

회전운동의 매개화를 이용한 로터 시스템 해석

Analysis of Rotor Systems by Using Rotation Parametrizations

✉ 윤성호¹✉ Seong-Ho Yun¹

1 금오공과대학교 기계공학부 (Department of Mechanical Engineering, Kumoh National Institute of Technology)

✉ Corresponding author: shyun@kumoh.ac.kr, Tel: 054-478-7324

Manuscript received: 2008.4.21 / Revised: 2008.11.7 / Accepted: 2008.11.10

This paper deals with the comparisons of methodologies to express finite rotations accounting for analysis of the rotor system. Researches have been made to predict a behavior of its rotational motion by introducing Euler angles which turned out to be lack in consistency and exactness of the analysis. To overcome this deficiency a new methodology is applied by using both spherical coordinate and quaternion in the rotor rotation and shows its superiority over choices of the Euler angle in terms of kinetic energy and rotation velocity. It is found through numerical examples that quaternion is a more useful and valid tool to derive the ideal numerical model of the rotor system.

Key Words: Rotor System (로터시스템), Quaternion (4 원법), Euler Angle (오일러 각), Rotation Velocity (회전속도)

1. 서론

회전기계들은 발전기, 선박 및 차량의 추진계통, 자동화 기계, 공작기계, 의공학기 등 공학적으로 다양하게 사용되고 있다. 디스크와 로터가 회전할 때 유연축(flexible shaft)이 휘어지거나 질량의 불균형분포, 베어링의 불충분한 지지로 인하여 회전이 정속하지 못할 경우가 많다. 이러한 임계회령속도(critical whirling speed)를 알아내기 위해서는 회전축의 진동모드해석이 필수적이다. 또한 이와 관련된 정확한 동적인 모델은 진동현상을 이해하고, 그 원인을 규명하는데 있어 필수적으로 마련되어야 할 도구이다.

초기의 연구는 균일한 로터축을 사용하여 회전 관성과 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)를 무시하였다.^{1,3} 이후에 사다리꼴 축을 이용하여 축의 전단변형을 고려하였고 고차원의 유한요소를 사용하여 해석하였다.^{4,5} 문제를 정의한 후에는 연구자들이 방대한 절점의 데이터를 효과적으로 줄여 저주

파수에 염두에 두고 차수가 낮은 질량행렬과 강성행렬로 모달변환(modal transformation)을 시도해 왔다.^{6,8} 선형의 유한요소모델이 회전체 시스템을 제어하기 위하여 사용되었을 뿐 아니라 유체에 의한 복잡한 회전체의 진동현상을 파악하고자 사용되었다.^{9,10} 그러나 선형연구자들은 운동방정식을 유도하기 위하여 운동에너지를 산정할 때, 회전에 의한 에너지는 회전좌표계에서 관측한 각속도를 구하기 위하여 오일러 각(Euler angle)을 사용하였다.¹¹ 또한, 연구자마다 유한회전(finite rotation)의 순서를 달리하여 주로 관성좌표계(inertial frame or fixed frame)에서 오직 선형인 운동방정식을 유도하였다.

본 논문은 로터 시스템을 구성하는 디스크, 회전축, 베어링의 운동방정식을 모두 통합하는 과정에서 기존 연구자들이 채택한 디스크 회전운동의 일관성 없는 유한회전인 오일러 각(Euler angle)의 단점을 지적하고 이를 극복하기 위하여 회전운동을 매개화할 수 있는 4 원법(quaternion)을 적용한

후, 수치해석을 통하여 기존 방법과 비교하여 그 우수성을 보일 것이다

2. 회전운동 매개화

2.1 오일러 각의 유한회전

그림 1 과 같이 $B(X, Y, Z)$ 는 시스템의 관성좌표계이고 $b(x, y, z)$ 는 회전하는 디스크에 부착된 좌표계이다. 좌표축 X 와 x 는 로터의 회전 전후 로터의 중심선과 일치하며, 좌표계 B 또는 b 에서 좌표축 X 또는 x 에 대하여 휘링속도(whirling speed) Ω 로 회전한다. 속도에 관한 회전텐서를 구하는데 있어 오일러 각(Euler angle)을 사용할 때, 먼저 각도 ϕ 만큼 X 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b_1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 만큼 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b_2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ϕ 만큼 z_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 이를 1-2-3 회전이라고 부른다. 회전텐서 R 은 좌표계가 순차적으로 $B \rightarrow b^1 \rightarrow b^2 \rightarrow b$ 로 변환되는 과정에서 식 (1) 과 같이 표현된다.

$$R = R^{[B]} R^{[b^1]} R^{[b^2]} = R_\phi R_\theta R_\phi \quad (1a)$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (1b)$$

여기서 c 와 s 는 각각 정현(sine)과 여현(cosine) 함수를 나타낸다. 회전하는 이동좌표계(moving coordinate)에서 각속도 ω^* 에 관한 사교 대칭행렬(skew-symmetric matrix)에 식 (1a)를 적용하면 식 (2)와 같이 표현할 수 있다. 앞으로 $(\cdot)^*$ 는 이동좌표계에서 측정된 물리량을 표시하고 윗 첨자가 없으면 관성좌표계에서 관찰한 물리량을 표시하도록 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^* &= (R_\phi R_\theta R_\phi)^T (\dot{R}_\phi R_\theta R_\phi + R_\phi \dot{R}_\theta R_\phi + R_\phi R_\theta \dot{R}_\phi) \\ &= (R_\theta R_\phi)^T R_\phi^T \dot{R}_\phi (R_\theta R_\phi) + R_\phi^T (R_\theta^T \dot{R}_\theta) R_\phi + R_\phi^T \dot{R}_\phi \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\phi} \tilde{X}$, $R_\theta^T \dot{R}_\theta = \dot{\theta} \tilde{Y}_1$, $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\phi} \tilde{Z}_2$ 을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega^* = (R_\theta R_\phi)^T \dot{\phi} X^{[B]} + R_\phi^T \dot{\theta} Y_1^{[b^1]} + \dot{\phi} Z_2^{[b^2]} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X^{[B]T} &= [1 \ 0 \ 0], \quad Y_1^{[b^1]T} = [0 \ 1 \ 0], \\ Z_2^{[b^2]T} &= [0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \quad (4a,b,c)$$

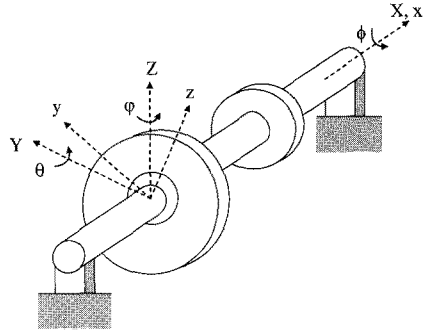


Fig. 1 Definitions of the inertial frame and rotating frame

각속도를 원소로 갖는 $\tilde{\omega}^*$ 와 $\tilde{\omega}$ 의 행렬은 2 차 텐서를 만족하므로 벡터 ω^* 와 ω 는 1 차 텐서로서 다음 식 (5)가 성립한다.

$$\tilde{\omega}^* = R^T \tilde{\omega} R \Leftrightarrow \omega^* = R^T \omega \quad (5)$$

식 (3)과 식 (5)를 이용하면 각속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi c\theta & c\phi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분이다. $\dot{\phi}$ 는 로터의 일정한 속도 Ω 이며, 이 때 비틀림 또는 축 방향 변형은 무시할 것이다.

한편, 고정된 관성좌표계(inertial coordinate)에서 각속도 ω 에 관한 사교대칭행렬 $\tilde{\omega} = \dot{R}^{[B]} R^{[B]T}$ 에 식 (5)를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= (\dot{R}_\phi R_\theta R_\phi + R_\phi \dot{R}_\theta R_\phi + R_\phi R_\theta \dot{R}_\phi) (R_\phi R_\theta R_\phi)^T \\ &= R_\phi^T \dot{R}_\phi + R_\phi^T (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_\phi^T + (R_\phi R_\theta) \dot{R}_\phi R_\phi^T (R_\phi R_\theta)^T \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\dot{R}_\phi R_\phi^T = \dot{\phi} \tilde{X}$, $\dot{R}_\theta R_\theta^T = \dot{\theta} \tilde{Y}$, $\dot{R}_\phi R_\phi^T = \dot{\phi} \tilde{Z}$ 를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega = \dot{\phi} X^{[B]} + R_\phi^T \dot{\theta} Y^{[B]} + (R_\phi R_\theta) \dot{\phi} Z^{[B]} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} X^{[B]T} &= [1 \ 0 \ 0], \quad Y^{[B]T} = [0 \ 1 \ 0], \\ Z^{[B]T} &= [0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \quad (9a,b,c)$$

식 (5)와 같이 식 (10)에서 1 차 및 2 차 텐서의 성질을 이용하면 식 (11)과 같이 각속도를 구할 수 있다.

$$\tilde{\omega} = R\tilde{\omega}^*R^T \Leftrightarrow \omega = R\omega^* \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi c\theta \\ 0 & s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

일반적인 문제에서는 각속도의 성분을 시스템의 운동방정식으로 부터 구한 후 기구학적 방정식 (6) 또는 (11)을 적분하여 회전 자세를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi c\theta & c\phi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (12a)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi c\theta \\ 0 & s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (12b)$$

이와 비슷한 방법으로 먼저 B(X, Y, Z)에서 Z 축에 관하여 각도 ϕ 만큼 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 만큼 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ψ 만큼 x_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 이를 3-2-1 회전이라고 부른다. 이동좌표계를 기준으로 좌표계가 순차적으로 변환할 때 회전텐서 R 는 다음과 같다.

$$R = R^{[B]}R^{[b^1]}R^{[b^2]} = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^* &= R^T \dot{R} \\ &= (R_\phi R_\theta)^T R_\psi^T \dot{R}_\psi (R_\phi R_\theta) + R_\psi^T (R_\phi^T \dot{R}_\phi) R_\phi + R_\phi^T \dot{R}_\phi \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $R_\psi^T \dot{R}_\psi = \dot{\phi} \tilde{Z}$, $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\theta} \tilde{Y}$, $R_\theta^T \dot{R}_\theta = \dot{\psi} \tilde{X}$ 을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega^* = (R_\phi R_\theta)^T \dot{\phi} Z^{[B]} + R_\psi^T \dot{\theta} Y_1^{[b^1]} + \dot{\psi} X_2^{[b^2]} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Z^{[B]T} &= [0 \ 0 \ 1], \quad Y_1^{[b^1]T} = [0 \ 1 \ 0], \\ X_2^{[b^2]T} &= [1 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (16a,b,c)$$

각속도는 1-2-3 회전에 관한 식 (6)을 도출한 것과 같이 3-2-1 회전의 각속도가 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^* = \begin{bmatrix} s\theta & 0 & 1 \\ s\phi c\theta & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

또한, 관성좌표계에서 관측한 각속도를 앞에 기술한 1-2-3 회전의 방법과 같이 도출해 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= (\dot{R}_\phi R_\theta R_\psi + R_\phi \dot{R}_\theta R_\psi + R_\phi R_\theta \dot{R}_\psi)(R_\phi R_\theta R_\psi)^T \\ &= R_\psi^T \dot{R}_\psi + R_\psi^T (\dot{R}_\theta R_\phi^T) R_\phi + (R_\phi R_\theta) \dot{R}_\phi R_\phi^T (R_\phi R_\theta)^T \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $\dot{R}_\psi R_\psi^T = \dot{\psi} \tilde{X}$, $\dot{R}_\theta R_\phi^T = \dot{\theta} \tilde{Y}$, $\dot{R}_\phi R_\phi^T = \dot{\phi} \tilde{X}$ 를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega = \dot{\phi} Z^{[B]} + R_\psi^T \dot{\theta} Y^{[B]} + (R_\phi R_\theta) \dot{\psi} X^{[B]} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Z^{[B]T} &= [0 \ 0 \ 1], \quad Y^{[B]T} = [0 \ 1 \ 0], \\ X^{[B]T} &= [1 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (20a,b,c)$$

마찬가지로 각속도는 1-2-3 회전에 관한 식 (11)을 도출한 방법과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\theta c\phi \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 1 & 0 & s\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

2.2.4 원법의 유한회전

회전운동을 다른 방법으로 표현하기 위하여 그림 2 와 같이 디스크의 회전축 방향이 벡터 n 이고 크기 ϕ 로 회전하는 경우를 생각한다. 이 때 회전텐서 R 은 다음과 같다.

$$b = Ra \quad (22)$$

$$R = I + \sin \phi \tilde{n} + (1 - \cos \phi) \tilde{n}\tilde{n} \quad (23)$$

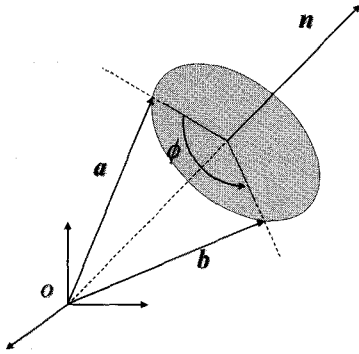


Fig. 2 The rotation tensor

오일러 매개변수(Euler parameter)를 4 개의 원소로 하는 4 원소(quaternion) 를 다음과 같이 정의하여 회전텐서 을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{e} = [e_0 \quad e]^T = [c(\phi/2) \quad s(\phi/2)n]^T \quad (24)$$

$$R(e) = I + 2e_0\tilde{e} + 2\tilde{e}\tilde{e} \quad (25)$$

또한, 직교성질(orthogonality) $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 를 만족하는 단위 4 원소(unit quaternion)이다. 회전좌표계와 관성좌표계에서 각속도 $\hat{\omega}^*$ 와 $\hat{\omega}$ 에 대한 4 원소에서 각속도 성분은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\hat{e} = 2C^T(\hat{e})\hat{e} \quad (26a)$$

$$\hat{\omega} = 2B^T(\hat{e})\hat{e} = 2C(\hat{e})\hat{e} \quad (26b)$$

여기서 4×4 행렬 A, B, C 는 다음과 같이 정의된다.

$$A(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0 I + \tilde{e} \end{bmatrix}, \quad B(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0 I - \tilde{e} \end{bmatrix} \\ C(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & e^T \\ e & -e_0 I - \tilde{e} \end{bmatrix} \quad (27a,b,c)$$

각속도는 $\hat{\omega}^*$ 와 $\hat{\omega}$ 에서 스칼라 성분인 첫 번째 매개변수 ω_0^* 와 ω_0 는 단위 4 원소라는 정규성(unit normality) 때문에 0 이며 다음의 관계식이 성

립한다.

$$A(\hat{e})A^T(\hat{e}) = B(\hat{e})B^T(\hat{e}) = C(\hat{e})C^T(\hat{e}) = |\hat{e}|^2 U_4 \quad (28)$$

$$\omega_0^* = \omega_0 = 2(e_0 \dot{e}_0 + e^T \dot{e}) = 2\hat{e}^T \dot{\hat{e}} = 0 \quad (29)$$

여기서 $|\hat{e}|^2 = 1$, U_4 는 대각 원소가 1 인 단위행렬이다. $A(\hat{e})$ 과 $B(\hat{e})$ 은 직교 연산자이므로 역으로 오일러 매개변수를 식 (26)으로 부터 계산할 수 있다.

$$\hat{e} = \frac{1}{2} A(\hat{e})\hat{\omega}^*, \quad \hat{e} = \frac{1}{2} B(\hat{e})\hat{\omega} \quad (30a,b)$$

오일러 각에 의한 유한회전의 회전텐서, 즉 식 (1)과 (13)에서 R 은 특정한 각 $\pm n\pi/2$ (n :정수)에서 특이성을 나타낼 수 있다. 이러한 과정은 삼각함수로 표현되는 행렬의 복잡한 연산을 내포하고 있다. 그리고 이러한 유한회전의 선택 방법은 12 가지이어서 회전순서가 일관성이 없다. 따라서 이로부터 도출되어야 하는 시스템 방정식은 로터 회전의 해석 모델을 대표한다고 간주하기가 어려울 것으로 예상된다. 하지만 4 원법에 의한 유한회전은 특이성이 나타날 수 없으며 식도 매우 간편하다. 또한 회전 축이 1 개이므로 유도한 각속도의 표현은 일관성을 지녔다고 판단할 수 있다.

로터 시스템에 그림 3 과 같은 구 좌표계(spherical coordinate)를 이용하여 4 원법을 적용하고 $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 인 단위 4 원법을 생각해 보자. 이 때 θ 는 회전축과 z 축 간의 회전각이고 ϕ 는 회전축과 x 축 간의 회전각이다.

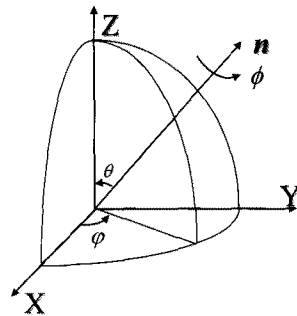


Fig. 3 Finite rotations using the spherical coordinate

$$\hat{e} = [c\frac{\phi}{2} \quad s\frac{\phi}{2} s\theta c\varphi \quad s\frac{\phi}{2} s\theta s\varphi \quad s\frac{\phi}{2} c\theta] \quad (31)$$

미세한 세차운동(precession)이 Y 축과 Z 축에서 $\epsilon(t)$ 만큼 발생하는 디스크의 회전각은 다음과 같다고 가정한다.

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \pm \epsilon_\theta(t), \quad \varphi(t) = \pi \pm \epsilon_\varphi(t) \quad (32a,b)$$

이에 해당하는 식 (24)의 4 원법은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{e} = [c\frac{\phi}{2} \quad -s\frac{\phi}{2} \mp s\frac{\phi}{2} \epsilon_\theta \quad \mp s\frac{\phi}{2} \epsilon_\varphi] \quad (33)$$

3. 수치해석

3.1 운동에너지

오일러 각 회전의 경우 이동좌표계와 관성좌표계에서 디스크 회전에 의한 운동에너지 K_{123}^* 와 K_{321} 은 각각 다음과 같다.

$$K_{123}^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J_{123} \omega^*, \quad K_{123} = \frac{1}{2} \omega^T J_{123} \omega \quad (34a,b)$$

$$K_{321}^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J_{321} \omega^*, \quad K_{321} = \frac{1}{2} \omega^T J_{321} \omega \quad (34c,d)$$

여기서 디스크의 관성모멘트가 I 일 때 관성모멘트 행렬은 다음과 같다.

$$J_{123} = I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{321} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (35a,b)$$

지금까지 기존의 연구들은 로터를 해석하기 위하여 운동에너지 식 (48)에서 회전각의 2 차 항만 고려하여 선형 시스템으로 간주하였다. 이러한 운동에너지는 다음과 같다.

$$K_{123}^* \approx \frac{1}{2} I \{2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\Omega(\varphi\dot{\theta} - \theta\dot{\varphi})\} \quad (36a)$$

$$K_{123} \approx \frac{1}{2} I \{2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 4\Omega\theta\dot{\varphi}\} \quad (36b)$$

$$K_{321}^* \approx \frac{1}{2} I \{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\Omega\theta\dot{\varphi}\} \quad (36c)$$

$$K_{321} \approx \frac{1}{2} I \{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 4\Omega\theta\dot{\varphi}\} \quad (36d)$$

4 원법에 의한 운동에너지 K_q^* 와 K_q 는 다음과 같이 계산된다.

$$K_q^* = \frac{1}{2} \hat{\omega}^{*T} J_q \hat{\omega}^* = 2\hat{e}^T J_q \hat{e} |\hat{\omega}|^2 U_q \quad (37a)$$

$$K_q = \frac{1}{2} \hat{\omega}^T J_q \hat{\omega} = 2\hat{e}^T J_q \hat{e} |\hat{\omega}|^2 U_q \quad (37b)$$

$$J_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

수치모델에서 $I = 1kg \cdot m^2$, $\Omega = 10rad/sec$, $\varphi(t) = \theta(t) = (\sin t)/10$ 로 정하였다. 그림 4-7 에서 보는 바와 같이 4 원법에 의하여 이동좌표계와 관성좌표계에서 산출된 에너지 $K_q^* = K_q$ 이다. 즉, 식 (30)을 식 (37)에 대입하여 $K_q^* = K_q$ 임을 증명할 수 있다. 그러나 서로 다른 오일러 각의 경우 $K_{123}^* \neq K_{123}$, $K_{321}^* \neq K_{321}$ 이다. 이는 식 (34)와 (36)으로부터 자명하다. 그림 5 와 7 에서 보는 바와 같이 3-2-1 회전에서는 에너지량이 과소평가 되어 있고, 1-2-3 회전에서는 에너지량이 거의 비슷하지만 정확히 동일하지는 않다. 따라서 4 원법으로 계산된 에너지를 이용하여 도출될 시스템 모델은 오일러 각 방법으로 도출된 것보다 더욱 일관성이 있고 신뢰도가 높음을 암시하고 있다.

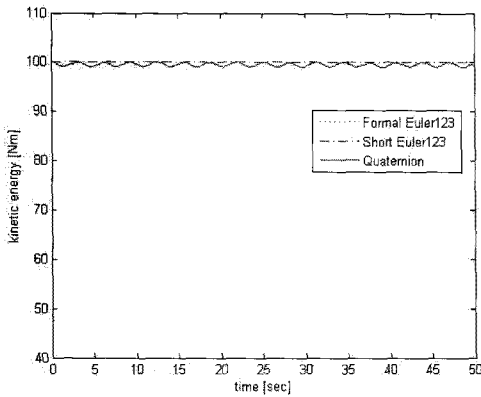


Fig. 4 Comparisons of kinetic energy for 1-2-3 Euler angle and quaternion in the moving frame

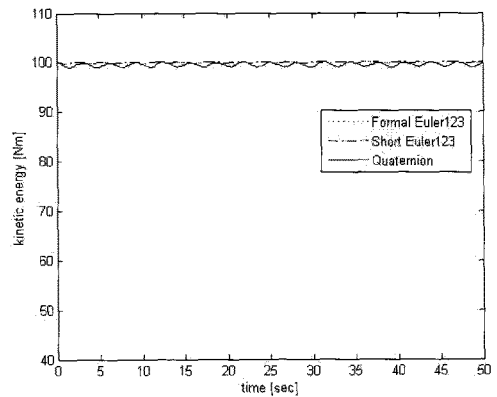


Fig. 6 Comparisons of kinetic energy for 1-2-3 Euler angle and quaternion in the inertial frame

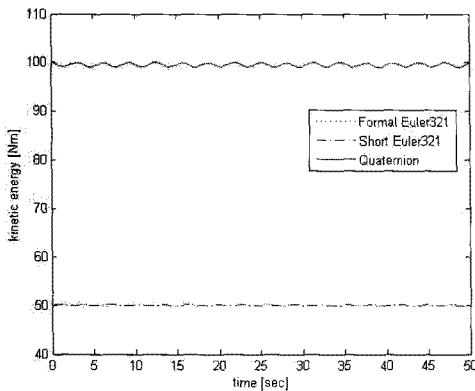


Fig. 5 Comparisons of kinetic energy for 3-2-1 Euler angle and quaternion in the moving frame

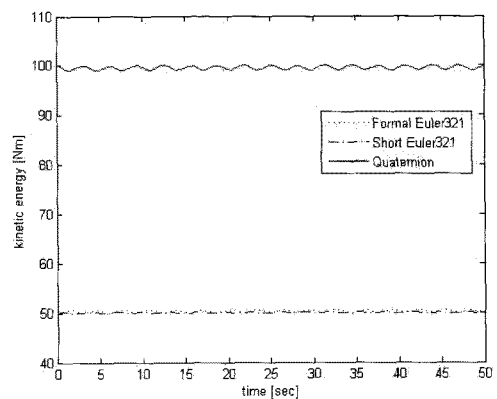


Fig. 7 Comparisons of kinetic energy for 3-2-1 Euler angle and quaternion in the inertial frame

3.2 각속도

식 (6), (11), (17), (21), (26a,b)로 부터 각속도를 계산할 수 있다. 이동좌표계와 관성좌표계를 1 개의 쌍으로 그림 8 과 9 에서 ω_1 , 그림 10 과 11 에서 ω_2 , 그림 12 와 13 에서 ω_3 을 비교하여 보면 4 원법에 의한 각속도는 동일하다. 오일러 각 1-2-3 과 3-2-1 의 경우 ω_1 을 제외하고 ω_2 와 ω_3 는 좌표계에 따라 서로 다르다는 것을 관찰할 수 있다. 비록 이동좌표계에서 1-2-3 회전의 경우 4 원법으로부터 구한 각속도와 유사하지만 이는 오일러 각을 선정하는 방법의 일관성을 보장할 수가 없다. 또한 좌표계별 관측량이 상이하다는 것은 관측좌표계 선정에 혼란을 줄 뿐이다. 따라서 4 원법에 의하여 시스템 모델을 결정하는 것이 타당하다고 판단된다.

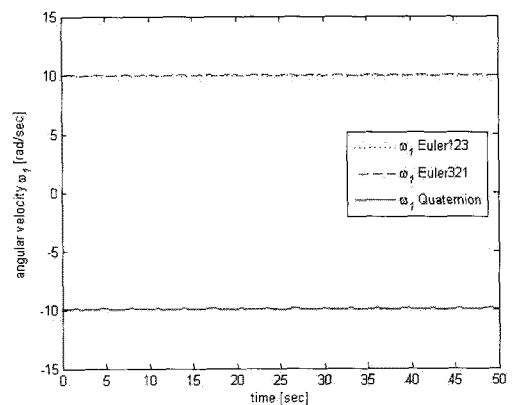


Fig. 8 Comparisons of for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the moving frame

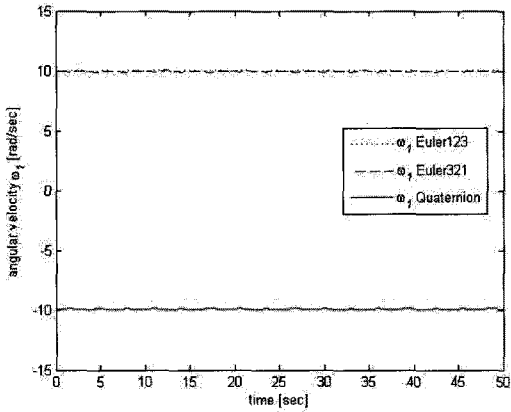


Fig. 9 Comparisons of ω_1 for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the fixed frame

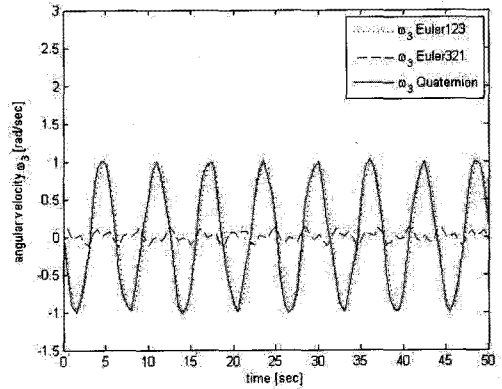


Fig. 12 Comparisons of ω_3 for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the moving frame

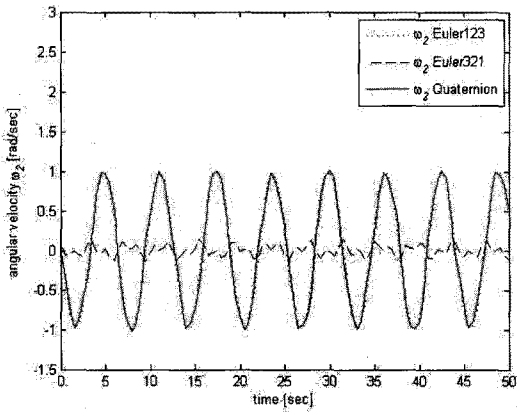


Fig. 10 Comparisons of ω_2 for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the moving frame

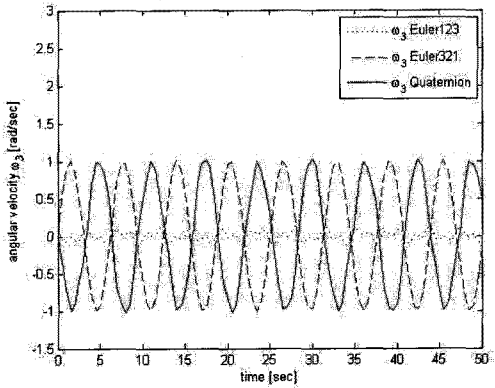


Fig. 13 Comparisons of ω_3 for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the fixed frame

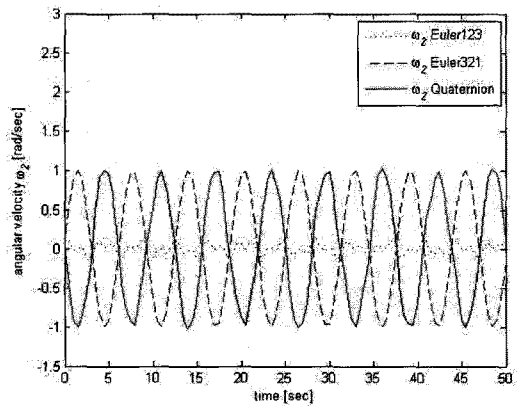


Fig. 11 Comparisons of ω_2 for 1-2-3, 3-2-1 Euler angle and quaternion in the fixed frame

4. 결론

로터 시스템의 회전운동을 해석하는데 있어 회전 매개화 방법 중에서 오일러 각을 채택한 기존의 방법을 극복하고자 4 원법을 사용한 방법을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 오일러 각의 순서 1-2-3 과 3-2-1 회전과 4 원법에 의한 회전 매개화를 통하여 이동좌표계와 관성좌표계에서 로터의 회전 운동에너지와 속도 성분을 비교하였다.

2) 오일러 각의 순서 선택은 일관성이 없어 2 개의 관측좌표계에 따른 에너지량은 서로 상이함을 발견하였으나, 4 원법으로 산출한 에너지는 어느 좌표계에서도 항상 동일하다.

3) 기존의 연구에서 수행된 에너지식의 산출

방법에서 3 차 이상의 고차항을 무시함으로써 에너지량이 과소평가 되었다.

4) 4 원법으로 산출한 속도가 이동좌표계와 관성좌표계에서 동일하다고 발견하였으나 오일러 각 방법은 상이하였다.

5) 상기의 결론을 바탕으로 4 원법과 에너지로부터 도출될 시스템 모델은 오일러 각 방법보다 더욱 일관성이 있고 신뢰도가 높을 것으로 예상된다.

후 기

본 연구는 2006 년도 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구된 논문임.

참고문헌

- Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., "The dynamics of rotor-bearing systems using finite element," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, pp. 593-600, 1976.
- Zorzi, E. S. and Nelson, H. D., "The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque-a finite element approach," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 102, pp. 158-161, 1980.
- Rao, J. S., "Rotor Dynamics," John Wiley & Sons, 1983.
- Greenhill, L. M., Brickford, J. D. and Nelson, H. D., "A conical beam finite element for rotor dynamic analysis," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 107, pp. 421-430, 1985.
- Mohiuddin, M. A. and Khulief, Y. A., "Modal characteristics of rotors using a conical shaft finite element," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 115, No. 1-2, pp. 125-144, 1994.
- Kane, K. and Torby, B. J., "The extended modal reduction method applied to rotor dynamic problems," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 79-84, 1991.
- Khulief, Y. A., "On the finite element dynamic analysis of flexible mechanisms," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 97, Issue 1, pp. 23-32, 1992.
- Mohiuddin, M. A. and Khulief, Y. A., "Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element," Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, No. 2, pp. 297-316, 1999.
- Firoozian, R. and Stanway, R., "Modeling and control of turbomachinery vibrations," ASME Journal of Vibration and Acoustics," Vol. 110, pp. 521-527, 1988.
- Diewald, W. and Nordmann, R., "Dynamics Analysis of centrifugal pump rotor with fluid-interactions," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 111, pp. 370-378, 1989.
- Yun, S. H., "Comparisons of rotation motion for rotor system by finite rotation," Proc. of KSPE Spring Conference, pp. 165-166, 2008.