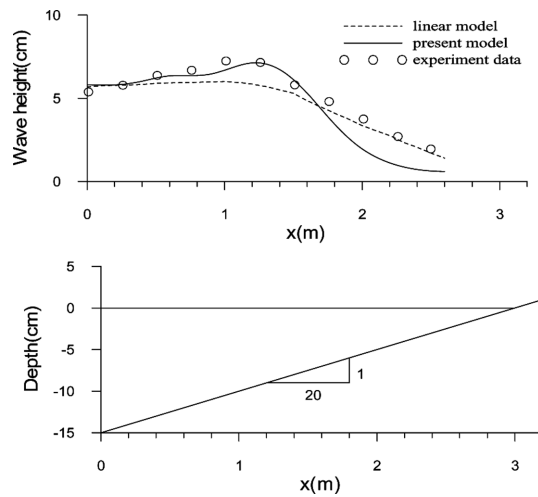


Fig. 5. Wave deformation across the surf zone(1/20).

6. 결 론

비선형성이 강해지는 쇄파대에서 파랑모의의 정확도를 높이기 위해 타원형 수정 완경사방정식에 Shuto의 경험식에 근거한 비선형 천수효과를 도입하였고 쇄파구조를 추가하였

다. 천수실험에서 본 모형의 경우 상대수심과 심해 파형경사에 따른 천수계수의 변화가 잘 모의되었음에 비해, 선형 모형의 경우 파형경사에 따른 변화를 모의할 수 없었고 상대수심에 따른 변화도 수심이 작아질수록 비선형 모형의 결과와 큰 차이를 보였다.

일정경사 지형에서의 쇄파 실험에서 본 모형의 경우 비선형 천수효과로 인해 에너지의 변화율이 쇄파직전까지 계속 증가하여 쇄파점에서 보다 큰 파고를 생성하였고 선형 모형에 비해 실험치와 보다 양호한 일치율을 보여주었다. 쇄파점 이후의 파고변화는 경사 1/10의 경우 실험치와 잘 일치하였지만 경사 1/20의 경우 계측치에 비해 과도한 파고 감소를 보여주었다. 이는 사용한 쇄파구조의 한계에 기인한 것으로서 추가 연구를 통해 보완하고자 한다.

사 사

이 논문은 2006학년도 경성대학교 학술지원 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- 윤중태 (2004). 수정완경사방정식의 타원형 수치모형, 한국해양공학회지, 18(4), 40-45.
- 윤중태, 박승민 (2006). 수정완경사방정식을 위한 반복기법의 효율성 비교, 한국해양공학회지, 20(6), 61-66.
- Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of Combined Refraction-Diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver, 1, 471-490.
- Booij, N. (1983). A Note on the Accuracy of the Mild-slope Equation, Coastal Eng., 7, 191-203.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995). The Modified Mild-slope Equation, J. Fluid Mech., 291, 393-407.
- Copeland, G.J.M. (1985). A Practical Alternative to the Mild-slope Wave Equation, Coastal Eng., 9, 125-149.
- Dally, W.R., Dean, R.G., Dalrymple, R.A., (1985). Wave height variation across beaches of arbitrary profile., J. Geophys. Res., 90(c6), 1917-1927.
- Dong, P. and Al-Mashouk, M. (1989). Comparison of Transient and Steady State Wave Models for Harbour Resonance, Proc. Conf. on Hydraulic and Environmental Modeling of Coastal, Estuarine and River waters, Bradford, 233-244.
- Houston, J.R. (1981). Combined Refraction and Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method, Applied Ocean Res., 3, 163-170.
- Massel, S.R. (1993). Extended Refraction-diffraction Equation for Surface Waves, Coastal Eng., 19, 97-126.
- Nagayama, S. (1983). Study on the Change of Wave Height and Energy in the Surf Zone, Bachelor thesis, Yokohama National University, Japan.
- Oliveira, F.S.B.F and Anastasion K. (1998). An Efficient Computational Model for Water Wave Propagation in Coastal Regions, Applied Ocean Research, 20, 263-271.
- Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushma-Roisin, B. (1991). Solution of the Mild-slope Wave Problem by Iteration, Applied Ocean Res., 13, 187-199.
- Radder, A.C. (1979). On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation, J. Fluid Mech., 95, 159-176.
- Shuto, N., (1974). Nonlinear long waves in a channel of variable section, Coastal Engineering in Japan, JSCE. 17, 1-12.
- Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). Time-dependent Equation for Wave Propagation on Rapidly Varying Topography, Coastal Eng., 32, 91-117.
- Tsai, C.P., Chen, H.B., Hsu, H.T. (1995). Estimation of Wave Height Deformation in Surf Zone, Journal of Harbor Technology, 10, 93-111.
- Tsai, C.P., Chen, H.B., Hsu J.R.C., (2001). Calculations of Wave transformation across the surf zone, Ocean Engrg., 28, 941-955.
- Watanabe, A., Dibajnia, H. (1988). A Numerical Model of Wave Deformation in Surf Zone, Proceedings of the 21st International Conference on Coastal Engineering, ASCE, 578-587.
- Zhao, Y. and Anastasion, K. (1996). Modelling of Wave Propagation in the Nearshore Region Using the Mild Slope Equation with GMRES-based Iterative Solvers, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 23, 397-411.

Received February 2, 2009

Accepted February 13, 2009