

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.3.243

보조변수법과 복소변수를 연동한 설계 민감도 해석 연구

김 현 기[†] · 조 맹 효^{*}

(2008년 4월 30일 접수, 2009년 1월 27일 수정, 2009년 2월 12일 심사완료)

Adjoint Variable Method Combined with Complex Variable for Structural Design Sensitivity

Hyungi Kim and Maenghyo Cho

Key Words : Complex Variable Method(복소변수법), Adjoint Variable Method(보조변수법), Semi-Analytic Method(준해석적 방법), Design Sensitivity(설계민감도)

Abstract

The adjoint variable method can reduce computation time and save computer resources because it can selectively provide the sensitivity information for the positions that designers wish to measure. However, the adjoint variable method commonly employs exact analytical differentiation with respect to the design variables. It can be cumbersome to precisely differentiate every given type of finite element. This trouble can be overcome only if the numerical differentiation scheme can replace this exact manner of differentiation. But, the numerical differentiation scheme causes of severe inaccuracy due to the perturbation size dilemma. For assuring the accurate sensitivity without any dependency of perturbation size, this paper employs a complex variable that has been mainly used for computational fluid dynamics problems. The adjoint variable method combined with complex variables is applied to obtain the shape and size sensitivity for structural optimization. Numerical examples demonstrate that the proposed method can predict stable sensitivity results and that its accuracy is remarkably superior to traditional sensitivity evaluation methods.

1. 서 론

민감도 해석을 위해 지금까지 다양한 방법들이 제안되어 왔는데,^(1~7) 이 중에서 보조변수법은 설계변수와 무관한 보조변수가 미리 계산되어 저장되므로 설계변수가 구속조건 보다 많은 경우 직접미분에 비해 훨씬 유리하며, 설계변수가 증가할수록 계산시간의 효율성은 증가된다. 그러나, 보조변수법에서 미분은 주로 해석적인 방법을 사용하는 것이 일반적인데, 해석적 미분에 의한 민감도 수행은 상당히 번거로운 일이며 유한요소 형태마다 적용하는 것도 쉽지 않은 일이다. 만약 수치적 방법으로 정확한 미분이

가능하다면 효율적일 것이며, 계산시간 측면에서도 매우 유리하다고 할 수 있다. 그러나, 수치적인 미분을 수행하는 경우에는 민감도 계산결과가 증분값에 상당히 의존하게 되는 문제가 있다. 이 문제를 해결하기 위해 변위장 또는 벡터장에서 강제모드부를 분리하는 방법,^(8~11) iterative 방법과 수치미분을 연동한 보조변수법⁽¹²⁾ 등이 제안되어 왔으나, 증분값에 기인한 근본적인 문제를 해결하지 못하고 있다.

본 연구에서는 증분값에 따른 수치미분의 문제점을 개선하기 위해 복소변수법을 도입한다. 복소변수법은 주로 CFD 문제에서 폭넓게 사용되어 왔는데 간단한 전개에 의해 매우 정확하고 안정적인 민감도 결과를 제공할 수 있으며, 증분율에 의한 영향도 거의 없는 것으로 보고되어 왔다.

복소변수법과 관련하여 Lyness 등은 복소평면에서 n 차 미분의 근사 및 해석적 평가를 위해 복소변수를 채용하였다.^(13,14) Suqire와 Trapp 은 1 차 미분을 정확하게 계산하기 위해 복소변수를 채용하는 연구를

[†] 책임저자, 한국항공우주연구원

E-mail : shotgun1@kari.re.kr

^{*} 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1693, FAX : (02)886-1693

수행하였고,⁽¹⁵⁾ Martins 등은 복소변수법을 사용한 민감도 계산을 위해 Fortran/C++ code를 개발하였다.^(16,17) 또한, 복소변수법은 CFD 문제의 민감도와 공력구조의 다분야 통합 설계 최적화 등에 주로 사용되어 왔다.^(18,19) 이 방법은 비선형 유한요소 프로그램에도 도입되었으며, fast Fourier transform(FFT)를 사용하는 pseudo spectral simulation codes 로 확장되어 연구되어 왔다.^(20,21)

최근에는 정상상태의 이산화 민감도 해석에서 iterative 민감도 방정식을 푸는데 사용되고 있으며, 복소변수법의 간편함과 정확성 때문에 전산유체 역학 분야에서 n 차 이상의 미분을 위해 주로 사용되고 있다.

본 연구에서는 복소변수법의 정확성과 보조변수법의 효율성에 착안하여 두 방법을 연동시킨 구조민감도 계산기법을 제안한다(Adjoint variable method coupled with complex variable, ACVM). 이 방법은 유한요소 프로그램 구축이 간편하고, 민감도 계산에서 문제가 되어 왔던 증분값에 거의 영향을 받지 않아, 매우 안정적인 민감도 결과를 제공한다. 본문에서는 복소변수와 보조변수법에 대한 이론적인 소개와 민감도 계산을 위해 두 방법을 연동시킨 후 이산화 하는 과정을 제공한다. 결론에서는, 수치예제를 통해 기존 민감도 계산방법의 결과와 비교하여 제안방법의 신뢰성을 검증한다.

2. Traditional Displacement Sensitivity Analysis

정적 문제에서 선형 시스템의 지배방정식은 식 (1)로 표현된다.

$$[\mathbf{K}]_G \{\mathbf{u}\}_G = \{\mathbf{F}\}_G \quad (1)$$

여기서, $[\mathbf{K}]_G$ 은 강성행렬, $\{\mathbf{u}\}_G$ 은 전체 변위벡터, $\{\mathbf{F}\}_G$ 은 전체 하중벡터를 의미한다.

유한차분법에 의한 변위 민감도는 식 (2)와 같이 계산된다.

$$\frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} = \left(\frac{\{\mathbf{u}\}_G^{Perturbed} - \{\mathbf{u}\}_G^{Original}}{h} \right) \quad (2)$$

$\{\mathbf{u}\}_G^{Perturbed}$ 는 설계변수 증분량을 고려한 시스템의 변위량이고, $\{\mathbf{u}\}_G^{Original}$ 은 초기시스템의 변위량이다. i 는 설계변수 번호, h 는 설계변수 증분량을 의미한다.

유한차분법은 매우 간편하지만, 전체시스템을 각 설계변수 마다 2번씩 계산해야 하므로 전산자원과 계산비용 측면에서 비효율적으로 평가된다. 이런 이유로 준해석적 방법이 민감도

해석을 위해 많이 사용되어 왔는데, 이와 관련한 전개식은 식 (3)과 식 (4)에 주어져 있다.

식 (1)을 설계변수 v_i 로 미분하면 식 (3)과 같이 전개된다.

$$\frac{d[\mathbf{K}]_G}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_G + [\mathbf{K}]_G \frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} = \frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} \quad (3)$$

식 (3)으로부터 기존의 준해석적 방법은 다음과 같이 전개된다.

$$[\mathbf{K}]_G \frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} = \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \quad (4)$$

식 (4)의 우항은 가상하중벡터 라고 하며, 요소강성행렬 미분, $d[\mathbf{K}]_e / dv_i$, 은 요소 단위에서 계산된 후 더해지게 된다.

식 (4)의 준해석적 방법은 강제모드가 큰 경우에 증분값에 따라 신뢰할 수 없는 결과를 제공하게 되는데, 이와 관련된 오차는 $d[\mathbf{K}]_e / dv_i$ 를 차분으로 계산할 때 대부분 발생하게 된다. 따라서 여기서 발생하는 오차를 줄여야 하는 필요성이 요구되었다. 이와 관련한 개선방법이 변위장을 순수변형부와 강제모드부로 분리한 후, 순수변형부는 수치적인 방법으로 계산하고 강제모드부를 해석적으로 계산하는 방법이다. 구체적인 계산 방법은 식 (5)와 식 (6)에 주어져 있다.

식 (5)는 변위장을 순수변형부와 강제모드부로 분리한 형태이며, 식 (5)를 식 (4)의 가상하중벡터 내 변위장에 대입하면 식 (6)으로 주어진다. 그러나, 이 방법은 강제모드가 크지 않은 문제에서는 큰 효과가 없다는 단점이 있으며, 이와 관련한 해석 결과는 참고문헌 [11]에 잘 나와 있다.

$$\{\mathbf{u}\}_e = \{\mathbf{u}\}_e|_\varepsilon + \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\{\mathbf{u}\}_e \cdot \{\mathbf{r}_k\}}{\{\mathbf{r}_k\} \cdot \{\mathbf{r}_k\}} \{\mathbf{r}_k\} \quad (5)$$

$$\{\mathbf{Q}\}_G = \frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j|_\varepsilon + \sum_{j=1}^n [\mathbf{K}]_e^j \sum_{k=1}^{r_n} \left(\alpha^k \frac{d\{\mathbf{r}_k\}}{dv_i} \right) + \{\mathbf{Q}\}_{Rigid} \quad (6)$$

여기서, 하첨자 ε 은 순수변형부, r_n 은 강제모드 번호, $\{\mathbf{Q}\}_G$ 는 가상하중벡터이다. α^k , $\{\mathbf{Q}\}_{Rigid}$ 는 아래와 같다.

$$\alpha^k = \frac{\{\mathbf{u}\}_e \cdot \{\mathbf{r}_k\}}{\{\mathbf{r}_k\} \cdot \{\mathbf{r}_k\}} \quad (\{\mathbf{r}_k\} \text{는 강제모드, } k: \text{강제모드 번호})$$

$$\{\mathbf{Q}\}_{Rigid} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_n} \left(\frac{\{\mathbf{r}_k\}^T \left(d[\mathbf{K}]_e^j / dv_i \right) \{\mathbf{u}\}_e^j}{\{\mathbf{r}_k\}^T \{\mathbf{r}_k\}} \{\mathbf{r}_k\} \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_n} \left(\frac{\left(d\{\mathbf{r}_k\} / dv_i \right)^T [\mathbf{K}]_e^j \{\mathbf{u}\}_e^j}{\{\mathbf{r}_k\}^T \{\mathbf{r}_k\}} \{\mathbf{r}_k\} \right)$$

3. Adjoint Variable Method

3.1 Traditional Adjoint Variable Method

목적함수 Φ 의 설계변수 v_i 에 대한 미분은 식 (7)로 주어진다.

$$\frac{d\Phi}{dv_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial v_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial\{\mathbf{u}\}} \frac{\partial\{\mathbf{u}\}}{\partial v_i} \quad (7)$$

여기서, $\{\mathbf{u}\}$ 는 변위장, v_i 는 설계변수를 의미하며, 목적함수 Φ 는 변위장 $\{\mathbf{u}\}$ 과 설계변수 v_i 의 함수이다.

일반적으로 보조변수법에서 보조변수 λ 는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$[\mathbf{K}(v)]\lambda = \frac{\partial\Phi^T}{\partial\{\mathbf{u}\}} \quad (8)$$

식 (1)의 정적 방정식에서, 설계변수 v_i 에 의한 변위 민감도 식은 식 (4)에 주어져 있다. 식 (4)를 식 (7)의 목적함수 민감도에 대입하면 식 (9)로 표현된다.

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\partial\Phi}{\partial\{\mathbf{u}\}} [\mathbf{K}]_G^{-1} \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)의 보조변수 정의를 사용하여 다시 표현하면 식 (10)으로 표현될 수 있다.

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \lambda^T \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \quad (10)$$

식 (10)에서 강성행렬의 미분은 수치적인 방법을 사용할 수 있으며, 본 연구에서는 복소변수법을 도입하여 미분을 수행한다.

3.2 Combining with Complex Variable Method

3.2.1 Review of complex variable method

유한차분법 또는 준해석적 방법과 비교해서 복소변수법에 의한 미분은 증분율의 변화가 민감도 결과에 미치는 영향이 거의 없다. 식

(11)은 임의의 x_0 에서 차분법에 의한 함수의 미분식을 보여주고 있다. 이 경우에는 설계변수의 증분량 h 에 따라 절단오차(truncation error)와 반올림 오차(round-off error)가 발생하므로 민감도 결과가 크게 달라질 수 있다.

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial b_i} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (11)$$

$$= f^{(1)}(x_0) + h \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} + h^2 \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + \dots$$

설계변수 증분량 h 대신 복소 설계변수인 ih 를 사용하면 subtractive cancellation 오차를 제거함으로써 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있다. 식 (12)는 복소변수 ih 에 의한 급수전개식을 보여주고 있다.

$$f(x+ih)$$

$$= f(x) + ihf^{(1)}(x) - h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2!} - ih^3 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \dots \quad (12)$$

식 (12)에서 양변에 허수부를 취한 후 증분량 h 로 나누면 식 (13)과 같이 함수 $f(x)$ 에 대한 미분식을 얻을 수 있다. 구체적인 수학적 논의와 전통적인 민감도 방법과의 비교는 참고문헌 [16,17]에 자세히 나와 있다.

$$f^{(1)}(x) = \frac{\text{Im}[f(x+ih)]}{h} + h^2 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} - h^4 \frac{f^{(5)}(x)}{5!} \dots \quad (13)$$

3.2.2 Adjoint variable method using complex variable

보조변수법은 구속조건보다 설계변수가 더 많은 최적화 문제에 적합한 방법이다. 특히, 다중하중 조건에서는 보조변수법이 보다 효율적인 방법이므로 민감도 계산에서 폭넓게 사용되어 왔다. 그러나, 보조변수법에서 해석적인 미분에 의한 민감도 수행은 상당히 번거로운 일이며 유한요소 형태에 따라 해석적 미분을 수행하는 것은 쉽지 않은 일이다. 만약 수치적인 방법으로 정확한 미분이 가능하다면 매우 효율적인 방법일 것이며, 계산시간 측면에서도 매우 유리하다고 할 수 있다.

3.2.2.1 Derivatives of the Local Stiffness by complex variable

Mindlin 요소에서 복소변수를 사용한 요소단위 강성행렬의 미분이 식 (14)에 주어져 있다. v_i 는 설계변수를 의미한다.

$$\frac{d[\mathbf{K}]_e}{dv_i} = \underbrace{\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i][\mathbf{B}_i] J ds dt\right)}{dv_i}}_{(a)} + \underbrace{\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B][\mathbf{B}_B] J ds dt\right)}{dv_i}}_{(b)} + \underbrace{\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S][\mathbf{B}_S] J ds dt\right)}{dv_i}}_{(c)} \quad (14)$$

식 (14.a)는 in-plane part 에 대한 미분으로, 식 (15)에 자세한 전개식을 나타내었다.

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i][\mathbf{B}_i] J ds dt\right)}{dv_i} \\ &= 2 \int_A \frac{d[\mathbf{B}_i]^T}{dv_i} [\mathbf{D}_i][\mathbf{B}_i] J ds dt + \int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i][\mathbf{B}_i] \frac{dJ}{dv_i} ds dt \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서 $d[\mathbf{B}_i]/dv_i$, dJ/dv_i 는 설계변수 증분량 h 와 3.2.1 절의 이론을 토대로 식 (16)과 같이 구해진다. 복소변수 $x+ih$ 에 의해 계산된 $[\mathbf{B}_i]$ 의 허수부를 증분량 h 로 나누어 $d[\mathbf{B}_i]/dv_i$ 가 구해지고, 자코비언의 미분 dJ/dv_i 도 동일한 방법으로 구해진다.

$$\begin{aligned} d[\mathbf{B}_i]/dv_i &= \text{Imag}([\mathbf{B}_i(x+ih)]) / h \\ dJ/dv_i &= \text{Imag}[J(x+ih)] / h \end{aligned} \quad (16)$$

식 (14.b)와 (14.c)의 bending part 와 shear part 도 동일한 방법으로 복소변수를 도입하여 미분식을 계산하며, 이와 관련식은 식 (17)과 식 (18)에 나타내었다.

$$\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B][\mathbf{B}_B] J ds dt\right)}{dv_i} \quad (17)$$

$$= 2 \int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] \frac{d[\mathbf{B}_B]}{dv_i} J ds dt + \int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B][\mathbf{B}_B] \frac{dJ}{dv_i} ds dt$$

$$\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S][\mathbf{B}_S] J ds dt\right)}{dv_i} \quad (18)$$

$$= 2 \int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S] \frac{d[\mathbf{B}_S]}{dv_i} J ds dt + \int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S][\mathbf{B}_S] \frac{dJ}{dv_i} ds dt$$

3.2.2.2 Derivatives of Transformation Relation

요소단위 강성행렬에 대한 Fixed 좌표축과 Local 좌표축 사이의 관계는 식 (19)로 주어진다.

$$[\mathbf{K}]_e^F = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}]_e^L [\mathbf{T}] \quad (19)$$

여기서, $[\mathbf{T}]$ 변환행렬, 'F'와 'L'는 각각 Fixed

좌표축과 Local 좌표축을 의미한다. 식 (19)의 설계변수 v_i 에 대한 미분은 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{K}]_e^F}{\partial v_i} &= \frac{\partial [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}]_e^L [\mathbf{T}]}{\partial v_i} \\ &= [\mathbf{T}] \frac{\partial [\mathbf{K}]_e^L}{\partial v_i} [\mathbf{T}] + \frac{\partial [\mathbf{T}]^T}{\partial v_i} [\mathbf{K}]_e^L [\mathbf{T}] + [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]_e^L \frac{\partial [\mathbf{T}]}{\partial v_i} \end{aligned} \quad (20)$$

다음의 예제는 복소변수를 사용하여 변환행렬의 미분을 수행하는 방법을 보여주고 있다. Fig. 1(a)는 초기 local 요소에서의 parametric 좌표계를 나타내고 있으며, Fig. 1(b)는 절점 2 와 3 의 z 축 방향으로 h 만큼 증분시킨 요소에서의 local 좌표축을 나타내고 있다.

Fig. 1(a)의 초기 normal 벡터는 $\hat{N}_z = \langle -1, 0, 1 \rangle / \sqrt{2}$ 와 같다. 절점 2 와 3 에서 증분량 h 를 고려하면 x_L 과 y_L 방향 벡터는 각각 $\hat{N}_x = \langle 1, 0, 1+0.5hi \rangle$, $\hat{N}_y = \langle 0, 1, 0 \rangle$ 으로 구해지고, normal 벡터 z_L 은 \hat{N}_x 와 \hat{N}_y 의 외적을 통해 $\hat{N}_z = \langle -1-0.5hi, 0, 1 \rangle$ 으로 구해진다. 각 방향 벡터에 대해 normalizing을 수행하면, normalized 벡터 N_x, N_y, N_z 는 식 (21)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} N_x &= \langle 1, 0, 1+0.5hi \rangle / \sqrt{1^2 + (1+0.5hi)^2} \\ N_y &= \langle 1, 0, 1 \rangle / \sqrt{1^2 + 1^2} \\ N_z &= \langle -1-0.5hi, 0, 1 \rangle / \sqrt{1^2 + (1+0.5hi)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

따라서, $\partial[\mathbf{T}]/\partial v_i$ 는 식 (21)에서 허수부를 분리한 후 증분량 h 로 나누어 계산한다. 이와 관련된 계산은 식 (22)에 주어져 있다.

$$\frac{\partial [\mathbf{T}]}{\partial v_i} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \text{Imag}(N_x) \\ \text{Imag}(N_y) \\ \text{Imag}(N_z) \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서, 'Imag'은 성분의 허수부를 의미한다.

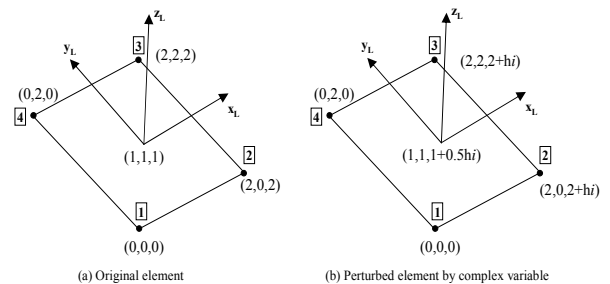


Fig. 1 Transformation relation between global and local coordinates by using complex variable

Table 1 Comparison of displacement sensitivities in the cantilever beam ($\times 10^{-3}$)

log pert	GDM	TSAM	ACVM
-1	2.463	2.829	2.205
-2	2.256	1.683	2.234
-3	2.236	2.179	2.234
-4	2.234	2.229	2.234
-5	2.234	2.234	2.234
-6	2.234	2.234	2.234
-7	2.234	2.234	2.234
-8	2.236	2.236	2.234
-9	2.247	2.249	2.234
-10	2.431	2.400	2.234
-11	3.413	2.732	2.234
-12	11.30	17.49	2.234
-13	255.3	195.9	2.234
-14	429.2	745.0	2.234
-15	158.3	597.3	2.234

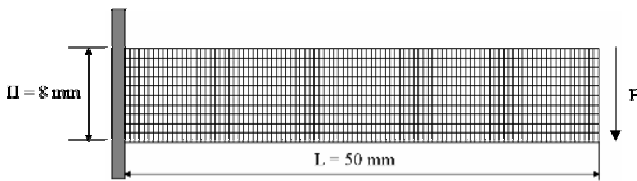


Fig. 2 Configuration of clamped beam and transverse force ($F = 1\text{N/mm}$, $E = 2.1 \times 10^5\text{N}$, $\nu = 0.3$)

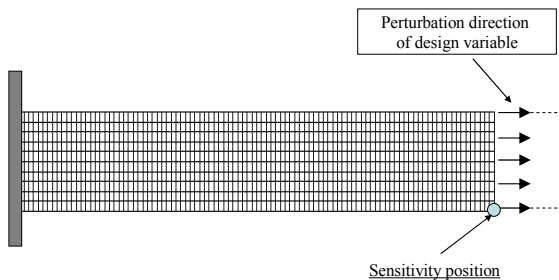


Fig. 3 Sensitivity position and the design direction by perturbation of design variable

4. Numerical Examples

4.1 Cantilever Beam Problem

Fig. 2 는 끝단에 전단력이 가해지는 cantilever 빔의 형상을 보여준다. 해석을 위한 물성치와 하중조건은 Fig. 2 에 주어졌다. Fig. 3 에 나타낸 바와 같이 설계변수는 길이방향으로 설정하였고, 설계변수에 대한 변위 민감도는 빔 끝단에서 계산하였다. Cantilever 빔 끝단에서의 변위 민감도는 해석적으로 계산될 수 있는데, 이를 식 (23)에 나타내었다.

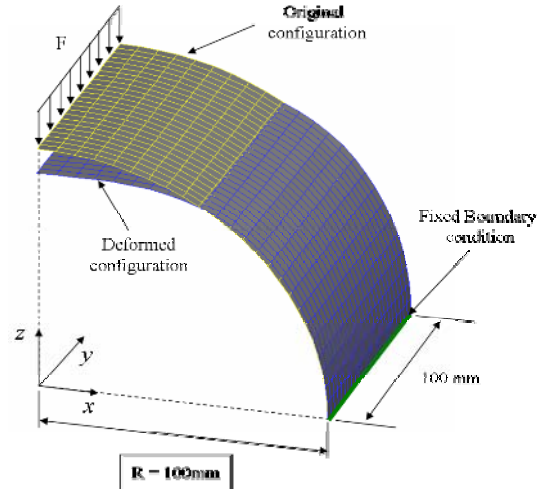


Fig. 4 Original and deformed configuration of cylindrical panel under transverse loading ($F = 1\text{N/mm}$, $E = 3.0 \times 10^5\text{N}$, $\nu = 0.3$, $t = 0.6\text{mm}$)

$$\frac{d\{\mathbf{u}\}_y}{dx} \Big|_{x=\text{tip}}^{\text{exact}} = 12 \frac{FL^2}{EH^3} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 50^2}{2.1 \times 10^5 \times 8^3} = 2.232 \times 10^{-3} \quad (23)$$

민감도 결과는 Table 1 에 주어졌다. 준해석적 방법(Traditional Semi-Analytic Method, TSAM)과 유한차분법(Global Difference Method, GDM)은 각 증분값에서 안정적인 수렴결과를 보이지 않고 있다. 두 방법 모두 안정적인 수렴 결과를 보이는 증분 영역은 $10^{-5} : 10^{-8}$ 으로 파악되었으며, 이외의 범위에서는 민감도 결과가 상당히 불규칙하게 나타나고 있다. 특히, 증분을 범위가 10^{-9} 보다 작아지게 되면 민감도 결과의 발산이 확연하게 나타나고 있다. 반면, ACVM은 증분값과 무관하게 GDM과 TSAM의 수렴성이 상당히 떨어졌던 증분을 $10^{-1} \sim 10^{-2}$, 10^{-9} 이하의 범위에서도 정확한 민감도 결과를 제공하고 있으며 그 수렴경향도 매우 안정적임을 파악할 수 있다.

4.2 Cylindrical panel – shape optimization

Fig. 4 는 분포하중이 가해지고 있는 실린더 패널 문제이다. 설계변수는 반경 R 이며, 설계 민감도 du/dR 는 position 1 과 position 2 에서 계산되었다.

Position 1 과 2 에서의 민감도 결과는 Fig. 6(a)와 (b)에 각각 주어졌다. 결과에서, GDM과 TSAM에 의한 민감도는 증분값에 의해 큰 영향을 받고 있음을 확인할 수 있다. 특히, TSAM은 $10^{-6} \sim 10^{-7}$ 정도의 범위에서만 수렴값을 보이고 있으며, GDM은 10^{-7} 미만의 증분범위에서 확연한 발산 경향을 보이고 있다. 반면, ACVM은 증분값에 영향을 받지 않고, 매우 안정적인 수렴 결과를

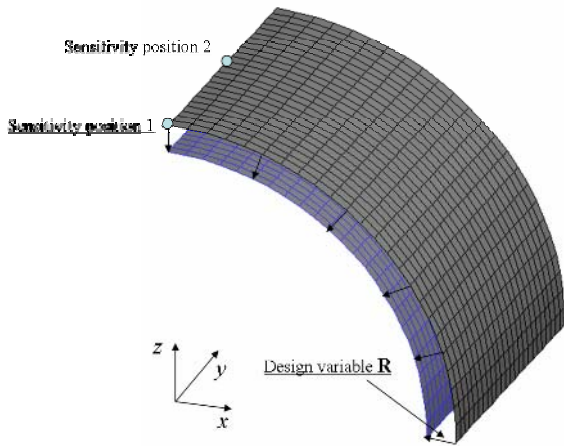
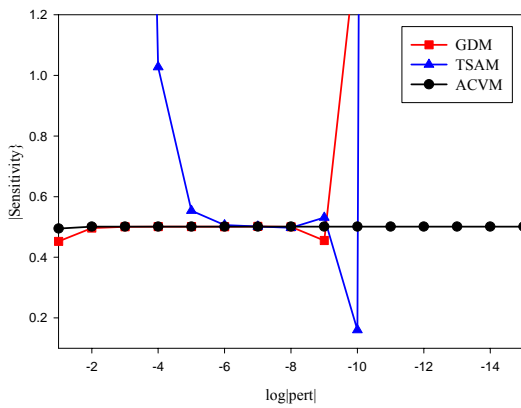
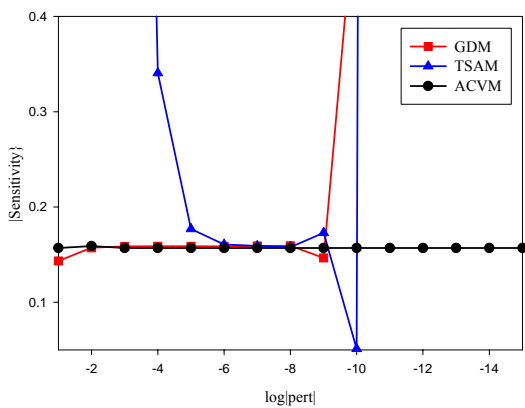


Fig. 5 Configuration of cylindrical panel by the perturbation of the design variable R and positions for displacement sensitivity



(a) Sensitivity results of the position 1



(b) Sensitivity results at the position 2

Fig. 6 Comparison of the sensitivity results in GDM, TSAM and ACVM in a quarter cylindrical panel

제공하고 있음을 알 수 있다.

4.3 Strip in Tension Problem

Fig. 7 은 strip 의 끝단에서 인장력이 작용하는 문

Table 2 Comparison of displacement sensitivities in the strip bar($\times 10^{-5}$)

log pert	GDM	TSAM	ACVM
-1	-0.4550	-0.5056	-0.4550
-2	-0.4550	-0.4596	-0.4550
-3	-0.4550	-0.4555	-0.4550
-4	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-5	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-6	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-7	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-8	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-9	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-10	-0.4547	-0.4550	-0.4550
-11	-0.4540	-0.4558	-0.4550
-12	-0.3976	-0.4220	-0.4550
-13	-0.2158	-0.3111	-0.4550
-14	2.0925	-2.7253	-0.4550
-15	24.2319	-1.0484	-0.4550

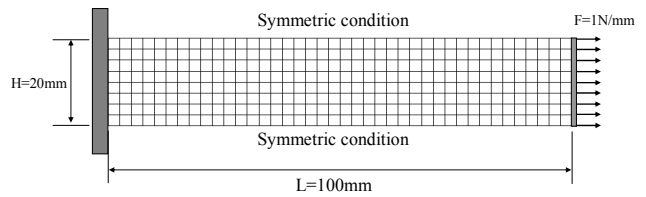


Fig. 7 Configuration of the strip bar under tension

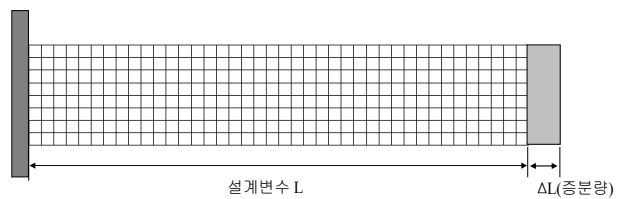


Fig. 8 Design variable of the strip bar

제이다. 해석에 사용된 물성치와 끝단에서의 u 방향으로의 엄밀해는 식 (24)와 같으며, 민감도 계산을 위한 설계변수는 Fig. 8 에 나타내었다.

$$\left. \frac{du_{x,exact}}{dL} \right|_{x=L} = \frac{F(1-\nu^2)}{Et} = 4.55 \times 10^{-6}$$

$$F = 1N/mm, L = 100mm, t = 1mm \quad (24)$$

$$E = 2 \times 10^5 N/mm, \nu = 0.3, H = 20mm$$

Table 2 에서 인장력이 작용하는 문제에서는 GDM 과 TSAM 을 사용한 해석 방법이 앞의 수치 예제와 달리 증분값이 큰 경우에도 비교적 좋은 결과를 제공하고 있으며, 10^{-11} 의 작은 증분값에서

도 좋은 수렴결과를 보여주고 있다.

그러나, ACVM 은 전체 증분범위에서 매우 안정적인 민감도 결과를 제공하고 있으며, 이는 ACVM 이 문제 형태와는 무관하게 매우 강건한 방법임을 보여주는 결과라 할 수 있다. 2 장에서 설명하였던 강제모드 분리방법은 인장력이 주로 작용하는 문제에서는 증분율의 개선효과가 크지 않다. 이것은 강제모드의 영향이 크지 않기 때문이며, 이와 관련한 결과는 참고문헌 [11]에 잘 나와 있다.

5. 결론

기존의 수치미분은 증분값에 따라 민감도 결과가 불규칙하기 때문에 안정적인 수렴결과를 보장하지 못하였으며, 문제 형태에 따라 민감도 계산 성능이 일정하지 않은 문제점이 있었다. 그러나, 보조변수법은 증분율에 거의 영향을 받지 않기 때문에 매우 안정적인 민감도 수렴결과를 제공할 수 있으며, 보조변수법은 설계변수가 증가하게 되면 기존의 직접미분 방법보다 효율적인 방법이다. 이를 기초로 본 연구에서는 복소변수와 연동하여 강성행렬 미분을 수행함으로써 해석적인 미분 방법보다 민감도 결과를 얻기가 간편하면서 그 결과도 매우 정확한 개선된 보조변수 기법을 제안하였으며, 수치예제를 통해 해석적인 해가 존재하는 기존의 민감도 계산방법과 그 결과를 비교하여 제안방법의 신뢰성을 검증하였다.

본 연구는 증분값에 따른 절단 및 반올림 오차 분석을 통해 민감도 해석에서 발생하는 오차에 대한 수치적 분석을 수행하는 연구로 확장할 계획이며, 제안한 민감도 해석방법에 대해서는 실제적인 구조물의 구조최적화에 적용할 수 있는 프로그램으로 구축해 나갈 예정이다.

참고문헌

(1) Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S., 1973, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming. In Optimum Structural Design, Gallagher RH, Zienkiewicz OC (eds). Wiley: New York, pp. 109~127.

(2) Barthelemy, B., Chen C.T. and Haftka, R.T., 1986, Sensitivity Approximation of the Static Structural Response. In First World Congress on Computational Mechanics, Austin, TX, Sept.

(3) Pederson, P., Cheng, G. and Rasmussen, J., 1989, On Accuracy Problems of Semi-Analytical Sensitivity Analysis. *Mechanics of Structures and Machines*, Vol.17, No.3, pp. 373~384.

(4) Cheng, G. and Liu, Y., 1987, A New Sensitivity Scheme for Sensitivity Analysis. *Engineering Optimization*, Vol.12, pp. 219~234.

(5) Cheng, G., Gu, Y. and Zhou, Y., 1989, Accuracy of Semi-Analytical Sensitivity Analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 6, pp. 113~128.

(6) Olhoff N. and Rasmussen, J., 1991, Study of Inaccuracy in Semi-Analytical Analysis-a Model Problem. *Structural Optimization*, Vol. 3, pp. 203~213.

(7) Barthelemy, B., Chon, C.T. and Haftka, R.T., 1988, Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.4, pp. 249~265.

(8) Van Keulen, F. and De Boer, H., 1998, Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.42, pp. 71~91.

(9) De Boer, H. and Van Keulen, F., 2000, Refined Semi-Analytical Design Sensitivities. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, pp.6961~6980.

(10) Parente, E. Jr. and Vaz, L.E., 2001, Improvement of semi Analytical Design Sensitivities of Non-Linear Structures Using Equilibrium Relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.50, pp. 2127~2142.

(11) Cho, M. and Kim, H., 2005, A Refined Semi-Analytic Design Sensitivity Based on Mode Decomposition and Neumann Series. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.62, pp.19~49.

(12) Cho, M. and Kim, H., 2006, Improved Semi-Analytic Sensitivity Analysis Combined with Iterative Scheme in the Framework of Adjoint Variable Method, *Computers and Structures*, Vol.84, Issue 29-30, pp.1827~1840.

(13) Lyness, J.N. and Moler, C.B., 1967, Numerical Differentiation of Analytic Functions, *SIAM, J. Numer. Anal.*, Vol.4: pp.202~210.

(14) Lyness, J.N., 1967, Numerical Algorithms Based on the Theory of Complex Variables, Proc. ACM 22nd Nat. Conf. Thompson Book Co. Washington DC, pp.124~134.

(15) Squire, W. and Trapp, G., 1998, Using complex variables to Estimate Derivatives of Real Functions, *SIAM Rev.* Vol.40, No.1, pp.110~112.

(16) Martins, J.R.R.A., Kroo, I.M. and Alonso, J.J., 2000, An Automated Method for Sensitivity Analysis Using Complex Variables, *AIAA Paper* 2000-0689.

(17) Martins, J.R.R.A., Sturdza, P. and Alonso, J.J., 2001, The Connection Between the Complex-step Derivative Approximation and Algorithmic Differentiation, *AIAA Paper* 2001-0921.

(18) Anderson, W.K., Newman, J.C., Whitfield, D.L. and Nielsen, E.J., 1999, Sensitivity Analysis for the Navier-stokes Equation on Unstructured Meshes Using Complex Variables, *AIAA Paper* No. 99-3294, Proceedings of the 17th Applied Aerodynamics Conference,

(19) Newman, J.C., Anderson, W.K. and Whitfield, D.L., 1998, Multidisciplinary Sensitivity Derivatives Using

Complex Variables, MSSU-COE-ERC-98-08,
(20) Cervino, L.I. and Bewley, T.R., 2003, On the extension of the Complex-Step Derivative Technique to Pseudospectral Algorithms, *Journal of Computational Physics*, Vol.187, pp.544~549.

(21) Burg, C.O.E. and Newman J.C., III, 2003, Computationally Efficient, Numerically Exact Design Space Derivatives via the Complex Taylor's Series Expansion Method, *Computers and Fluids*, Vol.32, pp.373~383.