

J 적분을 이용한 압전세라믹의 절연파괴 해석

Breakdown Analysis of Piezoelectric Ceramics Using J Integral

Song Lin¹, 김유환¹, ✉범현규¹

Song Lin¹, Yu Hwan Kim¹ and ✉Hyeon Gyu Beom¹

¹ 인하대학교 기계공학과 (Department of Mechanical Engineering, Inha Univ.)

✉ Corresponding author: hgbeom@inha.ac.kr, Tel: 032-860-7310

Manuscript received: 2008.2.14 / Revised: 2008.9.20 / Accepted: 2008.10.20

Dielectric breakdown in piezoelectric ceramics is analyzed by using the three dimensional J integral. The J integral is shown to be a path-independent surface integral for a conductive tubular channel in a piezoelectric material. J integrals are also numerically calculated for conductive defects and tubular channels in piezoelectric ceramics through finite element analysis.

Key Words: J Integral (J 적분), Conductive Channel (전도채널), Piezoelectric Ceramic (압전세라믹), Finite Element Analysis (유한요소해석)

1. 서론

전기-기계 커플링 특성을 지닌 압전세라믹은 전자기기, 통신기기, 정밀측정시스템, 제어시스템의 센서, 액추에이터, 커패시터, 고주파 센서 등으로 광범위하게 활용되고 있다. 압전세라믹은 취성이 강해 전기 혹은 기계적 하중에 의해 파손되기 쉽다. 압전세라믹의 파손기구를 규명하기 위해 그동안 많은 연구가 진행되어 왔다. 특히, 미소균열, 공동, 내부전극 등의 결함으로 인한 압전세라믹의 파손에 관한 연구가 활발하게 수행되어 왔다. Park 과 Sun¹ 은 직류 전기장이 압전세라믹의 파괴인성에 미치는 영향을 실험적으로 연구하였다. Lynch 등² 은 교류 전기장하에서 압전세라믹의 균열거동에 대한 실험을 수행하였다. Cao 와 Evans³ 는 파괴역학이론을 도입하여 전기적 하중하의 피로균열 문제를 해석하였다. Beom 과 Atluri⁴ 는 비선형유전 이론을 바탕으로 강유전세라믹내 균열선단의 응력 확대계수(stress intensity factor)를 연구하였다. 이와 함께 유전재료(dielectric material) 혹은 압전재료의

중요한 파손기구로 알려져 있는 절연파괴(dielectric breakdown)에 대한 연구가 몇몇 연구자들에 의해 진행되고 있다. Satoh 등⁵ 은 SiO₂ 박막에 대한 절연 파괴실험을 통하여 유전재료내의 미소결함이 유전 파괴강도를 저하시킨다는 사실을 보고하였다. Garboczi⁶ 는 절연파괴 연구에 선형파괴역학의 개념을 적용하였다. Suo⁷ 는 Griffith 의 에너지 평형원리를 바탕으로 유전재료의 절연파괴에 대한 물리적 모델을 제안하였다. Fu 등⁸ 은 전기장에 의한 압전세라믹의 파손실험을 통해 재료상수로써 전기적 파괴인성(fracture toughness)치를 측정하였다. Zhang 등⁹ 은 파괴역학의 Dugdale 모델을 확장하여 절연파괴 문제를 해석하였다. 이와 같이 절연파괴 현상을 이해하기 위한 여러 가지 이론 및 실험연구가 진행되어 왔으나 아직 절연파괴에 대한 엄밀한 이론적인 틀이 아직 마련되지 못하고 있다.

본 논문에서는 J 적분을 이용하여 압전세라믹의 절연파괴를 해석한다. 압전세라믹에서 절연파괴가 일어날 때 진전하는 관형 전도채널에 대한 J 적분이 보존적분임을 밝힌다. 또한 유한요소해석을 이

용하여 압전세라믹의 전도채널에 대한 J 적분을 계산한다.

2. J 적분

절연파괴는 외부의 전기장에 의하여 유전재료가 급격하게 이온화되면서 재료가 파손되는 현상이다. 절연파괴는 물리적으로 대단히 복잡한 현상이다. 절연재료와 접촉한 전극의 물성, 절연재료내의 미소공동 및 미소균열의 밀도 등 다양한 조건으로부터 영향을 받는다. 절연파괴는 전하주입(charge injection)과 이동(transport)에 의한 현상으로 간주할 수 있다. 즉 전하주입은 접촉된 전극으로부터 유입된 전하가 절연재료 내의 국부적인 영역에 쌓이게 됨을 말하며, 이동은 높은 에너지 밀도를 갖는 전하들이 특정경로를 따라 방출되는 현상을 말한다.¹⁰ 이와 같이 절연파괴가 일어나면 전하들이 재료를 관통하며 지나가는데 이 때 전하가 이동하는 통로가 마치 긴 원통형 관과 유사하다 하여 관형전도채널(tubular conductive channel)이라고 부른다.

압전세라믹에서 절연파괴시 발생하는 관형 전도채널에 대한 J 적분을 고려한다. 에너지 평형법칙을 전도채널에 적용하면 전도채널의 단위길이당 에너지방출률(energy release rate)을 3 차원 J 적분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.¹¹

$$J = \int_S (Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1} + n_i D_i E_1) dS \quad (1)$$

여기서 u_i 와 σ_{ij} , D_i , E_i 는 각각 변위와 응력, 전기 변위(electric displacement), 전기장을 각각 나타낸다. W 는 전기엔탈피 밀도(electric enthalpy density) 이며, dS 는 채널선단을 둘러싸고 있는 면의 미소면적을 나타낸다(Fig. 1).

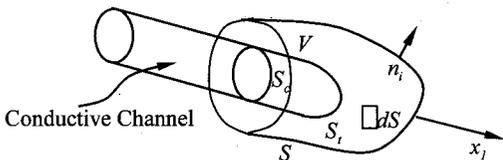


Fig. 1 Conductive channel

또한, n_i 는 단위의향수직벡터(unit outward normal vector)이다. 하첨자 i 와 j 는 Cartesian 좌표

계의 성분을 나타낸다. 한 항의 반복된 첨자는 1 부터 3 까지의 합을 의미한다. 콤마(,)는 직교좌표에 대한 편미분을 나타낸다. 채널의 길이방향은 x_1 축 방향이다. 압전재료에 대한 2 차원 J 적분은 균열문제를 해석하는 데 많이 사용되고 있다.¹²⁻¹⁴

선형압전재료에 대한 전기엔탈피 밀도는 $W = (\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - D_i E_i) / 2$ 이며, 구성방정식은 다음 식으로 표현된다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (2)$$

$$D_i = e_{ijk}\gamma_{jk} + \epsilon_{ij} E_j \quad (3)$$

여기서 γ_{ij} 는 변형률이며, C_{ijkl} 와 e_{ijk} , ϵ_{ij} 는 각각 강성텐서, 압전텐서, 유전율텐서를 나타낸다. 체적력(body force)과 자유전하(free charge)가 없는 경우, 응력과 전기변위는 다음과 같은 평형방정식을 만족한다.

$$\sigma_{ij,j} = 0, D_{i,i} = 0 \quad (4)$$

식 (1)이 채널선단을 감싸는 면 S 의 경로에 무관함을 보이기 위하여 전도채널의 선단을 둘러싼 임의의 체적 V를 고려한다. V의 전체표면 S_0 은 전도채널을 둘러싸고 있는 표면 S , 채널의 선단 표면 S_1 및 채널의 측면 S_c 의 합이다. 따라서 S_0 에 대한 J 적분은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$J_{S_0} = J_S + J_{S_1} + J_{S_c} \quad (5)$$

여기서 J 적분의 하첨자는 J 적분에서 정의되는 적분면적을 나타낸다. 식 (5)는 발산(divergence)정리와 식 (4)의 평형방정식을 이용하면 0 이 됨을 보일 수 있다. 전도채널의 측면 S_c 에서는 트랙션 벡터와 E_1 , n_1 이 모두 0 이므로 식 (5)는 다음 같이 쓸 수 있다.

$$J_{S_0} = -J_{S_1} \quad (6)$$

식 (6)은 전도채널을 감싼 표면에 관계없이 J 적분이 전도채널 선단표면에 의하여 결정됨을 의미한다. 이는 Rice¹⁵ 가 보인 균열문제에 대한 J 적

분의 경로독립성과 같다. 주어진 하중 및 형상에 대하여 식 (1)의 J 적분은 항상 일정한 값을 가지므로 압전재료의 절연파괴 여부를 결정짓는 매개변수로 사용할 수 있다. 즉, J 적분 값이 재료의 절연인성(dielectric toughness) 값에 도달하면 절연파괴가 일어난다고 판정할 수 있다. 식 (6)에서 알 수 있듯이 S 에 대한 면적분을 S_i 에 대한 표면적분으로 대체할 수 있다. 이와 같은 J 적분의 특성은 면적분의 수치계산을 매우 용이하게 한다. 그 이유는 유한요소해석을 통해 얻은 채널의 선단 표면의 정보만으로도 J 적분 계산이 가능하기 때문이다.

식 (1)로부터 압전세라믹에 대한 J 적분은 S_i 상에 작용하는 트랙션이 없는 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J = \int_{S_i} (Wm_1 + m_i D_i E_1) dS \quad (7)$$

여기서 m_i 는 S_i 상에서 $m_i = -n_i$ 이다. 식 (7)을 이용하면 압전세라믹내의 전도채널에 대한 J 적분을 수치적으로 계산할 수 있다.

3. 수치해석

3.1 표면결함

압전세라믹의 전도성 표면결함으로부터 시작되는 절연파괴를 고려한다. 표면결함 주변에는 강한

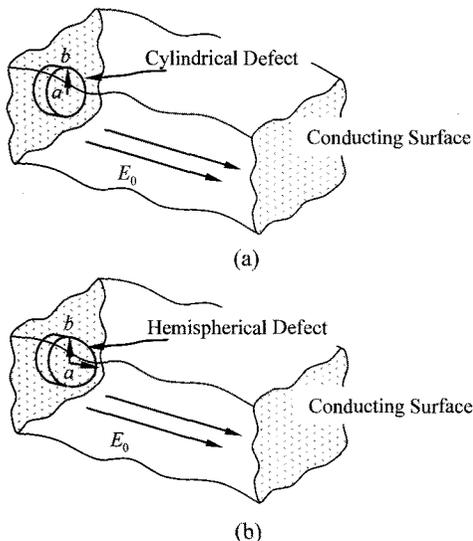


Fig. 2 Conductive defects

전기장이 작용하므로 절연파괴가 표면결함으로부터 발생하기 쉽다. 표면결함들은 일반적으로 크기가 부품의 특성크기에 비하여 훨씬 미소하므로 반무한 압전체의 표면결함으로 가정할 수 있다. 또한 표면결함의 선단부분의 형상은 반구형이나 원통형으로 가정할 수 있다. 반무한 압전체 표면의 원통형(Fig. 2(a)) 또는 반구형(Fig. 2(b))인 결함에서 절연파괴가 일어나 전도성 채널이 결함의 반경과 동일한 크기로 뻗어나가는 경우를 생각하기로 한다. 채널의 반경은 a 이며, 길이는 b 이다. 여기서 채널선단이 반구형인 채널의 길이는 반구부분을 제외한 길이이다.

표면결함으로 성장하는 압전세라믹내의 전도채널에 대한 유한요소해석 결과로부터 식 (7)을 이용하여 J 적분을 계산한다. 유한요소해석에는 상용유한요소해석 프로그램인 ABAQUS 를 이용한다. 유한요소계산의 타당성을 검증하기 위하여 먼저 비분극(unpoled) 압전재료를 고려한다.

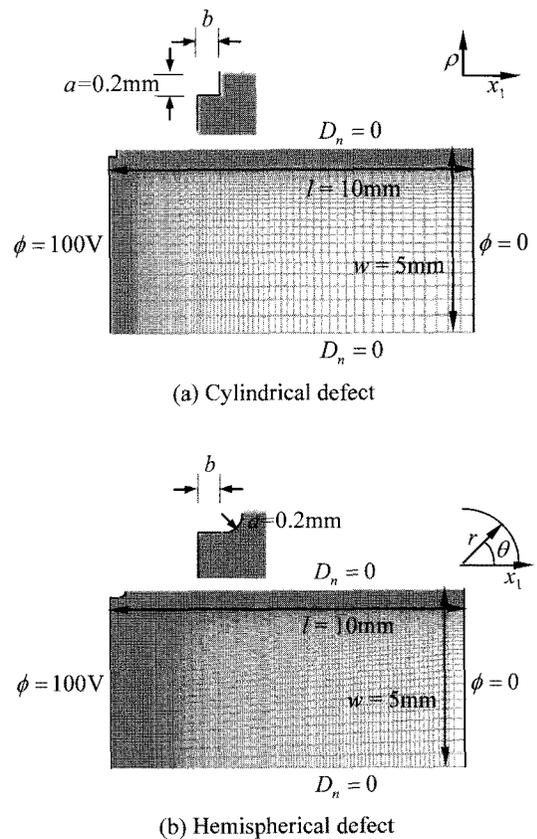


Fig. 3 FE models for conductive defects

비분극 압전세라믹에서는 평균 자발분극 (averaging spontaneous polarization)이 항상 0 이므로 압전세라믹의 고유한 전기-기계적 커플링 특성이 존재하지 않는다. 따라서 비분극 압전세라믹은 등방성 유전체재료로 취급할 수 있다. Beom 과 Kim¹¹은 전도성 채널길이가 $b \rightarrow 0^+$ 일 때, 반무한 유전체 표면의 원통형 결함과 반구형 결함에 대한 J 적분 값이 다음과 같음을 보였다.

$$J = \frac{1}{2} \pi \epsilon a^2 E_0^2, \text{ for cylindrical defect} \quad (8)$$

$$J = \frac{9}{4} \pi \epsilon a^2 E_0^2, \text{ for hemispherical defect} \quad (9)$$

여기서 ϵ 는 유전율(permittivity)이고, E_0 는 인가된 전기장이다. 유한요소모델은 Fig. 3(a) 및 (b)와 같이 반경 $w=5\text{mm}$ 이고, 길이는 $l=10\text{mm}$ 인 원통으로 한다. 반무한 문제임을 고려하여 결함의 크기는 w 의 $1/25$ 인 $a=0.2\text{mm}$ 로 한다. 유한요소는 8 절점 축대칭 요소인 CAX8E를 사용한다. 경계조건은 전압차가 양단에서 100V가 되도록 전기포텐셜(electric potential) ϕ 가 주어진다. 외부면은 전기적으로 절연되어 있다. 유한요소해석으로부터 계산된 J 적분 값은 $b \rightarrow 0^+$ 일 때 각각의 경우에 대하여 식 (8)과 식 (9)로 수렴함을 확인할 수 있었다.¹¹ 유한요소해석을 통한 J 적분의 수치해석 결과와 이론해석 결과와 일치하므로 여러 가지 형태의 절연과피 문제에 대하여 이와 같은 수치해석 기법을 이용해 보존적분을 계산할 수 있다.

Table 1 Material properties of PZT807

Stiffness Coefficients ($\times 10^{10} \text{N/m}^2$)	Piezoelectric Constants (C/m^2)	Dielectric Constants ($\times 10^{-9} \text{C/Vm}$)
$C_{11}=10.43$	$e_{11}=11.77$	$\epsilon_{11}=9.52$
$C_{12}=6.59$	$e_{12}=4.77$	$\epsilon_{22}=10.54$
$C_{23}=7.22$	$e_{26}=9.36$	
$C_{33}=14.26$		
$C_{55}=3.19$		

분극 방향이 x_1 인 횡등방성(transversly isotropic) 압전세라믹에 대한 J 적분을 계산한다. 횡등방성 압전세라믹의 구성방정식은 다음 식과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{33} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{33}-C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & e_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

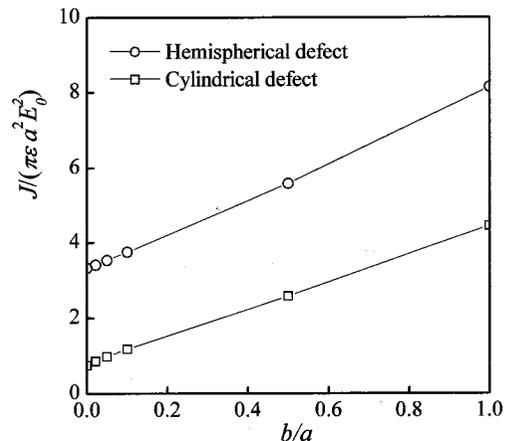


Fig. 4 Normalized J integral as a function of b/a

압전세라믹은 PZT807이며, 재료상수는 Table. 1과 같다. 유한요소모델은 Fig. 3과 동일하다. 유한요소해석 결과를 이용하여 압전세라믹 내의 전도 채널의 길이에 따른 J 적분 값을 구하였으며 그 결과를 Fig. 4에 나타내었다. J 적분은 비분극 압전세

라믹과 같이 $\pi\epsilon a^2 E_0^2$ 으로 무차원화 하였다. 채널의 길이가 $b \rightarrow 0^+$ 일 때, 원통형 및 반구형 표면결함에 대한 무차원 J 적분 값은 각각 0.75 와 3.33 으로 접근한다. 분극 압전세라믹의 J 적분 값이 비분극인 경우 보다 대략 1.5 배 정도 더 크다.

이와 같은 사실은 절연인성이 유사하다면 동일한 전기하중에 대하여 비분극 압전세라믹보다 분극 압전세라믹에서 더 쉽게 절연과피가 일어날 수 있음을 의미한다.

3.2 유한한 전도체

앞 절에서는 압전세라믹의 표면결함으로부터 시작되는 관형 전도체널에 대한 J 적분을 구하였다.

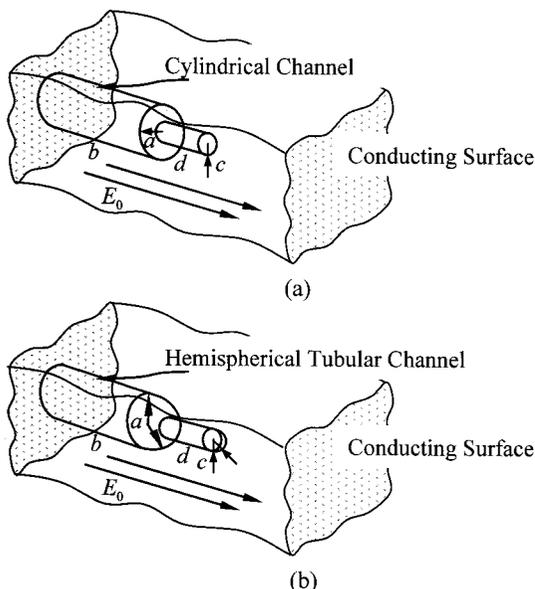


Fig. 5 Conductive channels in a piezoelectric material

본 절에서는 압전세라믹의 내부의 유한한 크기의 전도체에서 발생하는 절연과피를 고려한다. 여기서 유한한 크기의 전도체는 압전세라믹내의 바늘과 비슷한 형상을 가진 결함으로 생각할 수 있다. 유한한 전도체는 Fig. 5(a)와 (b)같이 채널선단의 모양이 원통형 또는 반구형으로 되어 있다고 가정한다. 전도체의 반경은 a 이며, 길이는 b 이다. 전도체널의 반경과 길이는 c 와 d 이다. 채널선단이 반구형인 채널의 길이는 반구 부분을 포함한 길이이다. 절연과피가 일어나면 전도체 선단으로부터 전도체널이 성장한다. 이 때, 뺏어나가는 전도체널의 선단은 전도체의 선단의 형태와 동일하다고 가

정한다. 또한 c 와 a 의 크기가 반드시 일치하지는 않는다.

절연과피가 전도체 선단에서 막 일어나려는 순간 에너지방출률을 살펴보기 위해 $d \rightarrow 0^+$ 인 경우 유한한 전도체의 유한요소모델의 형상과 치수, 경계조건을 Fig. 6(a)와 (b)에 나타내었다. 유한요소해석 결과와 식 (7)을 이용해 J 적분을 계산하여 Fig. 7(a)와 (b)에 나타내었다. a 와 c 의 변화에 대한 무차원 J 적분 값을 나타내었다. 전도체널의 반경이 일정할 때 유한한 전도체의 반경이 커질수록 J 적분 값은 감소한다. 또한 전도체의 반경이 일정할

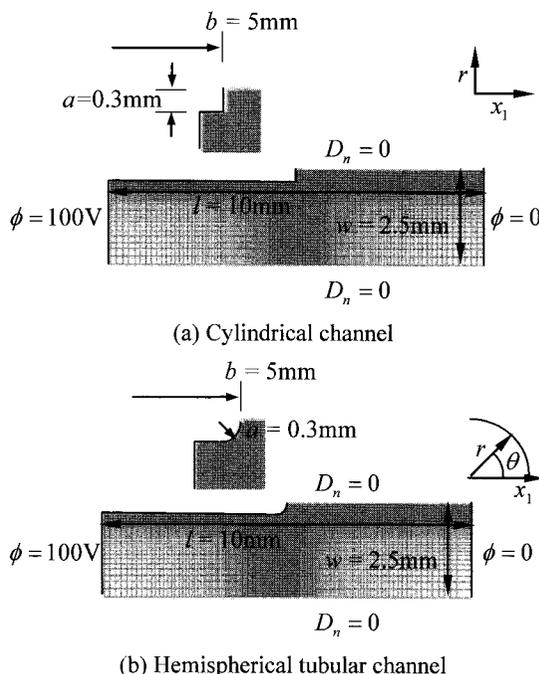


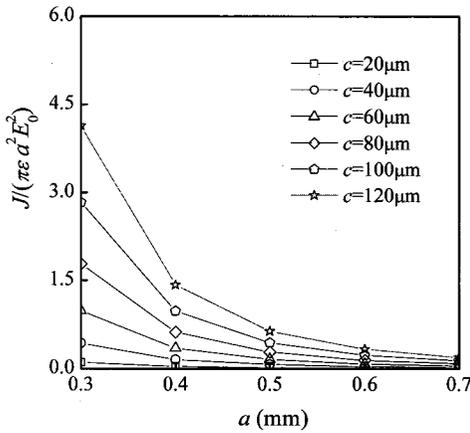
Fig. 6 FE models for conductive channels

때 전도체널의 반경이 커질수록 J 적분 값은 증가함을 알 수 있다. 또한 전도체의 반경이 매우 클 때 J 적분 값은 전도체널의 반경에 덜 의존하게 된다. 이는 전도체의 반경이 클수록 전도체 선단부근의 전기장의 강도가 현저하게 감소하기 때문이다. 한편 Fig. 7(a)와 (b)를 비교해 보면 동일한 조건에서 반구형 전도체에 대한 J 적분 값이 원통형일 때 보다 거의 3 배정도 더 크다는 사실을 알 수 있다. 이는 J 적분이 전도체 선단 면의 형상에 크게 의존함을 의미한다.

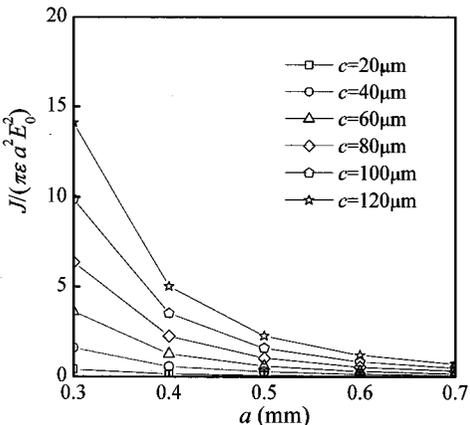
분극 압전세라믹내의 유한한 전도체에서 형성

되는 전도채널에 대한 J 적분을 계산한다. 압전세라믹은 PZT807 이며 분극방향은 x_1 방향이다. 재료상수는 Table. 1 과 같다. 유한요소해석은 비분극 압전세라믹의 경우와 동일한 모델, 경계조건 및 전기하중 하에서 수행된다. 수치적분에 의하여 계산된 J 적분 값을 a 와 c 의 변화에 따라 Fig. 8(a)과 (b)에 나타내었다.

전도채널의 반경이 일정할 때 전도체의 반경이 커질수록 J 적분 값은 감소한다. 전도체의 반경이 일정할 때 전도채널의 반경이 커질수록 J 적분 값은 증가한다. 또한 전도체가 매우 큰 반경을 가질 때 J 적분 값은 전도채널의 반경에 크게 의존하지 않는다. 이는 전도체의 반경이 크면 전도체 선단 부근의 전기장의 강도가 현저하게 감소하기 때문이다.



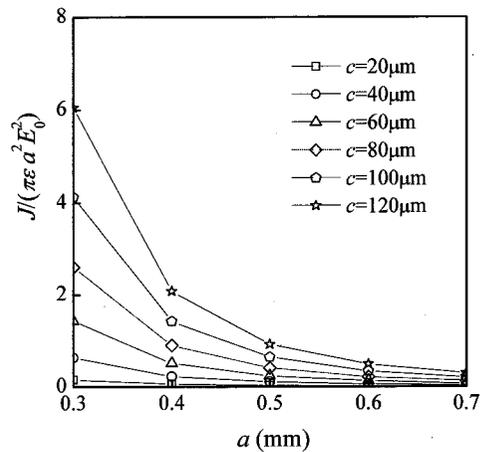
(a) Cylindrical channel



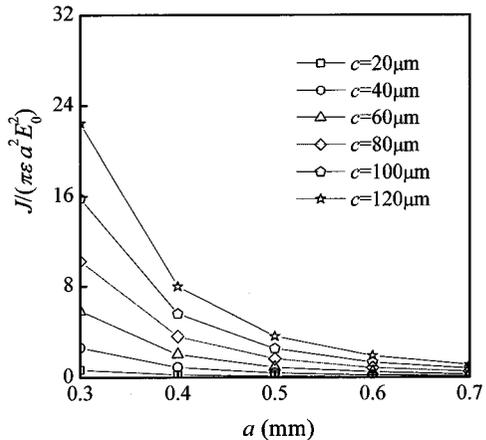
(b) Hemispherical tubular channel

Fig. 7 Normalized J integral for conductive channels in the unpoled piezoelectric material

한편 Fig. 8(a)와 (b)를 비교해 보면 동일한 조건에서 초기채널이 형태가 반구형일 때 J 적분값은 원통형일 때 보다 거의 3 배 정도 더 크다. 이는 J 적분값이 초기채널 선단면의 형상에 매우 민감하다는 사실을 말한다. 그리고 Fig. 7 과 Fig. 8 을 비교해 보면 분극 압전세라믹의 J 적분 값이 비분극일 때보다 대략 1.5 배 정도 크다. 이러한 사실은 절연인성이 유사할 경우 비분극 압전세라믹보다 분극 압전세라믹에서 절연파괴가 더 쉽게 일어날 수 있음을 의미한다.



(a) Cylindrical channel



(b) Hemispherical tubular channel

Fig. 8 Normalized J integral for conductive channels in the poled piezoelectric material

4. 결론

본 논문에서는 압전세라믹의 절연파괴 해석에

J 적분을 적용하였다. J 적분이 전도채널을 둘러싼 임의의 표면에 대하여 독립임을 보였다. 절연파괴가 일어날 때 반무한 압전세라믹의 표면결함으로부터 성장하는 전도채널에 대한 J 적분값을 유한요소해석을 이용하여 계산하였다. 또한 압전세라믹 내에 존재하는 유한한 크기의 전도체 선단에서 절연파괴가 일어날 때 성장하는 전도채널에 대한 J 적분 값을 계산하였다. J 적분은 표면결함 및 전도체의 선단면의 형상에 의존하였다. 반구형인 경우의 J 적분 값이 원통형일 때 보다 더 크음을 알 수 있다. 또한 압전효과로 인하여 분극 압전세라믹에 대한 J 적분 값이 비분극인 경우 보다 더 크다는 사실을 알 수 있다.

후 기

이 논문은 인하대학교의 지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

1. Park, S. B. and Sun, C. T., "Fracture Criteria for Piezoelectric Ceramics," *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 78, Issue 6, pp. 1475-1480, 1995.
2. Lynch, C. S., Yang, W., Collier, L., Suo, Z. and McMeeking, R. M., "Electric Field Induced Cracking in Ferroelectric Ceramics," *Ferroelectrics*, Vol. 166, Issue 1, pp. 11-30, 1995.
3. Cao, H. and Evans, A. G., "Electric Field Induced Fatigue Crack Growth in Piezoelectrics," *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 77, Issue 7, pp. 1783-1786, 1994.
4. Beom, H. G. and Atluri, S. N., "Effect of Electric Fields on Fracture Behavior of Ferroelectric Ceramics," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, Issue 6, pp. 1107-1125, 2003.
5. Satoh, Y., Shiota, T., Murakami, Y., Shingyouji, T. and Furuya, H., "Degradation of dielectric breakdown field of thermal SiO₂ films due to structural defects in Czochralski silicon substrates," *Journal of Applied Physics*, Vol. 79, Issue 10, pp. 7944-7957, 1996.
6. Garboczi, E. J., "Linear Dielectric Breakdown Electrostatics," *Physical Review B*, Vol. 38, Issue 13, pp. 9005-9010, 1988.
7. Suo, Z., "Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, Issue 7, pp. 1155-1176, 1993.
8. Fu, R., Qian, C. -F. and Zhang, T. Y., "Electric Fracture Toughness for Conductive Cracks Driven by Electric Fields in Piezoelectric Materials," *Applied Physics Letters*, Vol. 76, No. 1, pp. 126-128, 2000.
9. Zhang, T. Y., Zhao, M. H. and Gao, C. -F., "The Strip Dielectric Breakdown Model," *International Journal of Fracture*, Vol. 132, No. 3, pp. 311-327, 2003.
10. Verweij, J. F. and Klootwijk, J. H., "Dielectric Breakdown I: A Review of Oxide Breakdown," *Microelectronics Journal*, Vol. 27, Issue 7, pp. 611-622, 1996.
11. Beom, H. G. and Kim, Y. H., "Application of J Integral to Breakdown Analysis of a Dielectric Material," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, Issue 24, pp. 6045-6055, 2008.
12. Beom, H. G. and Atluri, S. N., "Near-tip Fields and Intensity Factors for Interfacial Cracks in Dissimilar Anisotropic Piezoelectric Media," *International Journal of Fracture*, Vol. 75, No. 2, pp. 163-183, 1996.
13. Gao, H., Zhang, T. Y. and Tong, P., "Local and Global Energy Release Rates for an Electrically Yielded Crack in a Piezoelectric Ceramic," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, Issue 4, pp. 491-510, 1997.
14. Ru, C. Q. and Mao, X., "Conducting Cracks in a Piezoelectric Ceramic of Limited Electrical Polarization," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 47, Issue 10, pp. 2125-2146, 1999.
15. Rice, J. R., "Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Conservation by Notches and Cracks," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 2, pp. 379-386, 1968.