

# 탈퇴원인별 상이한 소수연령 분포에서 다중탈퇴율 계산과 변액연금에 응용

이항석<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>성균관대학교 보험계리학과/수학과

## 요약

전통적인 생명보험 상품뿐만 아니라 최근에 많이 판매가 이루어지고 있는 변액연금에 이르기까지 보험료와 준비금의 계산 및 리스크 관리에 다중탈퇴율이 많이 사용된다. 보험의 탈퇴현상은 특정 연령에서 1년 이내 임의 시점에 탈퇴가 발생할 확률을 필요로 하므로 이러한 현상을 나타내는 소수연령(Fractional Age)에 대한 분포의 가정이 탈퇴율의 계산에 필수적인 요소이다. Lee (2008b)는 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로의 전환 공식을 UDD 가정대신에 탈퇴원인별 동일한 소수연령 분포를 이용하여 유도하였다. 본 논문에서는 탈퇴원인별로 소수연령 분포가 상이한 가정에서 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로의 전환 공식을 유도한다. 특히 해약률의 경우 해약발생을 연속적이지 않고 이산적으로 다루는 경우가 실무에서 많으므로 사망 또는 장애의 발생과 다른 형태인 계단형 소수연령 분포함수가 필요하여 상이한 소수연령 분포에서 다중탈퇴율을 계산하는 공식을 제시한다. 또한 유도된 공식을 이용하여 적립금과 최소보증액의 수준에 따라서 달라지는 변액연금의 해약 현상을 반영하기 위하여 동적해약률(dynamic lapse rate)이 적용된 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명한다.

주요용어: 다중탈퇴율, 절대탈퇴율, 소수연령 분포, 변액연금, 동적해약률.

## 1. 서론

전통적인 생명보험 상품뿐만 아니라 최근에 많이 판매가 이루어지고 있는 변액연금에 이르기까지 보험료와 준비금의 계산 및 리스크 관리에 다중탈퇴율이 많이 사용된다. 다중탈퇴율의 다중탈퇴율은 연령별로 1년 이내에 특정 탈퇴원인에 의하여 탈퇴가 발생할 확률을 나타내지만 보험의 탈퇴현상은 특정 연령에서 1년 이내 임의 시점에 탈퇴가 발생할 확률을 필요로 한다. 따라서 이러한 현상을 나타내는 소수연령(Fractional Age)에 대한 분포의 가정이 탈퇴율의 계산에 필수적인 요소이다. 보험계리 실무에서는 UDD 가정을 이용하여 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 관계를 설정하고 있지만 엄격한 분석을 위해서는 소수연령 분포에 대한 일반적인 가정이 필요하다. Lee (2008b)는 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로의 전환 공식을 UDD 가정대신에 소수연령 독립(FI: Fractional Age Independence) 가정하에서 유도하였다. 하지만 Lee (2008b)에서는 탈퇴원인별 동일한 소수연령 분포가 가정되어 있다. 본 논문에서는 탈퇴원인별로 소수연령 분포가 상이한 가정에서 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로의 전환 공식을 유도한다. 특히 해약률의 경우 해약발생을 연속적이지 않고 이산적으로 다루는 경우가 실무에서 많으므로 사망 또는 장애의 발생과 다른 형태인 계단형 소수연령 분포함수가 필요하여 상이한 소수연령 분포에서 다중탈퇴율을 계산하는 공식을 제시한다. 또한 유도된 공식을 이용하여 적립금과 최소보증액의 수준에 따라서 달라지는 변액연금의 해약 현상을 반영하기 위하여 동적해약률(dynamic lapse rate)이 적용된 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명한다.

<sup>1</sup> (110-745) 서울시 중로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 보험계리학과/수학과, 조교수. Email: hangsock@skku.edu

변액연금(Variable Annuities)은 보험계약자가 납부한 연금보험료의 적립금이 펀드에 투자되어 투자실적에 연동되어 적립금의 규모가 결정되지만 투자실적이 좋지 않을 경우에 대비하여 최소보증옵션(Minimum Guaranty Options)이 내재되어 있다. 최소보증옵션에 대응되는 보증수수료를 적립금에서 일정비율로 차감하여 보증준비금으로 적립하여 보증옵션의 발생에 대비하고 있다. 변액연금의 적립금은 투자실적에 연동되어 있으므로 보험계약자는 펀드의 투자실적에 민감하여 보험계약의 해약 발생이 적립금과 최소보증액을 비교하여 해약률의 높고 낮음이 결정된다. 펀드의 실적에 의존하는 해약률이므로 이를 동적해약률(Dynamic Lapse Rate)로 명명하며 사용한다. 사망의 경우에 사망보험금이 있고 해약의 경우에 해약환급금이 지급되므로 사망과 해약을 고려한 다중탈퇴모형이 변액연금의 리스크 관리에 필요하다. 전통적인 생명보험 상품에 적용된 다중탈퇴율과 차이점은 변액연금의 경우는 해약률이 변동한다는 점이다.

다중탈퇴율 및 절대탈퇴율에 대한 선행연구는 다음과 같다. Shiu (1987)는 리만-스틸지 적분(Riemann-Stieltjes Integration)을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하는 일반적인 정의를 활용하여 절대탈퇴율을 다중탈퇴율로 전환하는 과정을 제시하였다. Bowers 등 (1997)의 10장에서 다중탈퇴모형에 대한 자세한 설명과 절대탈퇴율과 다중탈퇴율 전환과정에 대하여 포괄적으로 다루고 있다. Willmot (1997)은 UDD 가정의 일반적인 경우인 소수연령 독립 가정에서 다중탈퇴모형을 포함한 여러 공식을 유도하였으며 Jones와 Mereu (2000, 2002)는 소수연령(Fractional Age)에 여러 가지 분포를 고려하여 연구를 진행하였다. Lee (2008a)은 UDD 가정에서 연 기준 절대탈퇴율을 월 기준 다중탈퇴율로 전환하는 공식과 UDD 가정 또는 상수탈퇴력 가정에서 연 기준 다중탈퇴율을 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하였다. Lee (2008b)는 UDD 가정 대신에 보다 일반적인 가정인 소수연령 독립 가정하에서 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하거나 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하였다.

실제 실무에서는 월 단위 보험료를 적용하는 상품이 많고 준비금 계산이 월 단위로 이루어지는 경우가 많으므로 리스크 관리에 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많다. 또한 해약률의 경우 월말에 해약이 발생한다는 가정이 많이 사용되고 있기에 탈퇴원인별로 소수연령 분포를 다르게 적용하는 것이 의미가 있다. 따라서 본 논문에서는 Lee (2008b)와 Willmot (1997)에서 사용한 가정인 소수연령 독립 가정을 탈퇴원인별로 다르게 가정하여 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 또한 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식도 제시한다. 본 논문은 Shiu (1987)의 경우처럼 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 표현하여 논의를 전개하였다. 다중탈퇴율을 리만 적분(Riemann Integration)으로 표현하는 것에 비하여 리만-스틸지 적분으로 표현하는 것이 다양한 소수연령 분포를 이용하는데 편리하기 때문이다.

본 논문의 구성은 서론에 이어서 소수연령 분포의 특성과 탈퇴율의 기본 성질 및 리만-스틸지 적분을 살펴보고 절대탈퇴율이 탈퇴원인별로 상이한 소수연령 분포 가정하에 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도해 본다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997) 또는 Lee (2008a, 2008b)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있다. 또한 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 전환 과정을 설명한다. 마지막으로 전환공식을 변액연금에 적용하는 과정을 설명한다.

## 2. 소수연령 분포와 탈퇴율의 기본 성질 및 리만-스틸지 적분

먼저 소수연령 분포의 여러 성질들을 논의 한다. 그리고 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 기본성질을 살펴본다. 마지막으로 절대탈퇴율을 이용하여 다중탈퇴율을 표현하는데 필요한 리만-스틸지 적분의

특성을 살펴 본다.

우선 소수연령 분포에 대하여 논의하여 보자. 이에 대한 자세한 논의는 Willmot (1997)을 참고하면 된다.  $T(x)$ 는 연령이  $x$ 인 사람의 미래 생존기간을 나타내며  $K(x)$ 는  $T(x)$ 를 초과하지 않는 최대 정수 부분으로 정의하고 소수 부분은  $S = T(x) - K(x)$ 로 정의하면  $T(x) = K(x) + S$ 가 된다.  $S$ 를 소수연령(Fractional Age)로 표현하며 소수연령 독립 (FI: Fractional Age Independence) 가정은 확률변수  $K(x)$ 와  $S$ 의 독립(Statistical Independence)을 의미한다. 즉,  $0 \leq s \leq 1$ 이고  $k$ 는 정수일 때

$$\Pr(K(x) = k, S \leq s) = \Pr(K(x) = k)\Pr(S \leq s) \tag{2.1}$$

를 의미한다.  $H(s) = \Pr(S \leq s)$ 로 표현하면  $H(s)$ 는 소수연령의 분포함수이고

$$0 \leq H(s) \leq 1$$

을 만족한다. 이러한 성질을 사망률과 같은 위험율에 적용하면

$${}_s q_x = H(s) \cdot q_x \tag{2.2}$$

가 되고 연령이  $x$ 인 사람이 시간  $s$  이내에 사망할 확률은 소수연령 분포함수와 일년 이내에 사망할 확률의 곱으로 표현된다. 또한 생존율은

$${}_s p_x = 1 - H(s) \cdot q_x \tag{2.3}$$

가 된다. 한편 사력(force of mortality)은

$$\mu_x(t) = \frac{H'(t) \cdot q_x}{1 - H(t) \cdot q_x} \tag{2.4}$$

가 되고

$${}_s q_{x+t} = \frac{(H(t+s) - H(t)) \cdot q_x}{1 - H(t) \cdot q_x} \tag{2.5}$$

이다. 참고로 실무에서 많이 사용하는 소수연령 분포인 UDD가정은  $H(s) = s$ 인 경우이다.

다음으로 다중탈퇴율의 기본 성질을 살펴 보자. 다중탈퇴율은 탈퇴 원인이 한 개가 아닌  $m$ 개로서 탈퇴 원인을  $j = 1, \dots, m$ 으로 구별하여 표시한다. 연령이  $x$ 인 사람이 미래에 탈퇴가 발생하는 시점을 나타내는 확률변수  $T(x)$ 와 탈퇴 원인을 나타내는 확률변수  $J$ 로 다중탈퇴 현상을 표현한다. 시점  $t$  이내에 탈퇴 원인  $j$ 에 의하여 탈퇴가 발생할 확률(다중탈퇴율)은 다음과 같이 정의된다.

$${}_t q_x^{(j)} = \Pr(T(x) \leq t, J = j). \tag{2.6}$$

탈퇴 원인에 상관없이 시점  $t$  이내에 탈퇴가 발생할 총탈퇴율은

$${}_t q_x^{(r)} = \Pr(T(x) \leq t) = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)} \tag{2.7}$$

이 되며 총탈퇴율은 다중탈퇴율의 합과 같다. 시점  $t$  이후에 탈퇴가 발생할 확률은

$${}_t p_x^{(r)} = \Pr(T(x) > t) = 1 - {}_t q_x^{(r)} \tag{2.8}$$

이다. 시점  $t$  이내에 탈퇴가 발생하지 않을 확률이므로 유지율(persistency rate)로 불리기도 한다.

탈퇴 원인  $j$ 에 의한 탈퇴력(force of decrement due to cause  $j$ )은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{d_t q_x^{(j)}}{d_t p_x^{(r)}}. \quad (2.9)$$

앞에서 정의된 탈퇴력이 존재하면 다중탈퇴율은 식 (2.9)에  $t = z$ 를 대입하고  ${}_z p_x^{(r)}$ 를 식 (2.9)의 양변에 곱하여 적분하면

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_z p_x^{(r)} \mu_x^{(j)}(z) dz \quad (2.10)$$

와 같이 적분의 형태로 표현이 가능하다.

다음으로 절대탈퇴율의 기본 성질을 살펴보자. 절대탈퇴율은 특정 탈퇴원인만을 고려하여 탈퇴 현상을 나타내는 확률이다. 특정 탈퇴 원인에 대한 절대유지율(절대생존율)은

$${}_t p_x^{(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(j)}(z) dz\right) \quad (2.11)$$

로 정의하며 절대탈퇴율은

$${}_t q_x^{(j)} = 1 - {}_t p_x^{(j)} \quad (2.12)$$

이다. 다중탈퇴율과 구별하기 위하여 기호  $p$ 와  $q$ 의 위첨자에 표시 '를 한다. 또한 절대유지율은 두 개의 절대유지율 곱으로 표현된다. 즉 식 (2.11)에  $t = t + s$ 를 대입하고 적분의 성질을 적용하면

$${}_{t+s} p_x^{(j)} = {}_t p_x^{(j)} \cdot {}_s p_{x+t}^{(j)} \quad (2.13)$$

이 된다. 또한 시점  $t$  이후에서 시점  $t + s$  이내에 절대탈퇴가 발생할 확률은

$${}_{ts} q_x^{(j)} = {}_t p_x^{(j)} \cdot {}_s q_{x+t}^{(j)} \quad (2.14)$$

이다. 식 (2.14)뿐만 아니라 위에서 언급한 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 여러 성질들은 Bowers 등 (1997)에서 확인할 수 있다.

Shiu (1987)는 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하였다. 이러한 접근이 Bowers 등 (1997)에 사용된 리만 적분보다 소수연령이 다양한 경우에도 폭넓게 사용될 수 있으므로 본 논문의 확률 표현은 가급적 리만-스틸지 적분으로 나타낸다. 특히 탈퇴력이 존재하지 않는 경우에는 확률 또는 기대값을 적분형태로 나타내는데 편리하다. 리만-스틸지 적분에 대한 상세한 논의는 Apostol (1974)를 참조하면 도움이 된다. 변수  $z$ 에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 정의하면

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t \prod_{i=j}^r {}_z p_x^{(i)} d({}_z q_x^{(j)}) \quad (2.15)$$

이다. 탈퇴력이 존재하는 경우 아래의 식 (2.20)을 이용하면 식 (2.10)은 식 (2.15)과 동일하다. 본 논문에서 많이 사용될 리만-스틸지 적분의 성질을 소개하면 다음과 같다. 본 논문에서 다룰 리만-스틸지 적분  $\int_a^b f(z)d(g(z))$ 이 존재할 수 있도록 함수  $f(z)$ 는 적분구간의 유한한 점을 제외하면 연속함수이며 특히 증가함수  $g(z)$ 가 불연속(discontinuous)인 점에서는  $f(z)$ 는 연속함수이다. 상수  $c$ 에 대하여

$$\int_a^b f(z)d(c \cdot g(z)) = c \int_a^b f(z)d(g(z)) = \int_a^b cf(z)d(g(z)) \quad (2.16)$$

이고

$$\int_a^b f(z)d(g(z) + c) = \int_a^b f(z)d(g(z)) \quad (2.17)$$

이다. 또한

$$\int_a^b cd(g(z)) = c(g(b) - g(a)) \quad (2.18)$$

가 성립한다. 여기서 연속인 단조증가함수  $h(x)$ 에 대하여  $a = h(c)$ ,  $b = h(d)$ 일 때

$$\int_a^b f(z)d(g(z)) = \int_c^d f(h(x))d(g(h(x))) \quad (2.19)$$

이 된다.  $g(z)$ 가 미분 가능이고 도함수가 연속이면

$$\int_a^b f(z)d(g(z)) = \int_a^b f(z)\frac{d(g(z))}{dz}dz \quad (2.20)$$

이고  $f(z)$ 가 미분 가능이고 도함수가 연속이고  $n \neq -1$ 이면

$$\int_a^b f(z)^n d(f(z)) = \frac{1}{n+1} \{f(b)^{n+1} - f(a)^{n+1}\} \quad (2.21)$$

이 된다. 만약  $g(z)$ 가 구간  $[a, b]$ 에 있는  $x_1, \dots, x_n$ 에서

$$g(z) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot I(z \geq x_i)$$

이고  $f(z)$ 가  $x_1, \dots, x_n$ 에서 연속일 때

$$\int_a^b f(z)d(g(z)) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\theta_i \quad (2.22)$$

가 성립한다. 단,  $I(A)$ 는  $A$ 가 참이면  $I(A) = 1$ 이고 그렇지 않으면  $I(A) = 0$ 이다.

### 3. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환

다중탈퇴표(Multiple Decrement Table)에 있는 다중탈퇴율은 연령별로 1년 이내에 특정 탈퇴원인에 의하여 탈퇴가 발생할 확률을 나타내지만 보험의 탈퇴현상은 특정 연령에서 1년 이내 임의 시점에 탈퇴가 발생할 확률을 필요로 하고 실제 실무에서는 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많다. 여기서 연 기준의 절대탈퇴율을 특정 시점에서 임의의 기간 이내에 탈퇴가 발생할 확률을 나타내는 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준뿐만 아니라 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 시점을 나타내는  $t$ 와  $s$ 는  $\{0 \leq t < 1, 0 < s + t \leq 1\}$ 인 경우로 한정한다. 여기서 탈퇴원인별 ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) 절대탈퇴율이 상이한 소수연령 분포  $H_j(t)$ 를 따른다고 하면 절대탈퇴율은 식 (2.2)에서처럼

$${}_tq_x^{(j)} = H_j(t) \cdot q_x^{(j)} \quad (3.1)$$

으로 가정하고

$${}_t p_x^{(j)} = 1 - H_j(t) \cdot q_x^{(j)} \quad (3.2)$$

이 성립하며

$${}_{t|z} q_x^{(j)} = (H_j(t+z) - H_j(t)) \cdot q_x^{(j)} \quad (3.3a)$$

및

$${}_s q_{x+t}^{(j)} = \frac{(H_j(t+s) - H_j(t)) \cdot q_x^{(j)}}{1 - H_j(t) \cdot q_x^{(j)}} \quad (3.3b)$$

이 된다.

이제 변수  $z$ 에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 표현하여 계산하면

$$\begin{aligned} {}_s q_{x+t}^{(j)} &= \int_0^s \prod_{i \neq j} {}_z p_{x+t}^{(i)} d({}_z q_{x+t}^{(j)}) \quad (3.4) \\ &= \int_0^s \prod_{i \neq j} \left( \frac{{}_{z+t} p_x^{(i)}}{{}_t p_x^{(i)}} \right) d \left( \frac{{}_{t|z} q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(j)}} \right) \\ &= \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{{}_t p_x^{(i)}} \right) \int_0^s \prod_{i \neq j} ({}_{z+t} p_x^{(i)}) d({}_{t|z} q_x^{(j)}) \\ &= \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - H_i(t) \cdot q_x^{(i)}} \right) q_x^{(j)} \int_0^s \prod_{i \neq j} ({}_{z+t} p_x^{(i)}) d(H_j(t+z) - H_j(t)) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (3.4)의 첫 번째 등호는 식 (2.15)의 적용이며 두 번째 등호는 식 (2.14)를 이용한 것이다. 식 (3.4)의 세 번째 등호는 식 (2.16)을 활용했고 네 번째 등호는 식 (3.3a)와 식 (2.17)을 적용하였다. 위 식 (3.4)의 마지막에 있는 적분 부분의 계산은 식 (2.17)과 (3.2) 및 변수변환 ( $z = z + t$ )에 관한 식 (2.19)를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^s \prod_{i \neq j} ({}_{z+t} p_x^{(i)}) dH_j(t+z) &= \int_0^s \prod_{i \neq j} (1 - H_i(z+t) \cdot q_x^{(i)}) dH_j(t+z) \quad (3.5) \\ &= \int_t^{t+s} \prod_{i \neq j} (1 - H_i(z) \cdot q_x^{(i)}) dH_j(z). \end{aligned}$$

적분 내부에 있는  $z$ 의 함수는

$$\begin{aligned} \prod_{i \neq j} (1 - H_i(z) \cdot q_x^{(i)}) &= 1 - \sum_{i \neq j} q_x^{(i)} H_i(z) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} q_x^{(i_1)} q_x^{(i_2)} H_{i_1}(z) H_{i_2}(z) + \cdots + \\ &\quad (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \cdots q_x^{(i_k)} H_{i_1}(z) \cdots H_{i_k}(z) + \cdots + (-1)^{m-1} \prod_{i \neq j} q_x^{(i)} H_i(z) \quad (3.6) \end{aligned}$$

와 같이  $z$ 의 함수가 된다. 단  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, m\}$ . 이 함수를  $z$ 에 대하여 리만-스틸 지 적분( $t \leq z \leq t+s$ )을 하면 식 (3.5)는

$$\begin{aligned}
 H_j(t+s) - H_j(t) &= \sum_{i \neq j} q_x^{(i)} \int_t^{t+s} H_i(z) dH_j(z) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} q_x^{(i_1)} q_x^{(i_2)} \int_t^{t+s} H_{i_1}(z) H_{i_2}(z) dH_j(z) \quad (3.7) \\
 &+ \dots + (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \dots q_x^{(i_k)} \int_t^{t+s} H_{i_1}(z) \dots H_{i_k}(z) dH_j(z) \\
 &+ \dots + (-1)^{m-1} \left( \prod_{i \neq j} q_x^{(i)} \right) \int_t^{t+s} \prod_{i \neq j} H_i(z) dH_j(z)
 \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 식 (3.5)의 맨 앞에 있는 두 개항은 식 (2.18)을 적용한 결과이다. 식 (3.7)을 식 (3.4)의 적분부분에 대체하면 다중탈퇴율은

$$\begin{aligned}
 {}_s q_{x+t}^{(j)} &= q_x^{(j)} \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - H_i(t) \cdot q_x^{(i)}} \right) \quad (3.8) \\
 &\times \left( H_j(t+s) - H_j(t) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \dots q_x^{(i_k)} \int_t^{t+s} H_{i_1}(z) \dots H_{i_k}(z) dH_j(z) \right)
 \end{aligned}$$

가 된다. 참고로 이 공식에서  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ 의 가능한 경우의 수는 조합수  ${}_{m-1}C_k$ 이다. 여기서 주목할 점은 식 (3.8)에서 탈퇴원인 별로 상이한 소수연령 분포를 가정하고 있으므로 적분형태인

$$\int_t^{t+s} H_{i_1}(z) \dots H_{i_k}(z) dH_j(z) \quad (3.9)$$

는 가정된 분포에 따라서 결과가 달라지므로 임의의 경우에 적분이 더 이상 간단해지지 않는다. 하지만 실무에서 적절한 소수연령 분포 가정을 하여 계산하면 쉽게 결과가 유도된다. 본 논문에서 예를 통하여 설명된다. 또한 여기서 유도된 공식 (3.8)의 의미는 절대탈퇴율을 이용하여 다중탈퇴율을 구하는 적분과정을 일일이 하지 않아도 소수연령 분포함수의 적분만으로 다중탈퇴율을 바로 계산할 수 있다는 점이다. 즉 소수연령 분포를 변경할 경우에 소수연령 분포 적분만으로 새로운 다중탈퇴율 공식을 용이하게 유도할 수 있다. 나중에 예제를 통하여 이러한 점을 명확히 확인할 수 있다.

식 (3.8)의 특수한 경우에 대하여 살펴보자.  $t = 0, s = 1$ 일 때  $H_i(0) = 0$ 과  $H_i(1) = 1$ 이고  $\prod_{i=1}^m (1/(1 - H_i(t) \cdot q_x^{(i)})) = 1$ 이므로 식 (3.8)은 다음의 공식이 된다.

$$q_x^{(j)} = q_x^{(j)} \cdot \left( 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \dots q_x^{(i_k)} \int_0^1 H_{i_1}(z) \dots H_{i_k}(z) dH_j(z) \right). \quad (3.10)$$

식 (3.10)는 연 기준의 절대탈퇴율을 연 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식이다. 주목할 점은 식 (3.10)는  $H_i(s)$ 의 분포형태에 의존한다. 월(month) 기준의 다중탈퇴율로 표현하는 방법은 식 (3.8)에

$s = 1/12, t = n/12$  (단,  $n = 0, 1, \dots, 11$ )을 대입하면

$$\begin{aligned}
 {}_1 q_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)} & \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - H_i\left(\frac{n}{12}\right) \cdot q_x^{(i)}} \right) \cdot \left[ H_j\left(\frac{n+1}{12}\right) - H_j\left(\frac{n}{12}\right) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \cdots q_x^{(i_k)} \int_{\frac{n}{12}}^{\frac{n+1}{12}} H_{i_1}(z) \cdots H_{i_k}(z) dH_j(z) \right] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

이 된다. 분기 기준으로 전환은,  $s = 1/4, t = n/4$  (단,  $n = 0, 1, 2, 3$ )을 식 (3.8)에 대입하면 된다.

탈퇴원인별 소수연령 분포가 동일하면 식 (3.8)의 적분부분에서  $H_i(z) = H(z)$ 이 되므로 식 (2.21)을 이용하면

$$\int_t^{s+t} H_{i_1}(z) \cdots H_{i_k}(z) dH_j(z) = \frac{1}{k+1} \{H(t+s)^{k+1} - H(t)^{k+1}\} \quad (3.12)$$

이 성립하고

$$\begin{aligned}
 {}_s q_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)} & \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - H(t) \cdot q_x^{(i)}} \right) \cdot \left[ H(t+s) - H(t) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \{H(t+s)^{k+1} - H(t)^{k+1}\} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} q_x^{(i_1)} \cdots q_x^{(i_k)} \right] \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

이 된다. 식 (3.13)은 Lee (2008b)의 공식 (3.8)과 일치한다.

실무에서 많이 사용되는  $m = 3$ 인 경우에 위 식 (3.10)를 적용하면

$$q_x^{(1)} = q_x^{(1)} \left\{ 1 - \left( q_x^{(2)} \int_0^1 H_2(z) dH_1(z) + q_x^{(3)} \int_0^1 H_3(z) dH_1(z) \right) + q_x^{(2)} q_x^{(3)} \int_0^1 H_2(z) H_3(z) dH_1(z) \right\} \quad (3.14a)$$

이 되고

$$q_x^{(2)} = q_x^{(2)} \left\{ 1 - \left( q_x^{(1)} \int_0^1 H_1(z) dH_2(z) + q_x^{(3)} \int_0^1 H_3(z) dH_2(z) \right) + q_x^{(1)} q_x^{(3)} \int_0^1 H_1(z) H_3(z) dH_2(z) \right\} \quad (3.14b)$$

및

$$q_x^{(3)} = q_x^{(3)} \left\{ 1 - \left( q_x^{(1)} \int_0^1 H_1(z) dH_3(z) + q_x^{(2)} \int_0^1 H_2(z) dH_3(z) \right) + q_x^{(1)} q_x^{(2)} \int_0^1 H_1(z) H_2(z) dH_3(z) \right\} \quad (3.14c)$$

이 된다.

예제를 통하여 위의 식 (3.14a), (3.14b), (3.14c)를 적용하여 보자. Bowers 등 (1997, p.329)의 Example 10.6.3에 있는 문제 (a)와 (b)를 식 (3.14a), (3.14b), (3.14c)를 이용하여 풀어보자. 탈퇴원인이 사망, 장애, 해약으로  $m = 3$ 인 경우이다. 절대탈퇴의 사망과 장애의 절대탈퇴에서 소수연령의 분포가 UDD가정이며 해약의 절대탈퇴는 연중( $s = 0.5$ )과 연말( $s = 1$ )에  $\theta$ 와  $1 - \theta$ 의 비로 각각 발생하는 것으로 가정한다. 즉  $i = 1, 2, 3$ 일 때

$${}_s q_x^{(i)} = H_i(s) \cdot q_x^{(i)} \quad (3.15)$$



인데

$$H_1(s) = H_2(s) = s \tag{3.16a}$$

이고

$$H_3(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < 0.5, \\ \theta, & 0.5 \leq s < 1, \\ 1, & s = 1 \end{cases} \tag{3.16b}$$

이다. 여기서  $\theta = 0$ 인 경우는 Bowers 등 (1997, p.329)의 Example 10.6.3 (a)에 해당되며  $\theta = 0.5$ 인 경우는 Example 10.6.3 (b)에 해당된다. 식 (2.22)에 의하여

$$\int_0^1 H_1(z)dH_3(z) = \int_0^1 H_2(z)dH_3(z) = 0.5\theta + 1 \times (1 - \theta) = 1 - 0.5\theta \tag{3.17a}$$

가 되고 다음의 적분 식 (3.17b)와 (3.17c)는 리만 적분이 되므로

$$\int_0^1 H_3(z)dH_1(z) = \int_0^1 H_3(z)dH_2(z) = \theta \times 0.5 = 0.5\theta, \tag{3.17b}$$

$$\int_0^1 H_1(z)dH_2(z) = \int_0^1 H_2(z)dH_1(z) = 0.5 \tag{3.17c}$$

로 계산된다. 또한 식 (2.22)에 의하여

$$\int_0^1 H_1(z)H_2(z)dH_3(z) = 0.5^2 \times \theta + 1^2 \times (1 - \theta) = 1 - 0.75\theta \tag{3.17d}$$

이 되고 다음의 적분 식 (3.17e)는 리만 적분이 되므로

$$\int_0^1 H_2(z)H_3(z)dH_1(z) = \int_0^1 H_1(z)H_3(z)dH_2(z) = \frac{3}{8}\theta \tag{3.17e}$$

가 된다. 따라서 위 여러 가지 적분 결과인 식 (3.17a)에서 식 (3.17e)를 식 (3.14a), (3.14b) 및 (3.14c)에 각각 대입하면

$$q_x^{(1)} = q_x^{(1)} \left[ 1 - (0.5q_x^{(2)} + 0.5\theta q_x^{(3)}) + \frac{3}{8}\theta q_x^{(2)} q_x^{(3)} \right] \tag{3.18a}$$

$$q_x^{(2)} = q_x^{(2)} \left[ 1 - (0.5q_x^{(1)} + 0.5\theta q_x^{(3)}) + \frac{3}{8}\theta q_x^{(1)} q_x^{(3)} \right] \tag{3.18b}$$

$$q_x^{(3)} = q_x^{(3)} \left[ 1 - \{(1 - 0.5\theta) q_x^{(1)} + (1 - 0.5\theta) q_x^{(2)}\} + (1 - 0.75\theta) q_x^{(1)} q_x^{(2)} \right] \tag{3.18c}$$

이 성립한다. 위 공식 (3.18a), (3.18b) 및 (3.18c)에  $\theta$ 가 0 또는 0.5를 대입하면 Bowers 등 (1997, p.329)의 Example 10.6.3의 (a) 또는 (b)의 결과가 위 공식을 통하여 각각 구해진다.

#### 4. 동일 기준의 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환

앞에서 연 기준의 절대탈퇴율을 특정 시점에서 임의의 기간 이내에 탈퇴가 발생할 확률을 나타내는 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하였다. 여기서는 기준이 동일한 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율

로 전환하는 공식을 유도해 본다. 즉 특정 시점에서 임의의 기간 이내에 탈퇴가 발생하는 절대탈퇴율에서 동일 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 과정을 다룬다. 또한 실무에서 편리하게 사용할 수 있는 월 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율 공식도 부수적으로 유도된다.

시점을 나타내는  $t$ 와  $s$ 는  $\{0 \leq t < 1, 0 < s+t \leq 1\}$ 인 경우이며  $u$ 는  $0 \leq u \leq 1$ 인 경우를 고려한다. 식 (2.15)를 이용하여 다중탈퇴율을 변수  $z$ 에 대한 리만-스텔지 적분으로 정의하면

$$\begin{aligned} {}_s q_{x+t}^{(j)} &= \int_0^s \prod_{i \neq j} z p_{x+t}^{(i)} d(z q_{x+t}^{(j)}) \\ &= \int_0^s \prod_{i \neq j} z p_{x+t}^{(i)} d\left(\frac{t z q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}}\right) \\ &= \int_0^s \left(\prod_{i \neq j} z p_{x+t}^{(i)}\right) \frac{q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}} d(H_j(t+z) - H_j(t)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

된다. 여기서 식 (4.1)의 두 번째 등호는 식 (2.14)의 응용이며 세 번째 등호는 식 (3.3a)와 (2.16)을 적용하였다. 소수연령 분포의 성질을 이용하면 다음의 관계식을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_{u \cdot s} q_{x+t}^{(j)} &= \frac{t u \cdot s q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}} \\ &= \frac{\{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)\} \cdot q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}} \\ &= \frac{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)} \cdot \frac{t s q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}} \\ &= \frac{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)} \cdot {}_s q_{x+t}^{(j)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

여기서 식 (4.2)의 첫 번째 등호는 식 (2.14)의 응용이며 두 번째와 세 번째 등호는 식 (3.3a)를 적용했으며 마지막 등호는 식 (2.14)를 이용하였다. 연령이  $(x+t)$ 인 사람이 탈퇴원인에 의한  $u \cdot s$  시점 이내에 탈퇴할 절대탈퇴율은  $u$ 의 증가함수이다. 이 관계식은 아래의 식 (4.3)을 전개하는데 중요한 요소로 활용된다. 식 (4.1)의 적분을 식 (2.19)를 이용하여 변수변환 ( $u = z/s$ ) 하면  $u$ 에 대한 리만-스텔지 적분으로 표현되며

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\prod_{i \neq j} {}_{u \cdot s} p_{x+t}^{(i)}\right) \frac{q_x^{(j)}}{t p_x^{(j)}} \frac{H_j(t+s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)} d(H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)) \\ &= {}_s q_{x+t}^{(j)} \int_0^1 \prod_{i \neq j} {}_{u \cdot s} p_{x+t}^{(i)} d\left\{\frac{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)}\right\} \\ &= {}_s q_{x+t}^{(j)} \int_0^1 \prod_{i \neq j} (1 - {}_{u \cdot s} q_{x+t}^{(i)}) d\left\{\frac{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)}\right\} \\ &= {}_s q_{x+t}^{(j)} \int_0^1 \prod_{i \neq j} \left\{1 - \frac{H_i(t+u \cdot s) - H_i(t)}{H_i(t+s) - H_i(t)} \cdot {}_s q_{x+t}^{(i)}\right\} d\left\{\frac{H_j(t+u \cdot s) - H_j(t)}{H_j(t+s) - H_j(t)}\right\} \\ &= {}_s q_{x+t}^{(j)} \int_0^1 \prod_{i \neq j} \{1 - H_i^{t,s}(u) \cdot {}_s q_{x+t}^{(i)}\} dH_j^{t,s}(u) \end{aligned} \quad (4.3)$$

가 된다. 식 (4.3)의 첫 번째 등호는 식 (3.2)와 (3.3b) 및 (2.16)을 이용하였고 두 번째 등호는 식 (2.12)를 활용하였고 세 번째 등호는 식 (4.2)를 이용하였다. 마지막 등호는

$$H_i^{t,s}(u) = \frac{H_i(t+u \cdot s) - H_i(t)}{H_i(t+s) - H_i(t)} \quad (4.4)$$

로 정의하여 표현하였다. 참고로  $0 \leq u \leq 1$ 에 대하여  $H_i^{t,s}(u)$ 는 분포함수의 특성을 가지고 있다. 즉  $H_i^{t,s}(u)$ 는  $u$ 에 대하여 증가함수이며  $H_i^{t,s}(0) = 0$ 이고  $H_i^{t,s}(1) = 1$ 이다. 이 새로운 분포함수는 원래 분포함수의 두 점  $(t, H_i(t))$ 와  $(t+s, H_i(t+s))$  사이에 있는 그래프를 가로축 및 세로축으로 모두 0과 1 사이로 확장한 님은꼴 그래프를 나타낸다. 님은 비는 가로축으로  $1/s$ 배, 세로축으로  $1/[H_i(t+s) - H_i(t)]$ 배이다.

이제 식 (4.3)의 적분을 계산하기 전에 식 (4.3)의 마지막 적분의 내부에 있는  $u$ 의 함수는 다음과 같이 전개가 가능하다.

$$\prod_{i \neq j} (1 - H_i^{t,s}(u) \cdot {}_s q_{x+t}^{(i)}) = 1 - \sum_{i \neq j} {}_s q_{x+t}^{(i)} H_i^{t,s}(u) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} {}_s q_{x+t}^{(i_1)} \cdot {}_s q_{x+t}^{(i_2)} H_{i_1}^{t,s}(u) H_{i_2}^{t,s}(u) + \dots + \quad (4.5)$$

$$(-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} {}_s q_{x+t}^{(i_1)} \dots {}_s q_{x+t}^{(i_k)} H_{i_1}^{t,s}(u) \dots H_{i_k}^{t,s}(u) + \dots + (-1)^{m-1} \prod_{i \neq j} {}_s q_{x+t}^{(i)} \cdot H_i^{t,s}(u).$$

이 함수를  $u$ 에 대하여 적분표현을 하면

$$\int_0^1 \prod_{i \neq j} (1 - H_i^{t,s}(u) \cdot {}_s q_{x+t}^{(i)}) dH_j^{t,s}(u) \quad (4.6)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} {}_s q_{x+t}^{(i_1)} \dots {}_s q_{x+t}^{(i_k)} \int_0^1 H_{i_1}^{t,s}(u) \dots H_{i_k}^{t,s}(u) dH_j^{t,s}(u)$$

가 된다. 따라서 식 (4.6)을 식 (4.3)의 적분 부분으로 대체하면 다중탈퇴율은

$${}_s q_{x+t}^{(j)} = {}_s q_{x+t}^{(j)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} {}_s q_{x+t}^{(i_1)} \dots {}_s q_{x+t}^{(i_k)} \int_0^1 H_{i_1}^{t,s}(u) \dots H_{i_k}^{t,s}(u) dH_j^{t,s}(u) \right\} \quad (4.7)$$

으로 표현된다. 여기서 주목할 점은 식 (4.7)에서 탈퇴원인별로 상이한 소수연령 분포를 가정하고 있으므로 적분형태인

$$\int_0^1 H_{i_1}^{t,s}(u) \dots H_{i_k}^{t,s}(u) dH_j^{t,s}(u) \quad (4.8)$$

는 가정된 분포에 따라서 결과가 달라지므로 임의의 경우에 적분이 더 이상 간단해지지 않는다. 하지만 실무에서 적절한 소수연령 분포 가정을 하여 계산하면 쉽게 결과가 유도된다. 본 논문에서 예를 통하여 설명된다. 또한 여기서 유도된 공식 (4.7)의 의미는 절대탈퇴율을 이용하여 다중탈퇴율을 구하는 적분과정을 일일이 하지 않아도 소수연령 분포함수의 적분만으로 다중탈퇴율을 바로 계산할 수 있다는 점이다. 즉 소수연령 분포를 변경할 경우에 소수연령 분포 적분만으로 새로운 다중탈퇴율 공식을 용이하게 유도할 수 있다.

한편 탈퇴원인별 소수연령 분포가 동일하면 식 (4.7)의 적분부분에서  $i$ 에 관계없이  $H_i(z) = H(z)$ 로 동일하므로

$$H_i^{t,s}(u) = \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)}$$

가 되어 식 (2.21)을 이용하면

$$\int_0^1 H_{i_1}^{t,s}(u) \cdots H_{i_k}^{t,s}(u) dH_j^{t,s}(u) = \frac{1}{k+1} \quad (4.9)$$

이 된다. 따라서 탈퇴원인별 동일한 소수연령 분포인 경우 식 (4.7)은

$${}_s q_{x+t}^{(j)} = {}_s q_{x+t}^{(j)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} {}_s q_{x+t}^{(i_1)} \cdots {}_s q_{x+t}^{(i_k)} \right\} \quad (4.10)$$

이 되고 식 (4.10)은 Lee (2008b)의 식 (4.6)과 동일하다. 이 다중탈퇴율 공식에  $s = 1/12, t = n/12$  (단,  $n = 0, 1, \dots, 11$ )을 대입하면 다음과 같은 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환이 가능한 공식이다.

$${}_{12} q_{x+n/12}^{(j)} = {}_{12} q_{x+n/12}^{(j)} \times \left( 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \neq j \\ i_1 < \dots < i_k}} {}_{12} q_{x+n/12}^{(i_1)} \cdots {}_{12} q_{x+n/12}^{(i_k)} \int_0^1 H_{i_1}^{n/12, 1/12}(u) \cdots H_{i_k}^{n/12, 1/12}(u) dH_j^{n/12, 1/12}(u) \right). \quad (4.11)$$

위의 전환 공식 (4.7)은 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)과 표현이 다를 뿐 결과는 동일한 공식이다. 위의 공식 (4.7)은  $\{ {}_s q_{x+t}^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m \}$ 을 이용하여  ${}_s q_{x+t}^{(j)}$ 를 계산하는 공식이며 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)은  $\{ q_{x+t}^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m \}$ 을 이용하여  ${}_s q_{x+t}^{(j)}$ 를 계산하는 공식이다. 위의 다중탈퇴율 공식 (4.7)은 식 (3.3b)를 이용하여 확률을 전환한 다음 이용하면 되므로 두 공식은 동일한 정보를 이용하여 계산이 가능하다.

실무에서 많이 사용되는  $m = 3$ 인 경우를 위 식 (4.11)에 적용하면

$$\begin{aligned} {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} &= {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} \times \left[ 1 - \left\{ {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} \int_0^1 H_2^{n/12, 1/12}(u) dH_1^{n/12, 1/12}(u) + {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} \int_0^1 H_3^{n/12, 1/12}(u) dH_1^{n/12, 1/12}(u) \right\} \right. \\ &\quad \left. + {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} \cdot {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} \int_0^1 H_2^{n/12, 1/12}(u) H_3^{n/12, 1/12}(u) dH_1^{n/12, 1/12}(u) \right] \end{aligned} \quad (4.12a)$$

가 되고

$$\begin{aligned} {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} &= {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} \times \left[ 1 - \left\{ {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} \int_0^1 H_1^{n/12, 1/12}(u) dH_2^{n/12, 1/12}(u) + {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} \int_0^1 H_3^{n/12, 1/12}(u) dH_2^{n/12, 1/12}(u) \right\} \right. \\ &\quad \left. + {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} \cdot {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} \int_0^1 H_1^{n/12, 1/12}(u) H_3^{n/12, 1/12}(u) dH_2^{n/12, 1/12}(u) \right], \end{aligned} \quad (4.12b)$$

$$\begin{aligned} {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} &= {}_{12} q_{x+n/12}^{(3)} \times \left[ 1 - \left\{ {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} \int_0^1 H_1^{n/12, 1/12}(u) dH_3^{n/12, 1/12}(u) + {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} \int_0^1 H_2^{n/12, 1/12}(u) dH_3^{n/12, 1/12}(u) \right\} \right. \\ &\quad \left. + {}_{12} q_{x+n/12}^{(1)} \cdot {}_{12} q_{x+n/12}^{(2)} \int_0^1 H_1^{n/12, 1/12}(u) H_2^{n/12, 1/12}(u) dH_3^{n/12, 1/12}(u) \right] \end{aligned} \quad (4.12c)$$

가 된다.

예를 통하여 위의 식 (4.12a), (4.12b) 및 (4.12c)를 적용하여 보자. 탈퇴원인이 사망, 장애, 해약으로  $m = 3$ 인 경우이다. 사망과 장애의 절대탈퇴는 소수연령의 분포가 UDD가정이며 해약의 절대탈퇴는 월말에  $\theta_i (i = 1, \dots, 12)$ 의 비율로 각각 발생하는 것으로 가정한다. 단  $\sum_{i=1}^{12} \theta_i = 1$ 이다.  $i = 1, 2, 3$ 일 때

$${}_s q_x^{(i)} = H_i(s) \cdot q_x^{(i)} \tag{4.13}$$

인데

$$H_1(s) = H_2(s) = s \tag{4.14a}$$

이고

$$H_3(s) = \sum_{i=1}^{12} \theta_i \cdot I\left(s \geq \frac{i}{12}\right) \tag{4.14b}$$

이다. 식 (4.4)를 이용하면

$$H_1^{n, 112}(u) = H_2^{n, 12}(u) = u, \tag{4.15a}$$

$$H_3^{n, 12}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < 1, \\ 1, & u = 1 \end{cases} \tag{4.15b}$$

이 유도된다. 식 (4.15a)와 (4.15b)를 위의 다중탈퇴율로 전환하는 공식 (4.12a), (4.12b) 및 (4.12c)에 대입하면 9개의 적분 계산이 필요한데 식 (4.15a)와 (4.15b)의 형태가 식 (3.16a)와  $\theta = 0$ 인 식 (3.16b)와 각각 동일하므로 9개의 적분값은  $\theta = 0$ 인 식 (3.17a)에서 (3.17e)의 적분값과 동일하다. 따라서 다중탈퇴율은

$$\begin{aligned} {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \left\{ 1 - \left( {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \cdot 0.5 + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \cdot 0 \right) + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \cdot {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \cdot 0 \right\} \\ &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \left( 1 - 0.5 \cdot {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \right) \end{aligned} \tag{4.16a}$$

가 되고

$$\begin{aligned} {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \left\{ 1 - \left( {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \cdot 0.5 + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \cdot 0 \right) + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \cdot {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \cdot 0 \right\} \\ &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \left( 1 - 0.5 \cdot {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{4.16b}$$

및

$$\begin{aligned} {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \left\{ 1 - \left( {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \cdot 1 + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \cdot 1 \right) + {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \cdot {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \cdot 1 \right\} \\ &= {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} \left( 1 - {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} \right) \left( 1 - {}_1 q_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} \right) \end{aligned} \tag{4.16c}$$

된다. 주목할 점은 사망과 장애를 나타내는 식 (4.16a)와 (4.16b)는 해약의 절대탈퇴율의 영향을 받지 않으며 해약을 나타내는 식 (4.16c)는 사망과 장애가 발생하지 않은 경우에 절대해약률을 곱한 값으로

해석된다. 실무에서 유지율에 절대해약률을 곱하여 사용하는 방식의 이론적 근거를 제시해 주고 있다. 또한 식 (4.16a), (4.16b) 및 (4.16c)에 필요한 월 기준 절대탈퇴율의 계산은 식 (3.3b)를 적용하면

$${}_{1/12}q'_{x+\frac{n}{12}}^{(1)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot q_x'^{(1)}}{1 - \frac{n}{12} \cdot q_x'^{(1)}}, \quad (4.17a)$$

$${}_{1/12}q'_{x+\frac{n}{12}}^{(2)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot q_x'^{(2)}}{1 - \frac{n}{12} \cdot q_x'^{(2)}}, \quad (4.17b)$$

$${}_{1/12}q'_{x+\frac{n}{12}}^{(3)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot q_x'^{(3)}}{1 - \frac{n}{12} \cdot q_x'^{(3)}} \quad (4.17c)$$

이 된다.

## 5. 변액연금에 응용

변액연금과 같은 최저보증 옵션이 내재되어 있는 보험상품은 적립금 수준과 보증금액과 비교하여 적립금이 클 경우 해약할 가능성이 크게 되는 특성이 있다. 전통적인 생명보험 상품의 해약율과 상이한 특성을 가지고 있다. 해약에 대한 절대탈퇴율을 UDD로 할 경우 사망에 대한 다중탈퇴율이 해약률의 변동에 영향을 받는 모순이 생길 수 있다. 이러한 점을 극복하기 위해서 해약에 대한 절대탈퇴율을 UDD 가정 대신에 해약현상을 연속형이 아닌 특정시점에 발생하는 이산형으로 가정하는 것이 사망에 대한 탈퇴율의 안정과 해약현상에 대한 현실을 반영할 수 있다.

먼저  $m = 2$ 인 다중탈퇴모형으로 탈퇴원인이 사망, 해약인 경우를 고려하자. 사망은 소수연령의 분포가 UDD가정이며 해약은 년  $M$ 번 발생하며 시점  $i/M$ 에 발생한다고 가정한다. 단,  $i = 1, 2, \dots, M$ . 아래의 절대탈퇴율 (1)은 사망을 (2)는 해약을 나타낸다. 즉 절대탈퇴율은

$${}_s q_x'^{(1)} = H_1(s) \cdot q_x'^{(1)}, \quad (5.1a)$$

$${}_s q_x'^{(2)} = H_2(s) \cdot q_x'^{(2)} \quad (5.1b)$$

인데 소수연령 분포가 각각 다음과 같다.

$$H_1(s) = s, \quad (5.2a)$$

$$H_2(s) = \sum_{i=1}^M \theta_i \cdot I\left(s \geq \frac{i}{M}\right). \quad (5.2b)$$

$H_2(s)$ 는 구간별로 상수(piecewise constant)이고 각 구간의 끝점인  $s = i/M$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ )에서  $\theta_i (> 0)$ 씩 순간적으로 증가하는 계단형 함수(Step Function)이다. 따라서  $n = 0, 1, \dots, M-1$ 일 때 식 (4.4)를 이용하면

$$H_1^{\frac{n}{M}}(u) = u, \quad (5.3a)$$

$$H_2^{\frac{n}{M}}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < 1, \\ 1, & u = 1 \end{cases} \quad (5.3b)$$

이고 식 (4.7)에  $m = 2$ 인 경우를 적용하면

$${}_1q_{x+n}^{(1)} = {}_1q_{x+n}^{\prime(1)} \left( 1 - {}_1q_{x+n}^{\prime(2)} \int_0^1 H_2^{n,1}(u) dH_1^{n,1}(u) \right), \quad (5.4a)$$

$${}_1q_{x+n}^{(2)} = {}_1q_{x+n}^{\prime(2)} \left( 1 - {}_1q_{x+n}^{\prime(1)} \int_0^1 H_1^{n,1}(u) dH_2^{n,1}(u) \right) \quad (5.4b)$$

으로 표현된다. 여기서 식 (5.4a)의 적분은 식 (5.3a)때문에 리만 적분이므로

$$\int_0^1 H_2^{n,1}(u) dH_1^{n,1}(u) = 0 \quad (5.5a)$$

으로 계산되고 식 (5.4b)의 적분은 식 (2.22)를 이용하면

$$\int_0^1 H_1^{n,1}(u) dH_2^{n,1}(u) = 1 \times 1 = 1 \quad (5.5b)$$

이 된다. 따라서 식 (5.5a)와 (5.5b)를 식 (5.4a)와 (5.4b)에 각각 대입하면 사망과 해약의 다중탈퇴율은

$${}_1q_{x+n}^{(1)} = {}_1q_{x+n}^{\prime(1)}, \quad (5.6a)$$

$${}_1q_{x+n}^{(2)} = {}_1q_{x+n}^{\prime(2)} \left( 1 - {}_1q_{x+n}^{\prime(1)} \right) \quad (5.6b)$$

처럼 간단한 형태로 유도된다.

이제 동적해약률(Dynamic Lapse Rate)에 대하여 설명하자. 서론에서 기술했듯이 변액연금의 적립금은 투자실적에 연동되어 있으므로 보험계약자는 펀드의 투자실적에 민감하여 보험계약의 해약 발생이 적립금과 최소보증액을 비교하여 해약률의 높고 낮음이 결정된다. 이러한 현상을 모형화하면 동적 절대해약률은 기본해약률과 해약조정계수(Dynamic Lapse Adjustment Factor)의 곱으로 표현하며 해약조정계수는 적립금과 최소보증액의 비에 대한 함수로 표현되어 적립금 수준에 민감하다. 동적해약률에 대한 모형은 다양하게 제시되어 있지만 대부분의 모형이 기본해약률과 최소보증액 및 적립금의 함수로 되어 있으므로 모형의 변경은 본 논문의 결과를 이용하여 변경이 용이하므로 본 논문에서는 American Academy of Actuaries (2005)에 있는 모형을 사용한다. 이를 식으로 표현하면 해약조정계수는

$$\lambda = \min \left[ U, \max \left\{ L, 1 - S \cdot \left( \frac{GV}{AV} - D \right) \right\} \right] \quad (5.7)$$

이며  $U$  = 해약조정계수의 상한,  $L$  = 해약조정계수의 하한,  $S$  = 조정계수의 민감도,  $GV$  = 최소보증금액,  $AV$  = 적립금, 및  $D$  = 경계값(Trigger Point)을 나타내며 식 (5.7)에서  $L \leq \lambda \leq U$ 가 성립함을 알 수 있다. 따라서 동적 절대해약률은

$${}_1q_{x+n}^{(2)} = \lambda \cdot {}_1q_{x+n}^{\prime(2)base} \quad (5.8)$$

로 표현된다.  ${}_1q_{x+n}^{\prime(2)base}$ 는 기본해약률 (base lapse rate)을 나타낸다. 그러므로 식 (5.8)을 식 (5.6a)와 (5.6b)에 대입하면 변액연금에서 사망과 해약의 다중탈퇴율은

$${}_1q_{x+n}^{(1)} = {}_1q_{x+n}^{\prime(1)} \quad (5.9a)$$

$${}_1q_{x+n}^{(2)} = \lambda \cdot {}_1q_{x+n}^{\prime(2)base} \left( 1 - {}_1q_{x+n}^{\prime(1)} \right) \quad (5.9b)$$

표 1: GV/AV의 수준별 동적 해약률

$\frac{GV}{AV}$	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
${}^1_M q_{x+n}^{(2)}$	0.003992	0.003992	0.003743	0.003493	0.003244	0.002994
$\frac{GV}{AV}$	1.35	1.4	1.45	1.5	1.55	1.6
${}^1_M q_{x+n}^{(2)}$	0.002745	0.002495	0.002246	0.001996	0.001996	0.001996

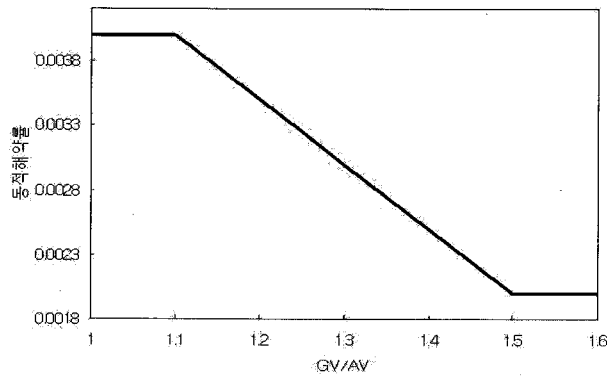


그림 1: GV/AV의 수준별 동적해약률

이 된다. 식 (5.9a)는 해약조정계수와 무관하다.  ${}^1_M q_{x+n}^{(2)}$ 는 동적해약률을 나타낸다. 주목할 점은 해약조정계수  $\lambda$ 의 모형을 다르게 설정하더라도 식 (5.9b)의 구조는 달라지지 않으므로 필요에 따라서는 해약조정계수의 모형의 변경이 가능하다.

마지막으로 변액연금의 다중탈퇴율에 대한 수치 예를 통하여 적용과정을 설명해 보자. 해약조정계수 공식의 입력값에 대한 가정을  $U = 1, L = 0.5, S = 1.25, D = 1.1$ 로 하자. 기본해약률  ${}^1_M q_{x+n}^{(2)} = 0.004$ , 절대사망률  ${}^1_M q_{x+n}^{(1)} = 0.002$ 로 가정하면 식 (5.9a)에 의하여  ${}^1_M q_{x+n}^{(1)} = 0.002$ 로 동일하며 GV/AV의 시나리오를 1.05, 1.1, ..., 1.6까지 12 가지 경우로 설정하여 식 (5.9b)에 대입하면 동적해약률은 표 1이 된다. 이를 그래프로 표현하면 그림 1로 나타낼 수 있다. 표 1 또는 그림 1을 참조하면 경계값  $D$ 가 1.1이므로 GV/AV가 1.1보다 작을 경우 동적해약률이 0.003992으로 일정하며 GV/AV가 1.1에서 1.5 사이에서 동적해약률이 감소하며 GV/AV가 1.5보다 클 경우 동적해약률이 0.001996로 일정하다. 즉 최소보증금액이 적립금 수준보다 1.05배에서 1.6배 사이에서는 동적해약률이 감소한다. 일정 범위에서 적립금이 감소하면 보험계약자가 계약을 유지하여 최소보증유선을 실현하려는 경향을 반영하고 있다.

## 6. 결론

본 논문에서 탈퇴원인별 상이한 소수연령 분포에서 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하였고 변액연금의 동적해약률을 고려한 탈퇴모형에 적용하여 보았다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)과 Lee (2008b)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있었다. 마지막으로 이 논문과 관련 있는 향후 연구 과제를 세 가지 제시해 본다. 첫 번째로 본 논문의 전환과정과 반대로 탈퇴



원인별로 소수연령 분포의 형태를 다르게 가정하여 다중탈퇴율에서 절대탈퇴율로 전환하는 관계식을 유도하는 문제에 대한 연구이다. 두 번째로 절대탈퇴율의 정의를 탈퇴력을 이용하지 않고 보다 일반적인 정의에 의하여 논의를 전개해 다중탈퇴모형의 구조를 확립하는 것도 의미가 있다. 세 번째로 자료를 이용하여 소수연령 분포함수의 추정에 대한 연구도 필요하다.

### 참고 문헌

- American Academy of Actuaries (2005). Life Capital Adequacy Subcommittee, June 2005.
- Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley.
- Bowers, N. L., Jones, D. A., Gerber, H. U., Nesbitt, C. J. and Hickman, J. C. (1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries.
- Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2000). A family of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 261–276.
- Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2002). A critique of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, 363–370.
- Lee, H. (2008a). Generalized conversion formulas between multiple decrement models and associated single decrement models, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **21**, 739–754.
- Lee, H. (2008b). Decrement models under fractional independence assumption, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **21**, 1045–1063.
- Shiu, E. S. W. (1987). Multiple-decrements by Riemann-Stieltjes integration, *Actuarial Research Clearing House*, **1**, 1–4.
- Willmot, G. E. (1997). Statistical independence and fractional age assumptions, *North American Actuarial Journal*, **1**, 84–99.

# Decrement Models with an Application to Variable Annuities under Fractional Age Distributions

Hangsuck Lee<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan Univ.

---

## Abstract

This paper derives conversion formulas from yearly-based absolute rates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause  $j$  under fractional age distributions. Next, it suggests conversion formulas from monthly-based absolute rates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause  $j$  under fractional age distributions. In addition, it applies the conversion formulas including a dynamic lapse rate model to variable annuities. Some numerical examples are discussed.

**Keywords:** Absolute rates of decrements, rates of decrement due to cause  $j$ , fractional age distributions, variable annuities, dynamic lapse rate.

---

---

<sup>1</sup> Assistant Professor, Department of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University, 53 Myungnyun-dong 3ga, Jongno-gu, Seoul 110-745, Korea. Email: hangsuck@skku.edu